16/5/2014 test

1) $\dfrac{x^2+x-6}{|2x-1|+\sqrt{2-x}}\ge 0$

Il denominatore è sempre positivo in quanto somma di un valore assoluto e di una radice, entrambi positivi. Resta da trovare il dominio che dipende dal radicando 2-x che è maggiore o uguale a zero se x≤2.

Resta da risolvere la disequazione

$x^2+x-6\ge 0$

$(x+3)(x-2)\ge 0$

$x_1=-3, x_2=2$

La soluzione si ha per gli intervalli esterni, dunque x≤-3 e x≥2. Tale soluzione vale però solo per x≤2, dunque la soluzione è x≤-3, x=2, dunque la risposta esatta è la A.

2) Determinare i valori di k per cui le rette $(k^2+2k)x+y-5k+1=0$ e $(2k+1)x+ky+3-k=0$ sono ortogonali.

Scriviamo le due rette in forma esplicita.

I retta $\begin{aligned}&(k^2+2k)x+y-5k+1=0\\&y=-(k^2+2k)x+5k-1\end{aligned}$, II retta $\begin{aligned}&(2k+1)x+ky+3-k=0\\&ky=-(2k+1)x-3+k\\&y=\frac{-(2k+1)}{k}x+\frac{-3+k}{k}\end{aligned}$

Due rette sono ortogonali se i coefficienti angolari sono reciproci e opposti, dunque la condizione da imporre è:

$$-(k^2+2k)=\frac{k}{2k+1}\Rightarrow\frac{(2k+1)(-k^2-2k)=k}{2k+1}\Rightarrow -2k^3-4k^2-k^2-2k-k=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^3+5k^2+3k=0\Rightarrow k(2k^2+5k+3)=0$$

$$k_1=0, k_{2,3}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{-5\pm1}{4}$$

$$k_2=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$k_3=-\frac{4}{4}=-1$$

La risposta esatta è la E.

3) $x^2-4x+\lambda>0$, dire quali delle seguenti affermazioni è falsa.

Si ricorda che $y=x^2-4x+\lambda$ è una parabola di vertice $\left(-\frac{b}{2a},\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{-16+4\lambda}{4}\right)=(2,-4+\lambda)$.

Le intersezioni della parabola con l'asse x sono

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\lambda}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{4-\lambda}}{2}=\frac{2\left(2\pm\sqrt{4-\lambda}\right)}{2}=2\pm\sqrt{4-\lambda}\,.$$

Ci sono due intersezioni se 4-λ>0, ossia se λ<4.

C'è una intersezione se λ=4, e tale intersezione è x=2.

Non ci sono intersezioni se λ>4.

Risolvere tale disequazione equivale a chiedersi dove la parabola si trova sopra l'asse x, e la parabola è rivolta verso l'alto.

Andiamo per ordine.

Risposta A) Per λ<4 ogni x<0 è soluzione. Per λ<4 ci sono due intersezioni, e le soluzioni della disequazioni sono i valori esterni, dunque le soluzioni sono $x<2-\sqrt{4-\lambda}, x>2+\sqrt{4-\lambda}$, e i numeri x<0 sono all'interno dell'intervallo $x<2-\sqrt{4-\lambda}$, dunque è vera.

Risposta B) Per λ=4 allora x=2 non è soluzione. Per λ=4 c'è una intersezione x=2, dunque la parabola è sempre sopra l'asse delle x tranne che per x=2, dunque x=2 non è soluzione e l'affermazione è vera.

Risposta C) Per λ>4 ogni x è soluzione. Per λ>4 non ci sono intersezioni, dunque la parabola è sopra l'asse x per ogni valore di x, dunque ogni x è soluzione e l'affermazione è vera.
Risposta D) Per λ<4 ogni valore interno dell'intervallo $2-\sqrt{4-\lambda}<x<2+\sqrt{4-\lambda}$ è soluzione.
Per λ<4 ci sono due intersezioni, e le soluzioni della disequazioni sono i valori esterni, dunque le soluzioni sono $x<2-\sqrt{4-\lambda}, x>2+\sqrt{4-\lambda}$, dunque non sono i valori interni ma quelli esterni, e l'affermazione è falsa. La risposta esatta è la D.
Giusto per sicurezza verifichiamo la E) Per λ<4 $x=2\left(1+\sqrt{4-\lambda}\right)$ è soluzione.
Per λ<4 ci sono due intersezioni, e le soluzioni della disequazioni sono i valori esterni, dunque le soluzioni sono $x<2-\sqrt{4-\lambda}, x>2+\sqrt{4-\lambda}$. La soluzione $2\left(1+\sqrt{4-\lambda}\right)>2+\sqrt{4-\lambda}$, dunque è soluzione.
L'affermazione E è dunque vera.

