Geometria proiettiva

1 - Il piano proiettivo – Introduzione

In questo capitolo si introducono in maniera non formale alcuni concetti che verranno poi formalizzati nei capitoli successivi.

1.1 Retta proiettiva

Quando si sono studiati i numeri reali si è mostrato che esiste una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti di una retta. Si può pensare di aggiungere alla retta r un punto all'infinito indicato con R_∞.

Figura 1.1
Retta r e suo punto all'infinito.

In questo contesto non si considerano due punti distinti, uno verso $+\infty$ ed uno verso $-\infty$; i due punti all'infinito vengono identificati in un unico punto. Intuitivamente si potrebbe affermare che se si arrivasse al punto $+\infty$ e lo si attraversasse si ritornerebbe da $-\infty$.
Si può immaginare la retta come se si chiudesse su sé stessa, "incollando" il punto che si trova a $+\infty$ con quello che si trova a $-\infty$.

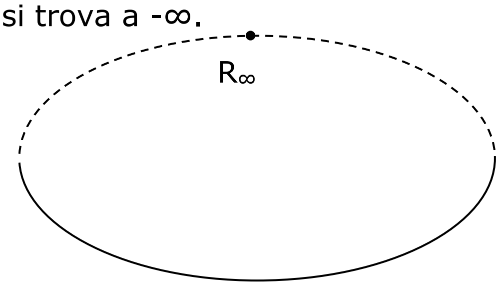


Figura 1.2
Retta r e suo punto all'infinito.

Definizione: data una retta r e il suo punto all'infinito R_∞ è detto **retta proiettiva** l'insieme $r \cup \{R_\infty\}$.

1.2 Prospettiva e punti di fuga

E' evidente che le dimensioni apparenti degli oggetti decrescono mano a mano che si allontanano dal nostro punto di vista. La prospettiva è una tecnica di disegno che utilizza linee e punti di fuga per determinare come variano le dimensioni apparenti degli oggetti rispetto ad un punto di vista.
La **linea dell'orizzonte** è una linea teorica che dipende dalla posizione dell'osservatore. Le linee prospettiche convergono verso i **punti di fuga** che solitamente risiedono lungo la linea dell'orizzonte.
Esistono due tipi di prospettiva di parallelepipedi: la **prospettiva centrale**, che utilizza un solo punto di fuga, e la **prospettiva accidentale**, che ne utilizza due. La prospettiva centrale si utilizza quando l'oggetto che si osserva ha un piano perpendicolare al punto di vista. La prospettiva accidentale si utilizza quando un osservatore guarda l'oggetto da uno dei suoi spigoli.

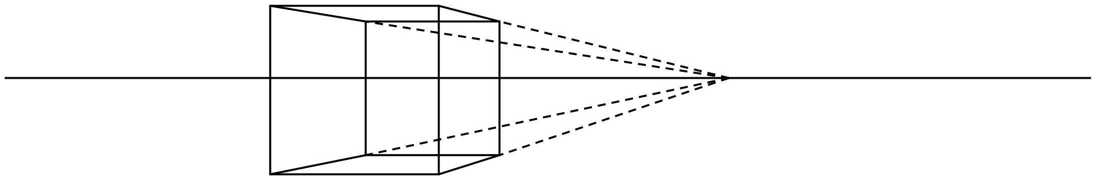


Figura 1.3
Prospettiva centrale

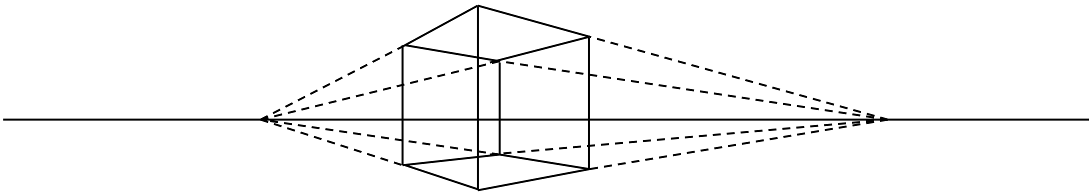


Figura 1.4
Prospettiva accidentale

Nella prospettiva centrale le rette che apparentemente convergono verso il punto di fuga sono in realtà parallele tra di loro. Il punto di fuga può essere considerato il punto all'infinito verso cui convergono infinite rette parallele.
Si può immaginare quindi che tutte le rette tra loro parallele si incontrino in un punto all'infinito, che si trova sulla linea dell'orizzonte.
Nel caso della prospettiva accidentale si nota che una differente famiglia di rette parallele converge verso un altro punto all'infinito, sempre situato sulla linea dell'orizzonte. La linea dell'orizzonte può essere dunque immaginata come una retta formata dai punti all'infinito verso cui convergono differenti famiglie di rette parallele.
Con quanto detto finora si è informalmente definita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle rette del piano e i punti della retta all'infinito. Ad ogni famiglia di rette parallele corrisponde un punto all'infinito situato sulla linea dell'orizzonte, e ad ogni punto della linea dell'orizzonte corrisponde la famiglia di rette parallele che hanno esso come punto di fuga.

1.3 Piano all'infinito

I punti all'infinito sono detti **punti impropri**. Gli altri sono detti punti **propri o affini**.
Per quanto detto finora si può immaginare che le infinite rette parallele di un fascio convergano verso un punto improprio.
Un altro fascio di rette parallele tra loro, ma non parallele alle precedenti, convergerà verso un differente punto improprio.

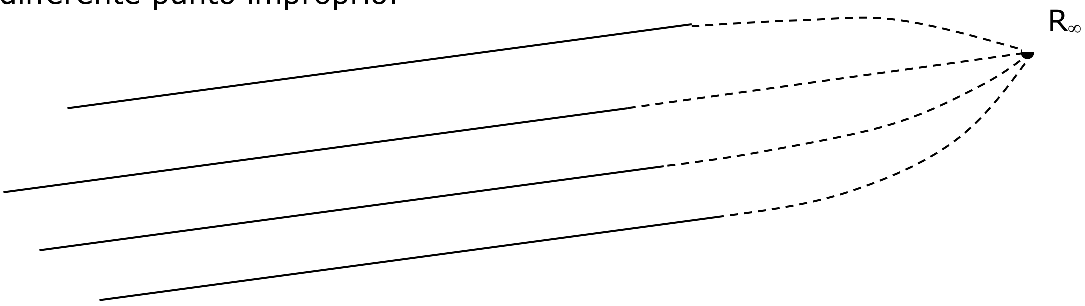


Figura 1.5
Punto improprio di un fascio
di rette parallele.

L'insieme di tutti i punti impropri di un piano è una retta, detta **retta impropria**.
Dato un piano Π e la sua retta impropria r_∞ è detto **piano proiettivo** l'insieme $\Pi \cup r_\infty$.

2 – Direzioni delle rette e punti all'infinito

2.1 Direzioni delle rette, piano affine e piano proiettivo

Il piano di riferimento è detto **piano affine**, e viene indicato con $\mathbb{A}$. Il piano affine contiene punti e rette, detti **punti e rette affini**. Ogni retta del piano $\mathbb{A}$ definisce una **direzione**. Si dice che rette parallele hanno la stessa direzione.
Siano r ed s due rette che hanno rispettivamente punti all'infinito R_∞ ed S_∞. Le due rette sono parallele se e solo se $R_\infty=S_\infty$.
Una retta t non parallela a r (o ad s) ha un differente punto all'infinito T_∞.
L'insieme dei punti all'infinito di tutte le rette di $\mathbb{A}$ è detta **retta impropria**, ed è indicata con r_∞.
Si definisce **piano proiettivo** l'insieme $\mathbb{P}=\mathbb{A}\cup r_\infty$.
I punti del piano proiettivo sono sia i punti del piano affine che quelli della retta impropria.
Il piano affine e la retta impropria sono due insiemi disgiunti, ossia $\mathbb{A}\cap r_\infty=\varnothing$.
Il piano proiettivo è unione di due insiemi disgiunti, $\mathbb{A}$ e r_∞, quindi $\mathbb{P}-\mathbb{A}=r_\infty$ e $\mathbb{P}-r_\infty=\mathbb{A}$.
Data una retta r e il suo punto all'infinito R_∞ si dice **chiusura proiettiva** di r l'insieme $\bar{r} = r\cup\{R_\infty\}$. Il punto R_∞ non appartiene alla retta r, quindi la retta e l'insieme formato dal suo punto improprio sono insiemi disgiunti, ossia $r\cap\{R_\infty\}=\varnothing$.
Essendo la chiusura proiettiva di una retta unione di due insiemi disgiunti r e R_∞ valgono $\bar{r}-r=\{R_\infty\}$ e $\bar{r}-\{R_\infty\}=r$.
La chiusura proiettiva di una retta affine r è detta **retta proiettiva**.

2.2 Fasci di rette

In geometria euclidea è necessario distinguere tra fascio proprio e improprio: un **fascio proprio** di rette è l'insieme di tutte le rette passanti per un punto, un **fascio improprio** di rette è l'insieme di tutte le rette parallele a una retta data.

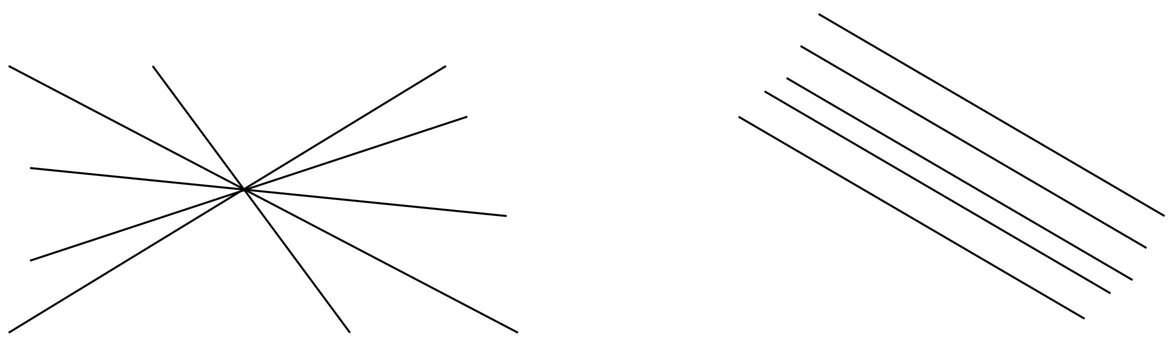


Figura 2.1
Fascio proprio e improprio nel piano affine.

Nel piano proiettivo un fascio proprio è l'insieme delle rette passanti per un punto affine, un fascio improprio è l'insieme delle rette passanti per un punto all'infinito.
Nel piano proiettivo non è necessario distinguere tra punti affini e all'infinito.
Si può dire che un **fascio di rette** nel piano proiettivo è l'insieme di tutte le rette passanti per un punto.
Quando ci si riferisce al piano proiettivo non è dunque più necessario distinguere tra fascio proprio e improprio come se fossero due oggetti totalmente differenti.