4) Per quali valori di k reale la circonferenza $x^2+y^2+\left(k^2+2\right)x+3ky+5=0$ ha centro appartenente alla bisettrice del II e IV quadrante.
La bisettrice del II e IV quadrante ha equazione y=-x, dunque si richiede che il centro abbia coordinate opposte. Il centro della circonferenza ha coordinate $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)=\left(-\frac{k^2+2}{2},-\frac{3k}{2}\right)$. La condizione da imporre è dunque

$$k^2+2=-3k \Rightarrow k^2+3k+2=0 \Rightarrow (k+1)(k+2)=0$$
$$k_1=-1, k_2=-2$$

La risposta esatta è dunque la D.
E invece no. Qui c'è un maledetto problema: scriviamo l'equazione della circonferenza per k=-1.
La circonferenza ha equazione $x^2+y^2+3x-3y+5=0$. Calcoliamone il raggio.

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-5}=\sqrt{-\frac{1}{2}}.$$

Accidenti, non è una circonferenza perché il raggio risulta la radice di un numero negativo.
L'unica soluzione accettabile è k=-2 dunque la risposta esatta è la C.

5) $\frac{1}{2-x}\geq|2-x|$
Si pone 2-x≥0, ossia x≤2, e si spezza la disequazione nei due sistemi di disequazioni di cui poi va fatta l'unione delle soluzioni.
I sistema $\begin{cases} x\leq 2 \\ \frac{1}{2-x}\geq 2-x \end{cases}$ Si noti che per togliere il denominatore si deve porre x≠2.
La seconda del sistema è

$$\frac{1}{2-x}\geq 2-x \Rightarrow 1\geq(2-x)^2 \Rightarrow x^2-4x+4-1\leq 0 \Rightarrow x^2-4x+3\leq 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono 1 e 3, e la soluzione della disequazione è data dai valori interni, dunque 1≤x≤3. L'intersezione tra 1≤x≤3 e x<2 è 1≤x<2.
II sistema $\begin{cases} x>2 \\ \frac{1}{2-x}\geq -2+x \end{cases}$
La seconda del sistema è

$$\frac{1}{2-x}\geq -2+x \Rightarrow 1\leq(2-x)(-2+x) \Rightarrow x^2-4x+4+1\leq 0 \Rightarrow x^2-4x+5\leq 0$$

Quest'ultima disequazione non ha soluzioni, dunque il II sistema non fornisce soluzione. La soluzione finale è dunque 1≤x<2. La risposta esatta è la D.

6) senx=1/5, allora il sen2x è…
Per trovare il seno di 2x si usano le formule di duplicazione sen2x=2senxcosx. Calcoliamo dunque cosx utilizzando la relazione fondamentale della trigonometria.

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

$\cos x = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Adesso si applica la formula di duplicazione e si ha

$\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\pm\frac{2\sqrt{6}}{5} = \pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$ . La risposta esatta è dunque la E.

7) Dati i numeri reali $a\sqrt{a}, a^{\frac{3}{5}}, \sqrt{\sqrt{a}}, a^3\sqrt{a}, a^{\frac{1}{5}}$ con a reale e 0<a<1 dobbiamo metterli in ordine. Scriviamoli intanto tutti in forma esponenziale.

$a\sqrt{a} = a\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$

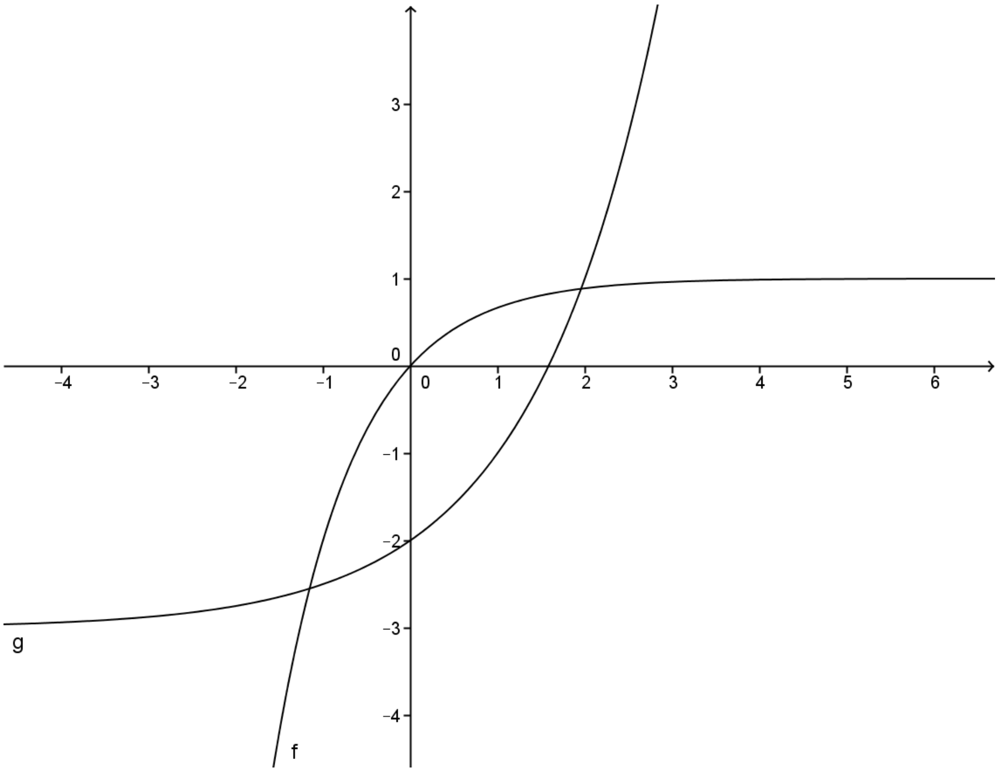
$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$

$a^3\sqrt{a} = a^3\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$

In ordine secondo esponente abbiamo $a^{\frac{1}{5}} < a^{\frac{1}{4}} < a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{3}{2}} < a^{\frac{7}{2}}$ . Si tenga presente che 0<a<1, e per tali valori (ad esempio a=1/2), si ha esattamente l'ordine opposto, dunque $a^{\frac{7}{2}} < a^{\frac{3}{2}} < a^{\frac{3}{5}} < a^{\frac{1}{4}} < a^{\frac{1}{5}}$ . La risposta corretta è dunque la C.

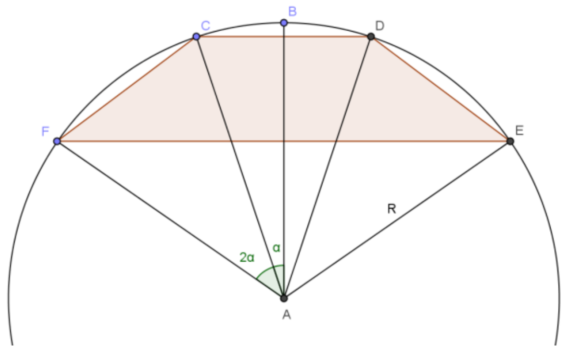
8) Quante soluzioni ha l'equazione $1-\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2^x - 3$ ?

Proviamo a disegnare i grafici delle funzioni dei due membri.




Le intersezioni sono due e la risposta esatta è la C.

9) La figura descritta dal testo è qui sotto.