2.3 Retta per due punti

E' noto dalla geometria euclidea che per due punti distinti del piano passa una sola retta. Ciò continua ad essere vero nel piano proiettivo. Per dimostrarlo esaminiamo i tre casi che possono verificarsi.

Primo caso: retta per due punti affini.
Il piano affine altro non è che il piano euclideo, quindi è ovvio che per due punti affini passa una sola retta.

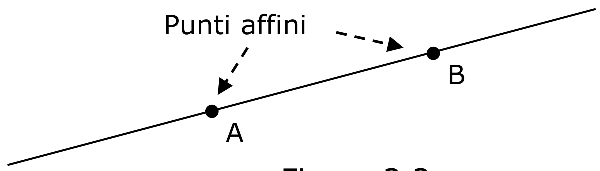


Figura 2.2
Retta per due punti affini.

Secondo caso: retta per due punti, di cui uno affine e uno all'infinito.
Un punto all'infinito è il punto verso cui converge un fascio di rette parallele. Lo si può immaginare come la direzione del fascio di rette parallele. La retta passante per un punto affine e un punto all'infinito è la retta passante per il punto affine avente la direzione indicata dal punto all'infinito.
Graficamente un punto all'infinito può essere indicato come direzione di una retta, come mostrato nella figura seguente.

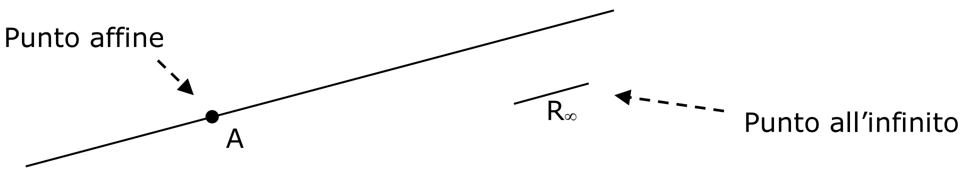


Figura 2.3
Retta per due punti, di cui uno
affine e uno all'infinito.

Terzo caso: retta per due punti impropri.
La retta impropria è l'insieme cui appartengono tutti i punti impropri. Quindi per due punti impropri passa una sola retta, che è la retta impropria r_∞.

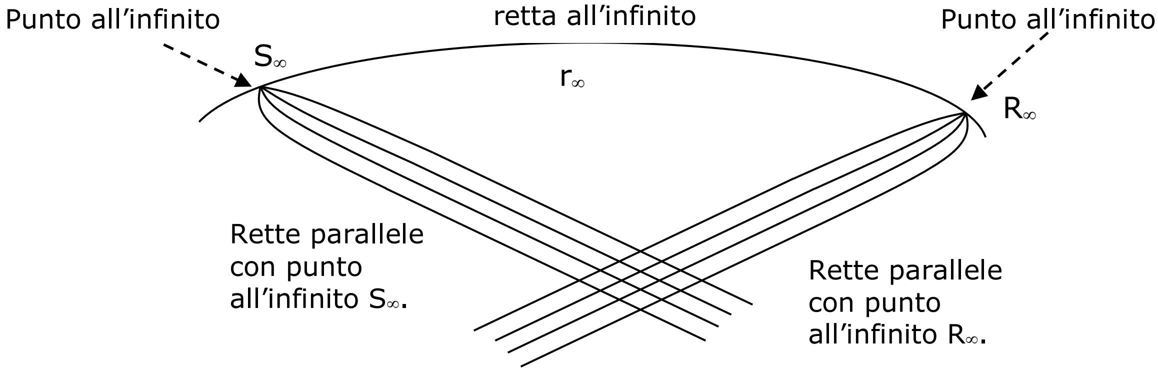


Figura 2.4
Retta per due punti impropri.

2.4 Intersezione di due rette

Nel piano proiettivo vale la seguente proprietà: due rette distinte hanno un unico punto in comune.
Tale proprietà non è vera nel piano euclideo, in quanto si deve aggiungere tra le ipotesi la condizione che le due rette non devono essere parallele.
Per dimostrare tale proprietà esaminiamo i tre casi che possono verificarsi.

Primo caso: intersezione tra due rette non parallele, di cui nessuna delle due è la retta all'infinito.
Considerando che nel piano affine valgono le proprietà della geometria euclidea è ovvio che due rette non parallele hanno un punto in comune.

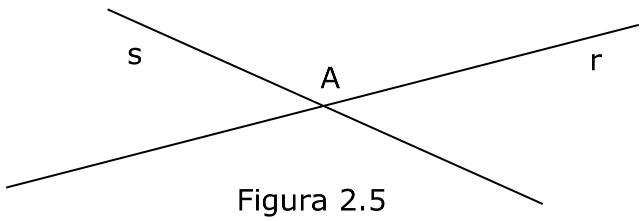


Figura 2.5
Intersezione tra due rette affini non parallele.

Secondo caso: intersezione tra due rette parallele.
Nel piano proiettivo due rette parallele hanno in comune il punto all'infinito.

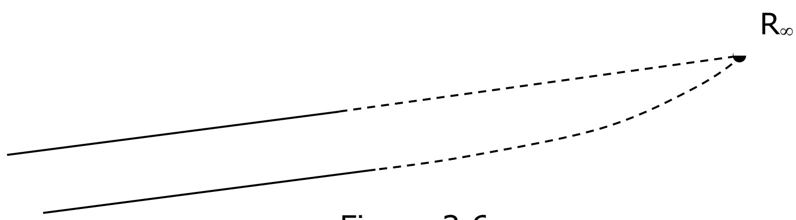


Figura 2.6
Inersezione di due rette parallele.

Terzo caso: intersezione tra una retta proiettiva e la retta all'infinito.
La retta proiettiva è composta dalla retta affine e da un punto all'infinito. Il punto all'infinito appartiene anche alla retta all'infinito. Quindi le due rette hanno in comune il punto all'infinito della retta affine.

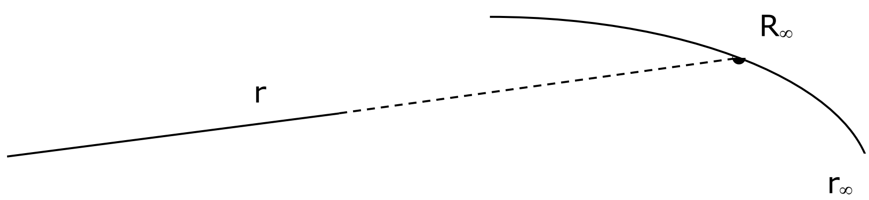


Figura 2.7
Intersezione di una retta proiettiva e della retta all'infinito.

3 – Coordinate proiettive

3.1 Coordinate omogenee

Si deve introdurre un sistema di coordinate adatto a rappresentare tutti i punti, sia propri che impropri, del piano proiettivo. Tali coordinate sono dette coordinate omogenee, e si basano sulle coordinate cartesiane utilizzate in geometria analitica.
Un punto non è indicato con due coordinate (x,y) come nel piano affine, ma con tre coordinate (x_0,x_1,x_2).
D'ora in poi si chiameranno **coordinate affini** le coordinate (x,y) di un punto affine, e si chiameranno **coordinate omogenee** le coordinate

$$(x_0,x_1,x_2) \tag{3.1}$$

di un punto proiettivo proprio o improprio.

Ad ogni punto in coordinate affini corrisponde un punto (proprio) in coordinate omogenee.
Ad ogni retta del piano affine corrisponde un punto (improprio) in coordinate omogenee.
Si vuole definire una corrispondenza tra le coordinate omogenee del piano proiettivo e coordinate affini e direzioni delle rette del piano affine.

PIANO PROIETTIVO	PIANO AFFINE
Punto proprio in coordinate omogenee.	Punto in coordinate affini.
Punto improprio in coordinate omogenee.	Fascio di rette parallele.

Primo caso: punto proprio.
Dato il punto proprio, di coordinate omogenee (x_0,x_1,x_2) si pone:

$$\frac{x_1}{x_0} = x \ \text{ e } \ \frac{x_2}{x_0} = y \ \text{ in cui } x_0 \neq 0. \tag{3.2}$$

Secondo caso: punto improprio.
Dato un punto improprio (x_0,x_1,x_2), esso è definito dalla direzione della retta $ax+by+c=0$. Allora deve risultare:

$$x_0=0,\ x_1=b,\ x_2=-a. \tag{3.3}$$

3.2 Passaggio da coordinate affini a coordinate proiettive

Primo caso: punto affine → punto proprio in coordinate omogenee.
I punti (x,y) del piano affine hanno, in base alla (3.2), coordinate proiettive (x_0,x_1,x_2).
Per determinarle c'è la libertà di assegnare a x_0 un qualsiasi valore k diverso da zero.
Dalla (3.2) segue $x_1=x\cdot x_0$, $x_2=y\cdot x_0$ con $x_0\neq0$. Ponendo $x_0=k\neq0$ si ricava che il punto (x,y) in coordinate affini ha coordinate proiettive $(k,x_1,x_2)= (k,kx,ky)$.

$$(x,y) \rightarrow (k,kx,ky)\ \ k\neq0 \tag{3.4}$$

Esempio 3.2.1
Dato il punto del piano affine (2,-3) trovarne le coordinate proiettive.
Ci sono infiniti modi di scegliere x_0 affinchè valga la (3.2). Ponendo $x_0=k=1$ si ottiene il punto (1,2,-3), e questo è il modo usuale di trovare le coordinate proiettive di un punto affine. E' però possibile porre x_0 uguale ad un altro numero diverso da zero, per esempio $x_0=3$, trovando le coordinate proiettive (3,6,-9). Lo

stesso punto (2,-3) del piano affine ha dunque infinite rappresentazioni in coordinate proiettive (3.1).

Secondo caso: retta del piano affine $\rightarrow$ punto improprio in coord. omogenee.
I punti impropri del piano proiettivo sono determinati dalla direzione di una retta. Data una retta ax+by+c=0 il suo punto improprio è, per la (3.3), (0,+b,-a).

$$ax+by+c=0 \rightarrow (0,+b,-a) \tag{3.5}$$

Esempio 3.2.2
Data la retta 3x-2y+1=0 trovare le coordinate proiettive del suo punto improprio.
Per la (3.5) il punto improprio ha coordinate (0,-2,-3), e questo è il modo usuale di trovare le coordinate proiettive di un punto improprio.
Si è visto in geometria analitica che ogni retta può essere rappresentata in infiniti modi, moltiplicandone i coefficienti per uno stesso numero diverso da zero. Per esempio, moltiplicando tutti i coefficienti della retta 3x-2y+2=0 per 2 si ottiene l'equazione
6x-4y+2=0 che rappresenta la stessa retta. Il punto improprio avrà quindi anche coordinate proiettive (0,-4,-6). Un punto improprio ha quindi infinite rappresentazioni in coordinate proiettive.

3.3 Osservazione

In base a quanto visto finora le infinite coordinate proiettive di un punto proiettivo, sia proprio che improprio, non sono definite in modo univoco, ma a meno di un fattore diverso da zero. Quindi, dato $\lambda \neq 0$ le coordinate (x_0,x_1,x_2) e $(\lambda x_0,\lambda x_1,\lambda x_2)$ rappresentano lo stesso punto.

3.4 Osservazione

L'unico punto del piano affine con coordinate affini (0,0) è l'origine. Le sue coordinate proiettive sono (1,0,0).
Ogni retta definisce un punto sulla retta impropria, e una retta ha equazione ax+by+c=0 con almeno uno tra a e b diverso da zero. Quindi in coordinate proiettive il punto improprio avrà coordinate (0,b,-a) con almeno uno tra a e b diverso da zero.
Si può concludere che nessun punto ha coordinate omogenee (0,0,0).

3.5 Passaggio da coordinate proiettive a coordinate affini

I punti del piano proiettivo sono propri e impropri.
Ai punti propri corrispondono punti affini, ai punti impropri corrispondono fasci di rette parallele.

Primo caso: punto proprio in coordinate omogenee $\rightarrow$ punto in coordinate affini.
Se la coordinata x_0 del punto in coordinate omogenee è diversa da zero allora il punto è proprio. Per la (3.2) si ha:

$$(x_0,x_1,x_2) \rightarrow (x,y)=\left(\frac{x_1}{x_0},\frac{x_2}{x_0}\right) \tag{3.6}$$

Esempio 3.5.1
Dato il punto proiettivo proprio (3,6,-4) trovarne le coordinate affini.
Il punto (3,6,-4) è proprio perché $x_0 \neq 0$.

Per la (3.2) $x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{6}{3} = 2$ e $y = \frac{x_2}{x_0} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$.

Il punto (3,6,-4) ha coordinate affini $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

Secondo caso: punto improprio in coord. omogenee → retta del piano affine.

Se la coordinata x_0 del punto in coordinate omogenee è uguale a zero allora il punto è improprio. Al punto $(0,x_1,x_2)$ corrisponde, per la (3.3) corrisponde la retta ax+by+c=0 con $a=-x_2$, $b=x_1$. Al variare di $c\in\mathbb{R}$ si ottiene un fascio di rette parallele.

$$(0,x_1,x_2) \rightarrow ax+by+c=0,\ a=-x_2,\ b=x_1 \tag{3.7}$$

Esempio 3.5.2

Dato il punto proiettivo improprio (0,-3,1) trovare una retta affine che abbia tale punto come punto all'infinito.

Il punto (0,-3,1) è improprio perché $x_0=0$.

Si hanno $x_1=-3$, $x_2=1$. Per la (3.3) b=-3, a=-1. La retta richiesta è dunque ax+by+c=0, in cui c può assumere qualunque valore. Infatti al variare di c si ottengono le infinite rette parallele che hanno (0,-3,1) come punto improprio.

Ponendo, ad esempio, c=2 si ottiene la retta affine –x-3y+2=0.

3.6 Rappresentazione grafica di punti proiettivi

Primo caso: $x_0\neq 0$.

In questo caso il punto proiettivo è un punto proprio. Lo si trasforma in coordinate affini utilizzando la (3.6) e lo si rappresenta graficamente sul piano cartesiano.

Secondo caso: $x_0=0$.

In questo caso il punto proiettivo è un punto improprio, e per rappresentarlo si deve rappresentare sul piano una retta che abbia la direzione specificata dal punto improprio.

E' comodo utilizzare il metodo seguente:

si ignora la prima coordinata omogenea e si ottiene un punto in coordinate affini. Si traccia la retta passante per tale punto e per l'origine e si ottiene una retta che ha come direzione tale punto improprio. Le infinite rette parallele ad essa hanno lo stesso punto improprio; si ottengono, come visto precedentemente, al variare di $c\in\mathbb{R}$.

Esempio 3.6.1

Utilizzando la (3.6) il punto A(2,-4,3) in coordinate omogenee corrisponde al punto $A\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ in coordinate affini. Analogamente il punto B(1,3,-4) in coordinate omogenee corrisponde al punto B(3,-4) in coordinate affini.

Tale esempio è rappresentato in figura 3.1.

Esempio 3.6.2

Dato il punto proiettivo C(0,-4,3) in coordinate omogenee si trova il punto C'(-4, 3) in coordinate affini.

Si traccia la retta passante per l'origine e C'.

Tale retta ha come direzione il punto proiettivo C(0,-4,3).

Dato il punto proiettivo D(0,1,1) in coordinate omogenee si trova il punto D'(1,1) in coordinate affini.

Si traccia la retta passante per l'origine e D'.

Tale retta ha come direzione il punto improprio D(0,1,1).

Tale esempio è rappresentato in figura 3.2.

Si può verificare che tale metodo rispetta la regola (3.3).

Infatti si consideri la retta passante per il punto proprio di coordinate affini (β,α) e per l'origine. Tale retta, per le note formule di geometria analitica, ha equazione $\alpha x-\beta y=0$. Per la (3.3) il punto improprio di tale retta è proprio (0,β,α).

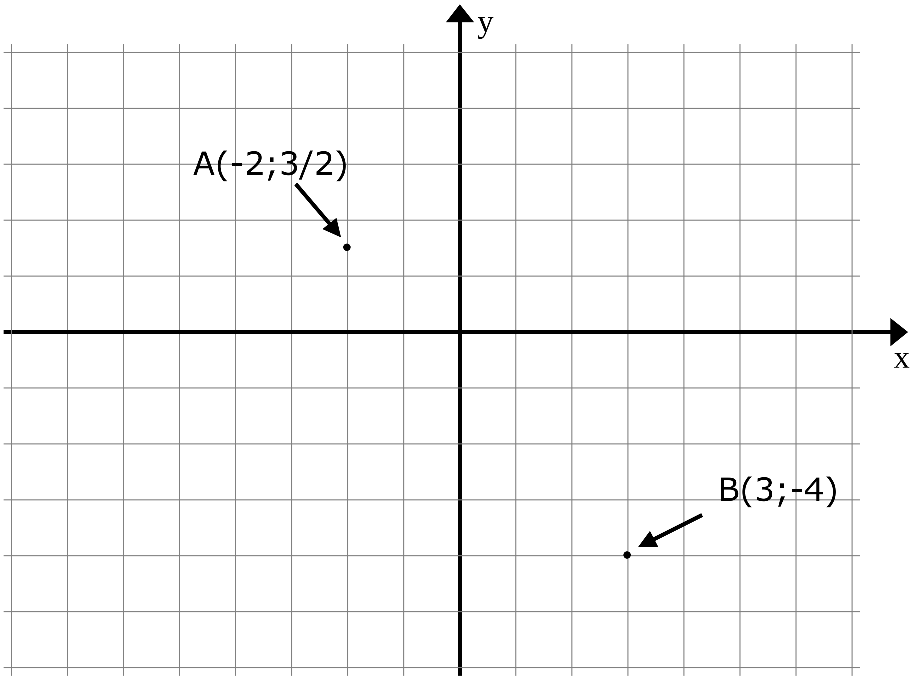


Figura 3.1
Rappresentazione grafica di punti proiettivi
nel caso $x_0 \neq 0$.

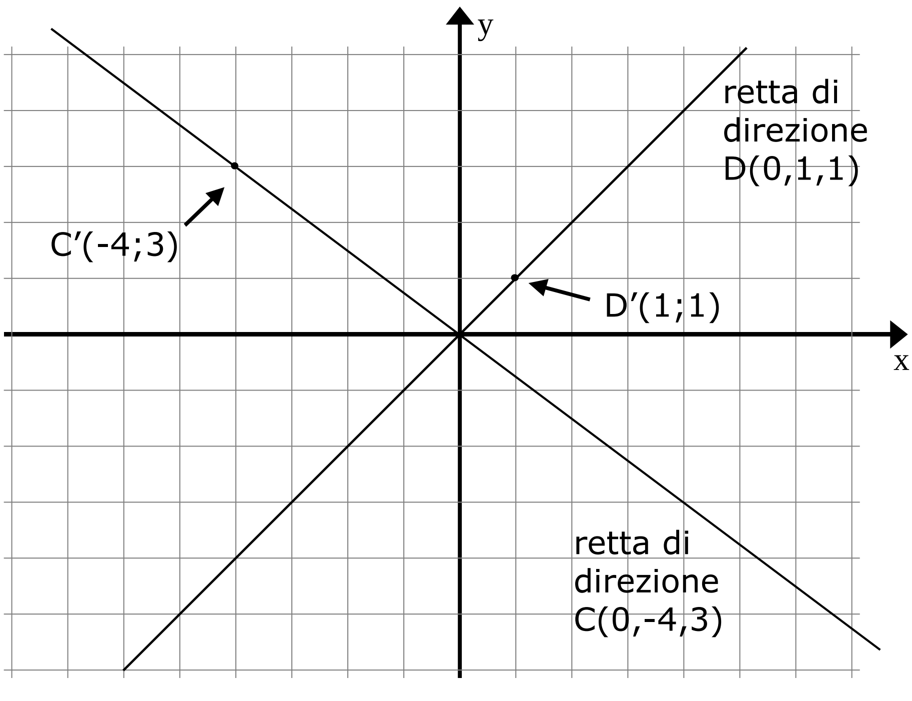


Figura 3.2
Rappresentazione grafica di punti proiettivi
nel caso $x_0=0$.

3.7 Equazione di rette proiettive

Nel piano proiettivo dotato di coordinate omogenee (x_0,x_1,x_2) l'equazione di una retta proiettiva è $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$.
I numeri a_0, a_1, a_2 non sono mai tutti nulli.
La retta, nella forma $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$, è detta in **coordinate omogenee**. Si utilizza il termine **omogenee** perchè, a differenza delle rette affini $ax+by+c=0$ in cui c'è un termine di grado zero, le rette proiettive hanno tutti i termini omogenei di grado 1.

Teorema: tutte le rette del piano proiettivo hanno equazione $\mathbf{a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0}$.

Dim.
Primo caso: la retta considerata è la retta impropria r_∞.
Tutti i punti di r_∞ hanno la coordinata $x_0=0$, in quanto punti impropri.
Quindi l'equazione di r_∞ è $x_0=0$.
Ciò ricade nell'equazione generica di retta proiettiva con $a_0=1$ e $a_1=a_2=0$.
Secondo caso: la retta considerata è una retta propria r.
L'equazione di r in coordinate affini è $ax+by+c=0$.
Utilizzando le (3.2) si ottiene $a\frac{x_1}{x_0}+b\frac{x_2}{x_0}+c=0$.
Si moltiplica per x_0 tale equazione. Ciò è permesso perché nei punti propri $x_0\neq 0$.
Si ottiene $ax_1+bx_2+cx_0=0$.
Tale equazione è della forma $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ con $a=a_1$, $b=a_2$, $c=a_0$.