Per determinare il perimetro consideriamo i triangoli ACD, ACF e ADE. Essi sono sia isosceli che congruenti tra loro, per cui FC=CD=DE. Calcoliamoli con il teorema dei coseni.

$$CF^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(2\alpha)$$

$$CF^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(2\alpha) = 2R^2(1-\cos(2\alpha))$$

Per le formule di duplicazione si ha:

$$CF^2 = 2R^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = 2R^2\left(2\sin^2\alpha\right) = 4R^2\sin^2\alpha$$

$$CF = 2R\sin\alpha$$

Calcoliamo ora FE sempre con il teorema dei coseni.

$$EF^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(6\alpha)$$

$$EF^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(6\alpha) = 2R^2(1-\cos(6\alpha))$$

Per le formule di duplicazione si ha:

$$EF^2 = 2R^2\left(\sin^2(3\alpha) + \cos^2(3\alpha) - \cos^2(3\alpha) + \sin^2(3\alpha)\right) = 2R^2\left(2\sin^2(3\alpha)\right) = 4R^2\sin^2(3\alpha)$$

$$EF = 2R\sin(3\alpha)$$

Il perimetro è dunque

$$2p = 3 \cdot 2R\sin\alpha + 2R\sin(3\alpha) = 2R\left(3\sin\alpha + \sin(3\alpha)\right)$$

La risposta giusta è la A.

10) 0.05*2=0.1

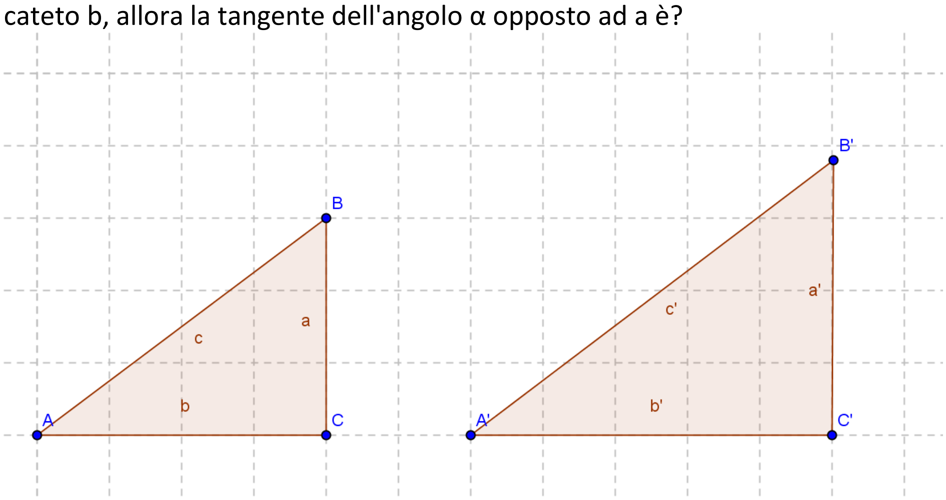
0.1*2=0.2

0.2*2=0.4

0.4*2=0.8

Con 4 piegamenti si raggiunge lo spessore richiesto. La risposta giusta è la A.

11) Dato un triangolo rettangolo di cateti di lunghezza a e b, si costruisce un altro triangolo rettangolo simile al precedente, con i relativi cateti di lunghezza a’ e b’. Se il cateto di lunghezza b’ è congruente all'ipotenusa del primo triangolo, e l'ipotenusa del secondo triangolo è tre volte il cateto b, allora la tangente dell'angolo α opposto ad a è?



Facendo riferimento alla figura precedente si ha (dati del testo) b'=c, c'=3b.
Dal fatto che i triangoli siano simili si ha a:a'=b:b'=c:c'.
La tangente dell'angolo opposto ad a è tgα=a/b=a'/b'.
Si tratta di trovare una strada che a partire dai dati mi porti al risultato senza usare troppe incognite. Le strade sono molteplici, ne mostriamo una.

$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{3b} \Rightarrow c^2 = 3b^2 \Rightarrow c = b\sqrt{3}$

Per Pitagora $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = \left(b\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 3b^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = b\sqrt{2}$

Possiamo dunque calcolare la tangente $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{b\sqrt{2}}{b} = \sqrt{2}$

La risposta giusta è la E.