Esempio 3.7.1
Scrivere la retta impropria in coordinate omogenee.
La retta impropria ha equazione $x_0=0$.

Esempio 3.7.2
Scrivere una retta propria in coordinate omogenee.
La retta propria $2x-3y+5=0$, utilizzando le (3.2) e moltiplicando per x_0, diventa $2x_1-3x_2+5x_0=0$.

Esempio 3.7.3
Scrivere in coordinate affini la retta impropria.
La retta $x_0=0$ non può essere espressa in coordinate affini.

Esempio 3.7.4
Scrivere in coordinate affini una retta propria data in coordinate omogenee.
Sia r: $2x_0+3x_1-x_2=0$ la retta in coordinate omogenee. Si utilizzano le (3.2) ponendo, per semplicità di calcolo, $x_0=1$. Si effettua la sostituzione $x_0=1$, $x_1=x$, $x_2=y$ e si ottiene la retta $3x-y+2=0$.
Si noti che ponendo $x_0=2$ si ottiene $x_1=x\cdot x_0=x\cdot 2$ e $x_2=y\cdot x_0=y\cdot 2$.
r: $2x_0+3x_1-x_2=0$
$2\cdot 2+3\cdot 2\cdot x-2\cdot y=0$
$6x-2y-4=0$
Le equazioni trovate al variare di x_0 rappresentano la stessa retta.

3.8 Assi in coordinate omogenee

L'asse x, di equazione $y=0$, in coordinate omogenee ha equazione $x_2=0$.
L'asse y, di equazione $x=0$, in coordinate omogenee ha equazione $x_1=0$.
La retta impropria ha equazione $x_0=0$.
Il punto di intersezione degli assi x e y ha coordinate omogenee $(1,0,0)$.

Il punto di intersezione dell'asse x e della retta impropria ha coordinate omogenee (0,1,0).
Il punto di intersezione dell'asse y e della retta impropria ha coordinate omogenee (0,0,1).

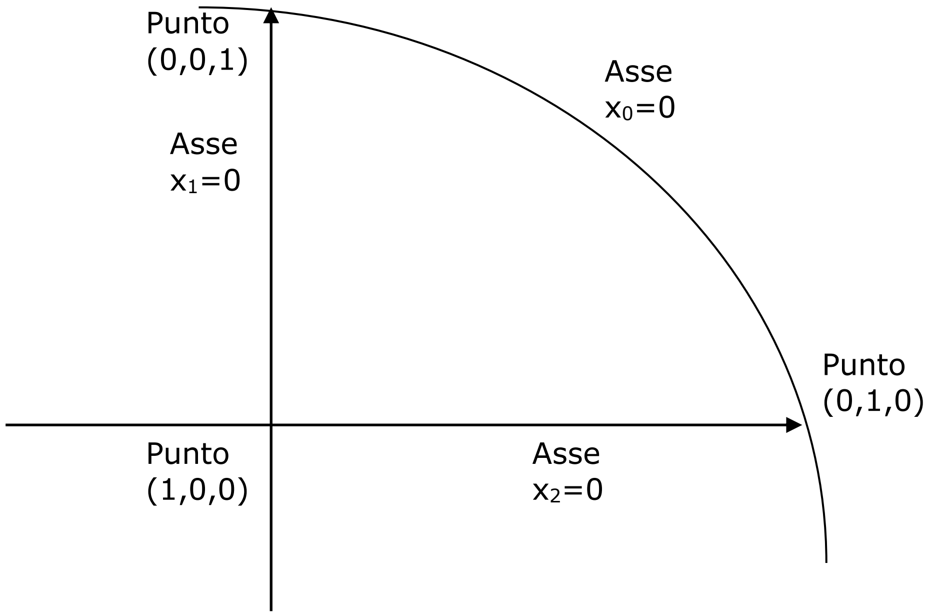


Figura 3.3
Gli assi e le loro intersezioni.

3.9 Retta per due punti

Nel paragrafo 2.3 si è visto che esiste un'unica retta passante per due punti proiettivi distinti. In questo paragrafo si vuole mostrare come trovare l'equazione omogenea di una retta dati due suoi punti in coordinate omogenee.

Primo caso: retta per due punti propri.
Dati due punti propri in coordinate proiettive $A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ e $B(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ si portano in coordinate affini utilizzando la (3.6).

$A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=A\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1},\frac{\beta_1}{\alpha_1},\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)=A\left(1,\frac{\beta_1}{\alpha_1},\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)$ che in coordinate affini è $A\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1},\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)$.

$B(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=B\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2},\frac{\beta_2}{\alpha_2},\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)=B\left(1,\frac{\beta_2}{\alpha_2},\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)$ che in coordinate affini è $B\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2},\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)$.

Si trova la retta passante per tali punti con le note formule di geometria analitica, ottenendo un'equazione del tipo $ax+by+c=0$. Si omogeneizza utilizzando le (3.2), e si ottiene l'equazione $ax_1+bx_2+cx_0=0$ che rappresenta la retta in coordinate omogenee.

Secondo caso: retta per due punti di cui uno proprio e uno improprio.
Il problema è analogo alla retta passante per un punto parallela a una retta data.
Siano dati il punto proprio in coordinate proiettive $A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ e il punto all'infinito $B(0,\alpha_2,\beta_2)$.
Si trasforma il punto $A(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ in coordinate affini utilizzando la (3.2) ottenendo $A\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1},\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)$.
Dato $B(0,\alpha_2,\beta_2)$ improprio si considera il punto proprio $B'(\alpha_2,\beta_2)$.
Si trova, con le note formule di geometria analitica, la retta r passante per $B'(\alpha_2,\beta_2)$ e per l'origine.
Si trova, con le formule di geometria analitica, la retta passante per A e parallela a r, e la si omogeneizza.

Terzo caso: retta per due punti all'infinito.
La retta passante per due punti all'infinito è la retta $x_0=0$.

Esempio 3.9.1
Trovare la retta passante per i due punti propri A e B di coordinate omogenee A(1,2,0) e B(2,-4,3).
Svolgimento:
A(1,2,0) ha la prima coordinata uguale a 1. Tale punto ha coordinate affini A(2,0).
B(2,-4,3) ha la prima coordinata uguale a 2. Si dividono tutte le coordinate di B per 2 e si ottiene B(1,-2,3/2). Ciò è permesso per l'osservazione 3.3.
Il punto B ha coordinate affini $B\left(-2,\frac{3}{2}\right)$

Si scrive la retta passante per i punti, in coordinate affini, A(2,0) e $B\left(-2,\frac{3}{2}\right)$.

$$\frac{(y-0)}{\left(\frac{3}{2}-0\right)}=\frac{(x-2)}{(-2-2)}$$

$$\frac{y}{\frac{3}{2}}=\frac{x-2}{-4}$$

$$\frac{2}{3}y=\frac{x-2}{-4}$$

$$\frac{-8y}{12}=\frac{-3x+6}{12}$$

$$3x+8y-6=0$$

Infine si omogeneizza: $-6x_0+3x_1+8x_2=0$.

Esempio 3.9.2
Trovare la retta passante per A(1,-2,3) proprio e B(0,2,1) improprio.
Svolgimento:
A(1,-2,3) ha la prima coordinata uguale a 1. Tale punto ha coordinate affini A(-2,3).
Il punto improprio corrisponde alla direzione della retta r passante per l'origine e il punto (2,1) in coordinate affini.

$$\frac{(y-0)}{(1-0)}=\frac{(x-0)}{(2-0)}$$

$$\frac{y}{1}=\frac{x}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}x$$

Si scrive la retta passante per A(-2,3) parallela alla retta r: $y=\frac{1}{2}x$.

$$y-3=\frac{1}{2}(x+2)$$

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

$$4+\frac{1}{2}x-y=0$$

$$8+x-2y=0$$

Si omogeneizza e si trova: $8x_0+x_1-2x_2=0$.

Esempio 3.9.3
Trovare la retta passante per i due punti impropri A(0,3,-1) e B(0,-2,0).

Svolgimento: La retta passante per due punti impropri qualsiasi è la retta impropria $x_0=0$.

3.10 Parallelismo di rette

Siano date le rette $ax_0+bx_1+cx_2=0$ e $a'x_0+b'x_1+c'x_2=0$ in coordinate omogenee.
Le loro equazioni in coordinate affini sono $a+bx+cy=0$ e $a'+b'x+c'y=0$, in forma esplicita $y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$ e $y=-\frac{b'}{c'}x-\frac{a'}{c'}$.
Le due rette sono parallele se sono uguali i loro coefficienti angolari, ossia se $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$.
Se solo uno tra c e c' è uguale a zero allora una retta è verticale e una non lo è, quindi non sono parallele.
Se $c=c'=0$ allora entrambe le rette sono verticali e dunque sono parallele. Valgono quindi le seguenti condizioni di parallelismo.

Condizioni di parallelismo
Se $c=c'=0$ le rette sono parallele.
Se $c=0$ e $c'\neq 0$ (o viceversa) le rette non sono parallele. (3.8)
Se $c\neq 0$ e $c'\neq 0$ le rette sono parallele se $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$.

3.11 Ortogonalità di rette

Siano date le rette r: $ax_0+bx_1+cx_2=0$ e s: $a'x_0+b'x_1+c'x_2=0$ in coordinate omogenee.
I loro punti impropri, per la (3.5), sono rispettivamente $P_\infty\ (0,c,-b)$ e $Q_\infty\ (0,c',-b')$.
Come noto due rette oblique sono ortogonali se i loro coefficienti angolari sono uno inverso e opposto dell'altro, ossia se $m_1=-\frac{1}{m_2}$. Le rette r ed s hanno coefficienti angolari $m_1=-\frac{b}{c}$ e $m_2=-\frac{b'}{c'}$, quindi sono ortogonali se $-\frac{b}{c}=\frac{c'}{b'}$, ossia se $b\cdot b'+c\cdot c'=0$.
Non è possibile utilizzare $-\frac{b}{c}=\frac{c'}{b'}$ come condizione di ortogonalità per le rette orizzontali e verticali, in quanto uno tra c e b' potrebbe essere zero.
La retta r è verticale per $c=0$, la retta s è orizzontale per $b'=0$. Per tali rette vale comunque la condizione $b\cdot b'+c\cdot c'=0$.
Si può dunque concludere che due rette r: $ax_0+bx_1+cx_2=0$ e s: $a'x_0+b'x_1+c'x_2=0$ sono ortogonali se vale la **condizione di ortogonalità**:

$$b\cdot b'+c\cdot c'=0 \qquad (3.9)$$

3.12 Intersezione di due rette

Si è visto nel paragrafo 2.4 che due rette proiettive distinte hanno un unico punto in comune.
Per trovarlo si risolve il sistema di equazioni formato dalle due rette.
Le coordinate omogenee sono tre, mentre le equazioni sono due, per cui c'è la libertà di fissare una delle coordinate che, nella risoluzione del sistema, risultano indeterminate.
Si possono verificare tre casi:

Primo caso: le due rette non sono parallele e nessuna delle due è la retta all'infinito.
In questo caso il punto di intersezione è proprio e si pone $x_0=\lambda$. Per comodità di calcolo abitualmente si pone $x_0=1$.

Secondo caso: le due rette sono parallele.
In questo caso il punto di intersezione è improprio e risulta $x_0=0$. C'è la libertà di fissare una tra x_1 e x_2 e ricavare l'altra.

Terzo caso: una delle due rette è la retta impropria.
In questo caso il punto di intersezione è improprio e risulta $x_0=0$. C'è la libertà di fissare una tra x_1 e x_2 e ricavare l'altra.

Esempio 3.12.1
Trovare il punto di intersezione delle rette $2x_0+3x_1-x_2=0$ e $x_0-x_1-2x_2=0$.

$$\begin{cases} 2x_0+3x_1-x_2=0 \\ x_0-x_1-2x_2=0 \end{cases}$$

Per le condizioni di parallelismo (3.8) le due rette non sono parallele, in quanto $\frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{-2}$.

Il punto di intersezione è proprio. Per comodità di calcolo si fissa $x_0=1$.

$$\begin{cases} 2+3x_1-x_2=0 \\ 1-x_1-2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=2+3x_1 \\ 1-x_1-2(2+3x_1)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=2+3x_1 \\ 1-x_1-4-6x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=2+3x_1 \\ -7x_1=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=2+3\left(-\frac{3}{7}\right)=2-\frac{9}{7}=\frac{14-9}{7}=\frac{5}{7} \\ x_1=-\frac{3}{7} \end{cases}$$

Il punto d'intersezione è $\left(1,-\frac{3}{7},\frac{5}{7}\right)$.

Esempio 3.12.2
Trovare il punto di intersezione delle rette $2x_0+3x_1-x_2=0$ e $3x_0-6x_1+2x_2=0$.

$$\begin{cases} 2x_0+3x_1-x_2=0 \\ 3x_0-6x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

Per le condizioni di parallelismo (3.8) le due rette sono parallele in quanto $\frac{3}{-1}=\frac{-6}{2}$.

Il punto di intersezione è improprio, quindi si fissa $x_0=0$.

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=0 \\ 6x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

$$x_2=3x_1$$

C'è la libertà di fissare una delle due variabili. Si fissa $x_1=1$ da cui $x_2=3$.
Il punto d'intersezione è (0,1,3).

Esempio 3.12.3
Trovare il punto di intersezione delle rette $x_0=0$ e $3x_0+4x_1+2x_2=0$.
$x_0=0$ è la retta impropria, quindi il punto di intersezione sarà improprio.

$$\begin{cases} x_0=0 \\ 3x_0+4x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ +4x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ 2x_2=-4x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_2=-2x_1 \end{cases}$$

C'è la libertà di fissare una delle due variabili. Si fissa $x_1=1$, da cui $x_2=-2$.
Il punto d'intersezione è (0,1,-2).

4 – Coniche e punti all'infinito

4.1 Introduzione

In questo capitolo si vuole mostrare come le coordinate omogenee possano essere utilizzate anche per lo studio delle coniche.
In questo capitolo non si tratterà il caso di una conica degenere, la definizione e la classificazione di coniche degeneri sarà trattata nei capitoli successivi.
Si considereranno in questo capitolo solo coniche non degeneri.
L'idea è quella di omogeneizzare l'equazione di una conica e intersecarla con la retta impropria, in modo da trovare i punti all'infinito della conica stessa.
Si vedrà che le coniche possono essere distinte a seconda del numero dei punti all'infinito che presentano.

4.2 Equazione generale di una conica

Si chiama **conica** una curva rappresentata da un'equazione di secondo grado in 2 variabili:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (4.1)$$

Tale equazione è detta **equazione generale di una conica**.

Sono note dalla geometria analitica le equazioni delle coniche seguenti, che verranno ora indicate come **equazioni affini** delle coniche:

CIRCONFERENZA	$x^2+y^2+ax+by+c=0$	(4.2)
PARABOLA	$y=ax^2+bx+c$	(4.3)
ELLISSE	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(4.4)
IPERBOLE	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	(4.5)

Tutte le circonferenze del piano possono essere descritte con l'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
Non tutte le parabole possono essere descritte dall'equazione $y=ax^2+bx+c$. Tale equazione infatti rappresenta solamente le parabole con asse di simmetria verticale. Per rappresentare le parabole con asse di simmetria non verticale si deve utilizzare l'equazione generale di una conica (4.1).
Analogamente le equazioni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ non rappresentano tutte le ellissi o iperboli, ma solo quelle aventi come assi di simmetria gli assi $x=0$ e $y=0$. Per rappresentare le ellissi e le iperboli con assi di simmetria differenti da $x=0$ e $y=0$ si deve utilizzare l'equazione generale di una conica $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

4.3 Omogeneizzazione dell'equazione di una conica

Per studiare una conica in geometria proiettiva si utilizza il cambio di coordinate (3.2), ottenendo equazioni omogenee di grado 2. Tale procedimento è detto di **omogeneizzazione**.
Le equazioni che si ottengono sono dette **equazioni proiettive** delle coniche. L'**equazione generale di una conica proiettiva** si ottiene a partire dalla conica (4.1)

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

con la sostituzione (3.2):

$$\frac{x_1}{x_0}=x \text{ e } \frac{x_2}{x_0}=y \text{ in cui } x_0 \neq 0$$

$$a\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2+b\left(\frac{x_1}{x_0}\right)\left(\frac{x_2}{x_0}\right)+c\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2+d\left(\frac{x_1}{x_0}\right)+e\left(\frac{x_2}{x_0}\right)+f=0$$

$$a\frac{x_1^2}{x_0^2}+b\frac{x_1x_2}{x_0^2}+c\frac{x_2^2}{x_0^2}+d\frac{x_1}{x_0}+e\frac{x_2}{x_0}+f=0$$

$$\frac{ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_0x_1+ex_0x_2+fx_0^2}{x_0^2}=0$$

$$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_0x_1+ex_0x_2+fx_0^2=0$$

Come esempi si mostrano i procedimenti di omogeneizzazione riferiti a circonferenza, parabola, ellisse e iperbole.
Per far questo si utilizzerà la sostituzione (3.2) nelle equazioni (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) già viste in geometria analitica.

CIRCONFERENZA

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Si sostituisce utilizzando le (3.2).

$$\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2+a\frac{x_1}{x_0}+b\frac{x_2}{x_0}+c=0$$

$$\frac{x_1^2}{x_0^2}+\frac{x_2^2}{x_0^2}+a\frac{x_1}{x_0}+b\frac{x_2}{x_0}+c=0$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+ax_0x_1+bx_0x_2+cx_0^2}{x_0^2}=0$$

L'equazione omogeneizzata è:

$$x_1^2+x_2^2+ax_1x_0+bx_2x_0+cx_0^2=0$$

PARABOLA

$$y=ax^2+bx+c$$

Si sostituisce utilizzando le (3.2).

$$\frac{x_2}{x_0}=a\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2+b\frac{x_1}{x_0}+c$$

$$\frac{x_2}{x_0}=a\frac{x_1^2}{x_0^2}+b\frac{x_1}{x_0}+c$$

$$\frac{x_2x_0=ax_1^2+bx_1x_0+cx_0^2}{x_0}$$

L'equazione omogeneizzata è:

$$x_0x_2=ax_1^2+bx_1x_0+cx_0^2$$

ELLISSE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si sostituisce utilizzando le (3.2).

$$\frac{x_1^2}{x_0^2a^2}+\frac{x_2^2}{x_0^2b^2}=1$$

$$\frac{b^2x_1^2+a^2x_2^2}{x_0^2a^2b^2}=\frac{x_0^2a^2b^2}{x_0^2a^2b^2}$$

L'equazione omogeneizzata è:

$$b^2x_1^2+a^2x_2^2-x_0^2a^2b^2=0$$

IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si sostituisce utilizzando le (3.2).

$$\frac{x_1^2}{x_0^2a^2}-\frac{x_2^2}{x_0^2b^2}=1$$

$$\frac{b^2x_1^2-a^2x_2^2}{x_0^2a^2b^2}=\frac{x_0^2a^2b^2}{x_0^2a^2b^2}$$

L'equazione omogeneizzata è:

$$b^2x_1^2-a^2x_2^2-x_0^2a^2b^2=0$$

4.4 I punti impropri delle coniche

I punti impropri di una conica sono i punti in cui la conica proiettiva interseca la retta all'infinito. Per trovarli si risolve il sistema tra l'equazione omogeneizzata della conica e la retta impropria $x_0=0$.

4.5 I punti impropri della circonferenza

Si risolve il sistema tra l'equazione omogeneizzata della circonferenza e la retta impropria.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_0 + bx_2x_0 + cx_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione del sistema è:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione risulta essere (0,0,0), ma per l'osservazione 3.4 non ci sono punti di coordinate proiettive (0,0,0). Se ne conclude che la circonferenza non interseca la retta impropria. Dunque tutti i punti della circonferenza sono propri.

4.6 I punti impropri della parabola

Si risolve il sistema tra l'equazione omogeneizzata della parabola e la retta impropria.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0x_2 = ax_1^2 + bx_1x_0 + cx_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 0 = ax_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

C'è la libertà di fissare il valore di x_2. Si pone, ad esempio, $x_2=1$.
Il punto di intersezione risulta essere (0,0,1).
L'intersezione tra la parabola e la retta impropria è un punto, quindi la retta impropria è tangente alla parabola. Si può immaginare che una qualunque parabola ad asse verticale all'infinito si comporti come nella figura 4.1.