12) Un giovane chiede a un maestro buddista di poter diventare suo discepolo. Questi, nella sua grande saggezza e dopo avere valutato attentamente il ragazzo, risponde: "Potrai diventare mio discepolo non prima che la somma della tua età e la quarta parte di quella del qui presente venerabile maestro sia maggiore di 50, ma non dopo che quella tra il triplo dei tuoi anni e il doppio di quelli del maestro sia maggiore di 100". Il giovane potrà diventare discepolo del maestro…

Sia x l'età del giovane quando diventerà discepolo e y l'età del venerabile maestro.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}y \geq 50 \\ 3x + 2y \leq 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 200 - 4x \\ y \leq 50 - \frac{3}{2}x \end{cases}$$

Troviamo l'intersezione dei due semipiani.

$$200 - 4x = 50 - \frac{3}{2}x$$
$$400 - 8x = 100 - 3x$$
$$-5x = -300$$
$$x = 60$$

Non facciamoci fregare dal risultato. Se il discepolo ha 60 anni il maestro, per soddisfare entrambe le condizioni, deve averne -40!
Direi che la risposta esatta è la B, ossia mai.

13) 13. Dati tre polinomi P(x), Q(x) e R(x), supponiamo che R divida Q e che Q divida P. Allora
A. il grado di P(x) è maggiore o uguale del grado di R(x)Q(x)
B. P(x) divide R(x)
C. Q(x)/R(x) divide P(x)
D. R(x) + Q(x) divide P(x)
E. R(x)Q(x) divide P(x)

Dal fatto che R divida Q si deduce che esiste un polinomio A tale che R*A=Q.
Dal fatto che Q divida P si deduce che esiste un polinomio B tale che Q*B=P.
La risposta esatta è la C. Verifichiamolo.
Si ha P=Q*B=R*A*B.
Dire che Q/R divide P significa che esiste un polinomio D tale che D*Q/R=P. Cerchiamo tale polinomio D.

$$\frac{Q}{R} * D = P$$
$$\frac{R * A}{R} * D = P$$
$$A * D = P$$
$$A * D = R * A * B$$
$$D = R * B$$

Abbiamo trovato il D che cercavamo. La risposta esatta è la C.

14) Dobbiamo calcolare l'espressione $\log_2\left(x^{3\log_x 2}\right)-\log_{x^2+1}\left(x^4+2x^2+1\right)$

$$\log_2\left(x^{3\log_x 2}\right)-\log_{x^2+1}\left(x^4+2x^2+1\right)=$$
$$=\log_2\left(x^{\log_x 2^3}\right)-\log_{x^2+1}\left(x^2+1\right)^2=$$
$$=\log_2 2^3-2=$$
$$=3-2=1$$

La risposta esatta è la A.

Un modo alternativo che non utilizza il fatto che l'inversa del logaritmo è l'esponenziale è il seguente, che utilizza le proprietà dei logaritmi.

$$\log_2\left(x^{3\log_x 2}\right)-\log_{x^2+1}\left(x^4+2x^2+1\right)=$$
$$=\log_2\left(x^{\log_x 2^3}\right)-\log_{x^2+1}\left(x^2+1\right)^2=$$
$$=\log_x 2^3\cdot\log_2 x-2=$$
$$=\log_x 2^3\cdot\frac{1}{\log_x 2}-2=$$
$$=\frac{\log_x 2^3}{\log_x 2}-2=$$
$$=\log_2 2^3-2=$$
$$=3-2=1$$

15) In un cono con base di raggio R e altezza h si inscrive un cilindro con asse coincidente con quello del cono. Se l'altezza del cilindro è metà di quella del cono, allora il rapporto tra il volume del cono e quello del cilindro è…?

Se l'altezza del cilindro è metà di quella del cono allora anche il raggio di base del cilindro è metà di quello del cono.

Il volume del cono è $V_{cono}=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

Il volume del cilindro è $V_{cilindro}=\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{h}{2}=\pi\frac{R^2h}{8}$.

Il rapporto tra i due volumi è $\frac{V_{cono}}{V_{cilindro}}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2h}{\frac{1}{8}\pi R^2h}=\frac{1}{3}:\frac{1}{8}=\frac{8}{3}$.

La risposta esatta è la C.