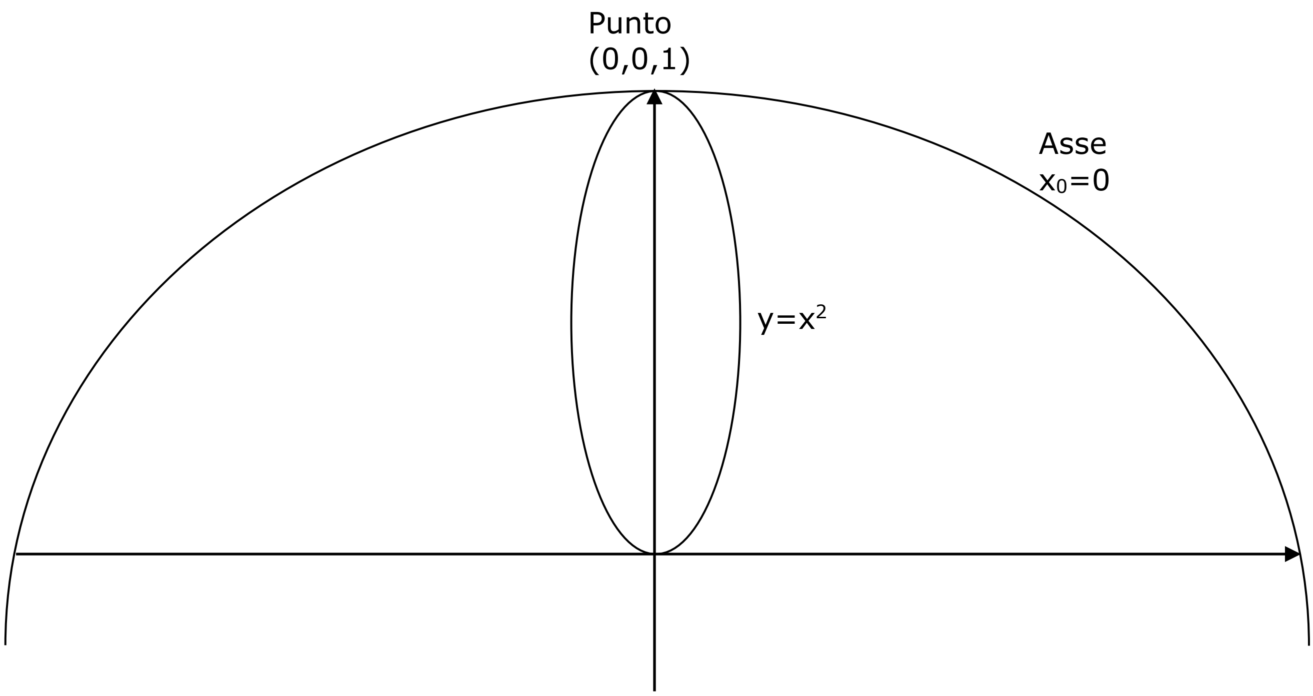


Figura 4.1
Intersezione tra la parabola $y=x^2$ e la retta impropria.

4.7 I punti impropri dell'ellisse

Si risolve il sistema tra l'equazione omogeneizzata dell'ellisse e la retta impropria.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - x_0^2 a^2 b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione risulta essere (0,0,0), ma per l'osservazione 3.4 non ci sono punti di coordinate proiettive (0,0,0). Se ne conclude che l'ellisse non interseca la retta impropria. Tutti i punti dell'ellisse sono dunque propri.

4.8 I punti impropri dell'iperbole

Si risolve il sistema tra l'equazione omogeneizzata dell'iperbole e la retta impropria.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 - x_0^2 a^2 b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ b^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 = a^2 \\ x_2^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \pm a \\ x_2 = \pm b \end{cases}$$

I punti di intersezione sembrano essere quattro:

- (0,a,b)
- (0,a,-b)
- (0,a,-b)
- (0,-a,-b)

Per l'osservazione 3.3 i due punti (0,a,b) e (0,-a,-b) sono in realtà lo stesso punto con λ=-1.
Analogamente i due punti (0,a,-b) e (0,-a,b) sono lo stesso punto per λ=-1.
I punti di intersezione sono dunque solo due: (0,a,b) e (0,a,-b).
Corrispondono alle direzioni delle rette $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, che come è noto sono gli asintoti dell'iperbole.
Si può immaginare che l'iperbole all'infinito si comporti come mostrato in figura 4.2, ossia intersechi la retta impropria nei punti di intersezione tra gli asintoti e la retta impropria.

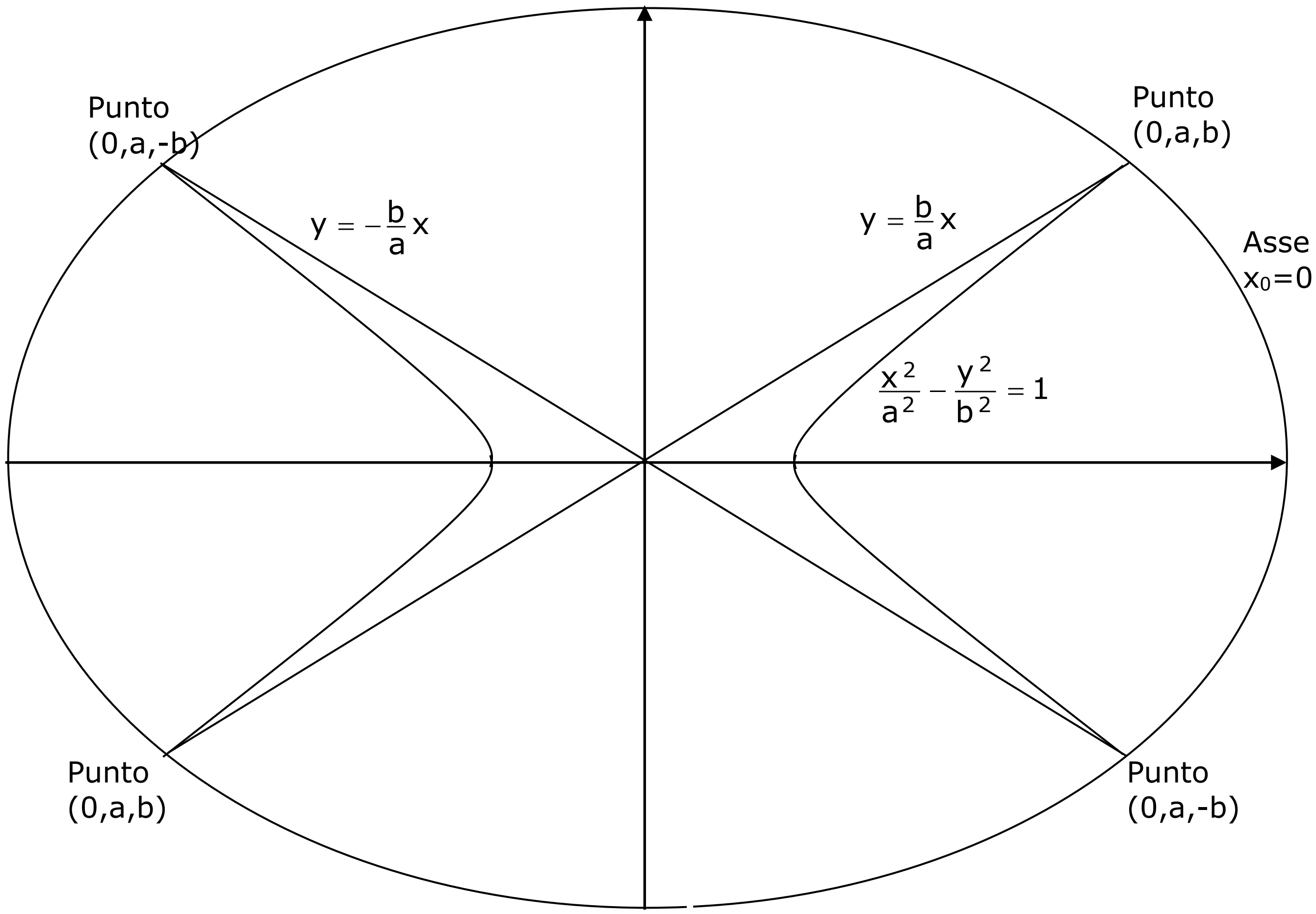


Figura 4.2
Intersezione tra l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e la retta impropria.

4.9 Classificazione delle coniche in base al numero dei punti impropri

Si consideri la circonferenza un caso particolare di ellisse.
Si è visto che l'ellisse non ha punti impropri, la parabola ne ha uno, l'iperbole ne ha due.
In base al numero dei punti impropri è quindi possibile classificare una conica data.
In realtà non basta conoscere il numero dei punti impropri perché, come si vedrà nel capitolo successivo, la conica può essere degenere.

Data l'equazione generale di una conica non degenere si può utilizzare il seguente procedimento per determinare se è una ellisse, una parabola o un'iperbole.

Procedimento per classificare una conica non degenere:

- Omogeneizzare l'equazione affine della conica e trovare l'equazione proiettiva.
- Intersecare l'equazione proiettiva della conica con la retta impropria $x_0=0$.
  - Se la conica non ha punti impropri è una ellisse (o una circonferenza).
  - Se la conica ha un punto improprio è una parabola.
  - Se la conica ha due punti impropri è una iperbole.

5 – Classificazione delle coniche

5.1 Coniche degeneri

Se il polinomio di secondo grado

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

che rappresenta una conica è scomponibile in prodotto di polinomi di primo grado allora la conica è degenere.
Per comprendere meglio questo concetto si fa ricorso al seguente esempio.

Esempio 5.1.1
Data la conica

$$2x^2-xy-y^2+2x+y=0$$

dire se è degenere.
Si può interpretare come equazione di secondo grado in x. I coefficienti sono a=2, b=-y+2, c=-y²+y.

$$x_{1,2}=\frac{y-2\pm\sqrt{(y-2)^2-4(2)(-y^2+y)}}{2(2)}=\frac{y-2\pm\sqrt{y^2+4-4y+8y^2-8y}}{4}=$$

$$=\frac{y-2\pm\sqrt{9y^2-12y+4}}{4}=\frac{y-2\pm\sqrt{(3y-2)^2}}{4}=\frac{y-2\pm(3y-2)}{4}$$

$$x_1=\frac{y-2+(3y-2)}{4}=\frac{4y-4}{4}=y-1$$

$$x_2=\frac{y-2-(3y-2)}{4}=\frac{-2y}{4}=-\frac{1}{2}y$$

La conica $2x^2-xy-y^2+2x+y=0$ si scompone in due rette distinte:

$$2(x-y+1)\left(x+\frac{1}{2}y\right)=0$$

$$(x-y+1)(2x+y)=0$$

In questo caso la conica è degenere, nel senso che non è una ellisse, né una parabola, né una iperbole.

Se almeno una delle due variabili è di secondo grado si può procedere come nell'esempio precedente. Se invece non sono presenti i termini di secondo grado si ha una equazione del tipo:

$$axy+bx+cy+d=0 \qquad (\text{con } a\neq 0)$$

- Se d=0 la conica è degenere se b=0 oppure se c=0. Infatti in tal caso è possibile scomporre in fattori il primo membro dell'equazione raccogliendo a fattor comune la x o la y.
- Se c=0 la conica è degenere se d=0 per lo stesso motivo.
- Se b=0 la conica è degenere se d=0 per lo stesso motivo.
- Se b, c, d diversi da zero si provi a scomporre axy+bx+cy+d=0.
  x(ay+b)+(cy+d)=0 è scomponibile se ay+b=k(cy+d) con $k\neq 0$.
  Ciò avviene se a=kc e b=kd, ossia se a/c=b/d, ossia se

$$\mathbf{ad-bc=0} \qquad (5.1)$$

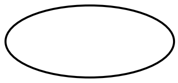
Si noti che la (5.1) vale in tutti e 4 i casi qui sopra elencati.

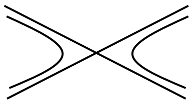
Quindi, nel caso in cui non siano presenti i termini in x^2 e in y^2, la (5.1) è la condizione per determinare se la conica è degenere.

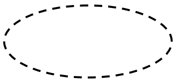
5.2 Il teorema di classificazione

Nel capitolo precedente si è visto come trovare i punti all'infinito di una conica, nel primo paragrafo di questo capitolo si è visto come riconoscere se la conica è degenere. Utilizzando questi due strumenti si può procedere alla classificazione di una conica.
Il seguente teorema indica tutti i possibili casi che si possono presentare. Di tale teorema non viene data la dimostrazione.

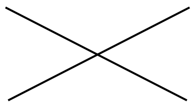
Teorema di classificazione delle coniche
Ogni conica di equazione $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, scegliendo opportunamente il sistema di coordinate, è congruente a una conica in una delle seguenti forme canoniche:

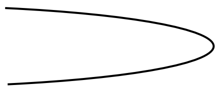
1) $\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=1$  ELLISSE (CIRCONFERENZA se $\alpha=\beta$)

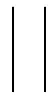
2) $\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}=1$  IPERBOLE

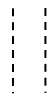
3) $\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=-1$  ELLISSE IMMAGINARIA

4) $\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=0$  PUNTO

5) $\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}=0$  COPPIA DI RETTE INCIDENTI

6) $Y^2-2pX=0$  PARABOLA

7) $X^2-\alpha^2=0$  COPPIA DI RETTE PARALLELE

8) $X^2+\alpha^2=0$  COPPIA DI RETTE IMMAGINARIE PARALLELE

9) $X^2=0$ COPPIA DI RETTE COINCIDENTI

Con α, β e p diversi da zero.

Le coniche 4, 5, 7, 8, 9 sono dette **degeneri**, in quanto non sono curve ma coppie di rette o, in un caso, un singolo punto.
Le coniche 3 e 8 sono **coniche senza punti reali**. Non esiste infatti nessuna coppia (x,y) con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ che soddisfi tali equazioni. La conica 3 è non degenere, la 8 è degenere.
Le coniche 1, 2, 6 sono le sole coniche **non degeneri** formate da infiniti punti reali.

La conica 1 è non degenere, non ha punti all'infinito, è formata da punti reali.
La conica 2 è non degenere, ha 2 punti all'infinito, è formata da punti reali.
La conica 3 è non degenere, non ha punti all'infinito, non è formata da punti reali.
La conica 4 è degenere, non ha punti all'infinito, è formata da un solo punto reale.
La conica 5 è degenere, ha 2 punti all'infinito, è formata da punti reali.
La conica 6 è non degenere, ha un punto all'infinito, è formata da punti reali.
La conica 7 è degenere, ha un punto all'infinito, è formata da punti reali.

La conica 8 è degenere, ha un punto all'infinito, non è formata da punti reali.
La conica 9 è degenere, ha un punto all'infinito, è formata da punti reali.

Nel caso 7 e nel caso 9 le coniche hanno entrambe un punto all'infinito, sono degeneri e sono formate da punti reali.
Per distinguere i due casi basta vedere se il polinomio di secondo grado che descrive la conica è un quadrato perfetto. Se è un quadrato perfetto si è in presenza di rette parallele coincidenti. Se non è un quadrato perfetto si è in presenza di rette parallele distinte.

In base a tali considerazioni si può classificare una conica, ossia determinare in quale dei 9 casi precedentemente elencati ricade, studiandone le seguenti caratteristiche:

- Numero di punti all'infinito (zero, uno o due).
- E' degenere o non degenere.
- E' formata da punti reali o immaginari.

Numero di punti all'infinito	Degenere o non degenere	Punti reali o immaginari	
0	Degenere	Reali	Punto
0	Non degenere	Immaginari	Ellisse immaginaria
0	Non degenere	Reali	Ellisse
1	Degenere	Reali	Rette parallele distinte (il polinomio non è un quadrato)
1	Degenere	Reali	Rette parallele coincidenti (il polinomio è un quadrato)
1	Degenere	Immaginari	Rette parallele immaginarie
1	Non degenere	Reali	Parabola
2	Degenere	Reali	Rette non parallele distinte
2	Non degenere	Reali	Iperbole

5.3 Notazione

Nel seguito si utilizzerà una notazione differente da quella dei precedenti capitoli: al posto di x_1 si scriverà x, al posto di x_2 si scriverà y, al posto di x_0 si scriverà z.
Il punto proiettivo (x_0,x_1,x_2) assumerà la forma (x,y,z).
Allo stesso modo si utilizzeranno le variabili x, y, z al posto delle variabili x_0, x_1, x_2.
Ad esempio il punto improprio (0,1,-2) sarà d'ora in poi indicato con coordinate (1,-2,0) e il punto proprio (1,0,3) con coordinate (0,3,1)
La retta impropria avrà equazione z=0.
Se la coordinata z di un punto (x,y,z) è zero allora il punto è improprio.
Se la coordinata z di un punto (x,y,z) è diversa da zero allora il punto è proprio.
Per omogeneizzare una conica al posto della (3.2) si utilizzerà la sostituzione:

$$x \to \frac{x}{z} \text{ e } y \to \frac{y}{z} \text{ in cui } z \neq 0 \qquad (5.2)$$

5.4 Classificazione di una conica: esempi

Esempio 5.4.1

Classificare la conica: $2x^2+2xy+y^2+4x+8=0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 2x^2+2xy+y^2+4xz+8z^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$2x^2+2xy+y^2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2y\pm\sqrt{4y^2-4(2)(y^2)}}{2(2)}=\frac{-2y\pm\sqrt{-4y^2}}{4}$$

Si ha una soluzione solo se y=0.

Dunque anche x=0. L'unica soluzione è (0,0,0) che non è un punto proiettivo (per l'osservazione 3.4).

Tale conica non ha punti impropri, quindi se non è degenere è una ellisse.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$2x^2+2xy+y^2+4x+8=0.$$

a=2, b=2y+4, $c=y^2+8$

$$\Delta=(2y+4)^2-4(2)(y^2+8)=4y^2+16+16y-8y^2-64=-4y^2+16y-48=$$

$$=-4(y^2-4y+12)$$

Il polinomio $y^2-4y+12$ è un fattore sempre positivo in quanto $\Delta_y=4-48=-44\neq0$ e il coefficiente di y^2 è positivo. Moltiplicando tale fattore per –4 si ottiene $\Delta<0$.

Il discriminante non è un quadrato perfetto, quindi non è una conica degenere. Però il discriminante è sempre negativo, per cui la conica non ha alcun punto reale. La conica è una ellisse immaginaria.

Esempio 5.4.2

Classificare la conica: $4y^2+12y+9=0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 4y^2+12yz+9z^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$4y^2=0 \;\Rightarrow\; y=0$$

C'è la libertà di fissare la x a piacere. Si ponga x=1. Allora c'è un solo punto improprio, il punto (1,0,0). La conica, se non è degenere, è una parabola.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$4y^2+12y+9=0.$$

a=4, b=12, c=9

$$\Delta=(12)^2-4(4)(9)=144-144=0$$

0 è un quadrato perfetto, dunque la conica è degenere.

Si deve distinguere tra rette parallele distinte o rette parallele coincidenti.

$4y^2+12y+9$ è un quadrato perfetto, infatti si scompone come $(2y+3)^2$.

Pertanto si hanno due rette parallele coincidenti.

Esempio 5.4.3

Classificare la conica: $x^2+xy+3y^2+y-2=0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} x^2+xy+3y^2+yz-2z^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$x^2+xy+3y^2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-y\pm\sqrt{(-y)^2-4(1)(3y^2)}}{2(1)}=\frac{-y\pm\sqrt{y^2-12y^2}}{2}=\frac{-y\pm\sqrt{-11y^2}}{2}$$

Si ha una soluzione solo se y=0.
Dunque anche x=0. L'unica soluzione è (0,0,0) che non è un punto proiettivo (per l'osservazione 3.4)
Tale conica non ha punti impropri, quindi se non è degenere è una ellisse.

II – Verifica se la conica è degenere.
Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$x^2+xy+3y^2+y-2=0$$

a=1, b=y, $c=3y^2+y-2$

$$\Delta=(y)^2-4(1)(3y^2+y-2)=y^2-12y^2-4y+8=-11y^2-4y+8$$

Il discriminante non è un quadrato perfetto in quanto $\Delta_y=16+352=368\neq 0$.
La conica non è degenere, non ha punti impropri, dunque è una ellisse.

Esempio 5.4.4

Classificare la conica: $x^2-4xy+4y^2+8x-16y+13=0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.
Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2+8xz-16yz+13z^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$x^2-4xy+4y^2=0 \;\Rightarrow\; (x-2y)^2=0$$

Ponendo y=1 si ha x=2
C'è un solo punto improprio, il punto (2,1,0), quindi la conica, se non è degenere, è una parabola.

II – Verifica se la conica è degenere.
Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$x^2-4xy+4y^2+8x-16y+13=0$$

a=1, b=-4y+8, $c=4y^2-16y+13$

$$\Delta=(-4y+8)^2-4(1)(4y^2-16y+13)=16y^2+64-64y-16y^2+64y-52=8$$

8 è un quadrato perfetto, è il quadrato di $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Dunque la conica è degenere.

$$x_{1,2}=\frac{4y-8\pm 2\sqrt{2}}{2}$$, dunque la conica si scompone come

$$\left(x-\frac{4y-8+2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{4y-8-2\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$\left(\frac{2x-4y+8-2\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2x-4y+8+2\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$\left(2x-4y+8-2\sqrt{2}\right)\left(2x-4y+8+2\sqrt{2}\right)=0$$

Le rette $2x-4y+8-2\sqrt{2}=0$ e $2x-4y+8+2\sqrt{2}=0$ hanno lo stesso coefficiente angolare, dunque sono parallele.
La conica si scompone dunque in due rette parallele distinte.

Esempio 5.4.5

Classificare la conica: $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + y + 1 = 0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 - 2xz + yz + z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x - y)(x - 3y) = 0$$

Ponendo y=1 si ha $x_1=1$, $x_2=3$.

La conica ha due punti impropri, il punto (1,1,0) e il punto (3,1,0), quindi la conica, se non è degenere, è una iperbole.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$x^2-4xy+3y^2-2x+y+1=0$$

a=1, b=-4y-2, c=$3y^2$+y+1

$$\Delta = (-4y - 2)^2 - 4(1)(3y^2 + y + 1) = 16y^2 + 4 + 16y - 12y^2 - 4y - 4 = 4y^2 + 12y$$

$4y^2+12y$ non è un quadrato perfetto, quindi la conica non è degenere.

La conica è quindi una iperbole.

Esempio 5.4.6

Classificare la conica: $-x^2 + 10xy - 25y^2 - 2x + 17y - 3 = 0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} -x^2 + 10xy - 25y^2 - 2xz + 17yz - 3z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + 10xy - 25y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 10xy + 25y^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x - 5y)^2 = 0$$

Ponendo y=1 si ha $x_1=5$. La conica ha un punto improprio, il punto (5,1,0), quindi, se non è degenere, è una parabola.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$-x^2+10xy-25y^2-2x+17y-3=0$$

a=-1, b=10y-2, c=$-25y^2$+17y-3

$$\Delta = (10y - 2)^2 - 4(-1)(-25y^2 + 17y - 3) = 100y^2 + 4 - 40y - 100y^2 + 68y - 12 = 28y - 8$$

28y-8 non è un quadrato perfetto, quindi la conica non è degenere.

La conica è quindi una parabola.

Esempio 5.4.7

Classificare la conica: $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4xz + 4z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 0 \text{ che non si scompone.}$$

L'unica soluzione è (0,0,0) che non è un punto proiettivo (per l'osserv. 3.4).

La conica non ha punti impropri. Se non è degenere è una ellisse.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$x^2+y^2-4x+4=0$$

a=1, b=-4, c=y^2+4

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(y^2 + 4) = 16 - 4y^2 - 16 = -4y^2 \neq 0 \text{ solo se } y = 0$$

Ponendo y=0 nell'equazione della conica si ottiene x^2-4x+4=0, da cui x=2.

L'ellisse si riduce quindi al singolo punto proiettivo (2,0,1).

Esempio 5.4.8

Classificare la conica: $2xy - 3y = 0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 2xy - 3yz = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ 2xy = 0$$

Ponendo y=1 si ottiene x=0, ponendo x=1 si ottiene y=0. La conica ha due punti impropri, (0,1,0) e (1,0,0). Se non è degenere è una iperbole.

II – Verifica se la conica è degenere.

Non essendoci i termini di secondo grado si nota che la conica ha la forma

$$axy+bx+cy+d=0$$

in cui a=2, b=0, c=-3, d=0

Per la condizione (5.1) ad-bc=0 e la conica è degenere.

Avendo due punti impropri è degenere in due rette distinte.

In effetti 2xy-3y=0 si scompone in y(2x-3)=0 e le due rette distinte sono y=0 e 2x-3=0.

Esempio 5.4.9

Classificare la conica: $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4xz - 6yz + 2z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0$$

$$(2x + 3y)^2 = 0$$

Ponendo y=2 si ottiene x=-3. La conica ha come punto improprio (-3,2,0). Se non è degenere è una parabola.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+2=0$$

a=4, b=12y-4, c=$9y^2$-6y+2

$$\Delta = (12y - 4)^2 - 4(4)(9y^2 - 6y + 2) = 144y^2 + 16 - 96y - 144y^2 + 96y - 32 = -16$$

Il discriminante è negativo, quindi la conica è composta da soli punti immaginari. Poiché ha un solo punto improprio è una coppia di rette immaginarie.

Esempio 5.4.10

Classificare la conica: $xy + 2x - y + 2 = 0$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} xy + 2xz - yz + 2z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ xy = 0$$

Ponendo y=1 si ottiene x=0, ponendo x=1 si ottiene y=0. La conica ha due punti impropri, (0,1,0) e (1,0,0). Se non è degenere è una iperbole.

II – Verifica se la conica è degenere.

Non essendoci i termini di secondo grado si nota che la conica ha la forma

$$axy+bx+cy+d=0$$

in cui a=1, b=2, c=-1, d=2

Per la condizione (5.1) si deve verificare se ad-bc=0.

$ad-bc=1\cdot 2-2(-1)=4\neq 0$. La conica non è degenere.

Ha due punti impropri quindi è una iperbole.

5.5 Classificazione di una conica – tabella riassuntiva

In base agli esempi visti, che esauriscono tutti i casi possibili, si può utilizzare il seguente schema per la classificazione delle coniche.

CASO 1: la conica presenta almeno un termine di secondo grado.

- Ha due punti impropri
  - Si considera una variabile come incognita, l'altra come parametro, e si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado che rappresenta la conica.
    - Il discriminante non si scompone $\rightarrow$ è una iperbole.
    - Il discriminante è un quadrato perfetto $\rightarrow$ è degenere in una coppia di rette incidenti.
- Ha un punto improprio
  - Si considera una variabile come incognita, l'altra come parametro, e si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado che rappresenta la conica.
    - Il discriminante non si scompone $\rightarrow$ è una parabola.
    - Il discriminante è un quadrato perfetto $\rightarrow$ è degenere in una coppia di rette parallele.
    - Il discriminante è zero $\rightarrow$ è degenere in una coppia di rette coincidenti.
    - Il discriminante è negativo $\rightarrow$ è degenere in una coppia di rette immaginarie.
- Non ha punti impropri
  - Si considera una variabile come incognita, l'altra come parametro, e si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado che rappresenta la conica.
    - Il discriminante non si scompone $\rightarrow$ è una ellisse.
    - Il discriminante è negativo, a meno che per un certo valore della y sia zero $\rightarrow$ è degenere in un punto.
    - Il discriminante è negativo $\rightarrow$ è una ellisse immaginaria.

CASO 2: la conica non presenta termini di secondo grado.

In tal caso la conica assume la forma

$$axy+bx+cy+d=0 \qquad (\text{con } a\neq 0)$$

Omogeneizzando e intersecando con la retta impropria si nota che presenta sempre due punti impropri. Infatti:

$$\begin{cases} axy + bxz + cyz + dz^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ axy = 0$$

Ponendo y=1 si ottiene x=0, ponendo x=1 si ottiene y=0. La conica ha due punti impropri, (0,1,0) e (1,0,0).

- Si vede se la conica è degenere.
  - Se d=0 la conica è degenere se b=0 oppure se c=0. Infatti in tal caso è possibile scomporre raccogliendo la x o la y a fattor comune.
  - Se c=0 la conica è degenere se d=0.
  - Se b=0 la conica è degenere se d=0.
  - Se b, c, d diversi da zero si provi a scomporre axy+bx+cy+d=0.

    x(ay+b)+(cy+d)=0 è scomponibile se ay+b=k(cy+d) con $k\neq 0$.

    Ciò avviene se a=kc e b=kd, ossia se a/c=b/d, ossia se

    $$ad-bc=0$$
- Se la conica non è degenere $\rightarrow$ è una iperbole.
- Se la conica è degenere $\rightarrow$ è una coppia di rette incidenti.

6 – Grafico di una conica generica

6.1 Introduzione

Finora si è affrontato il seguente problema: data una equazione di secondo grado in due variabili classificare la conica.
Quello che ci si propone in questo capitolo è di tracciarne il grafico.
Nei casi in cui si ha a che fare con coniche degeneri ciò risulta abbastanza semplice; nel caso di coniche immaginarie non c'è alcun grafico; il procedimento per tracciare il grafico di coniche non degeneri (ellisse, iperbole, parabola) è un po' più elaborato.
E' infatti necessario introdurre nuovi concetti relativi alle coniche: polo e polare di una conica, retta tangente alla conica in un suo punto improprio, centro di simmetria di una conica e assi di simmetria di una conica.

In base al teorema di classificazione (paragrafo 5.2) si possono avere i seguenti casi:

- **Coniche immaginarie**
  - ellisse immaginaria,
  - rette parallele immaginarie

  In questi casi non si traccia alcun grafico, in quanto la conica non ha punti reali.

- **Coniche reali degeneri**
  - rette parallele distinte
  - rette coincidenti
  - rette incidenti
  - punto

  In questi casi basta trovare le rette o il punto e tracciare sul grafico quanto trovato con i soliti metodi visti in geometria analitica.

- **Coniche reali non degeneri**
  - Ellisse
  - Iperbole
  - Parabola

  In questi casi per tracciare il grafico è necessario prima ricavare alcune caratteristiche supplementari della conica in questione.

6.2 Grafico di coniche degeneri

Per quanto visto nel capitolo 5 è possibile scrivere una conica degenere in una delle seguenti forme:

- Rette parallele distinte

  La conica è scomponibile come prodotto di polinomi di primo grado.
  Per il teorema di classificazione (paragrafo 5.2), scegliendo opportunamente il sistema di coordinate, la conica si può scrivere nella forma $X^2-\alpha^2=0$, che si scompone in $(X-\alpha)(X+\alpha)=0$, ossia due polinomi di primo grado. Le due rette parallele sono dunque $X-\alpha=0$ e $X+\alpha=0$.

- Rette coincidenti

  La conica è scomponibile come quadrato di un polinomio di primo grado.
  Per il teorema di classificazione (paragrafo 5.2), scegliendo opportunamente il sistema di coordinate, la conica si può scrivere nella forma $X^2=0$, ossia $X=0$, che è l'equazione delle rette coincidenti.

- Rette incidenti

  La conica è scomponibile come prodotto di polinomi di primo grado.
  Infatti scegliendo opportunamente il sistema di coordinate si può scrivere come $\frac{X^2}{\alpha^2}-\frac{Y^2}{\beta^2}=0$, che si scompone in $\left(\frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}\right)\left(\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}\right)=0$, ossia due polinomi di primo grado. Le due rette parallele sono dunque $\frac{X}{\alpha}-\frac{Y}{\beta}=0$ e $\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}=0$.

- Punto

  La conica è scomponibile come somma di quadrati di termini di primo grado.
  Infatti scegliendo opportunamente il sistema di coordinate si può scrivere come $\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{Y^2}{\beta^2}=0$ che ha come unica soluzione il punto (0,0) in coordinate affini.

In tutti questi casi basta scomporre $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$, ossia il primo membro dell'equazione di secondo grado che rappresenta la conica. In tal modo si trovano le rette componenti; nel caso la conica sia degenere in un punto se ne trovano le coordinate.
In entrambi i casi se ne traccia il grafico. Si mostrano qui di seguito alcuni esempi.

Esempio 6.2.1
Classificare e tracciare il grafico della conica

$$x^2+xy-2y^2+5x-2y+4=0$$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2+5xz-2yz+4z^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow\ x^2+xy-2y^2=0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (x+2y)(x-y)=0

Ponendo y=1 si ottiene $x_1=-2$, e $x_2=1$. La conica ha due punti impropri, (-2,1,0) e (1,1,0). Se non è degenere è una iperbole.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$x^2+xy-2y^2+5x-2y+4=0$$

a=1, b=y+5, $c=-2y^2-2y+4$

$$\Delta=(y+5)^2-4(1)(-2y^2-2y+4)=y^2+25+10y+8y^2+8y-16=$$

$$=9y^2+18y+9=(3y+3)^2$$

Il discriminante è un quadrato perfetto, dunque la conica è degenere. Si risolve l'equazione della conica, considerandola come equazione di secondo grado in x.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(y+5)\pm\sqrt{(3y+3)^2}}{2}=\frac{-y-5\pm(3y+3)}{2}$$

$$x_1=\frac{-y-5+3y+3}{2}=\frac{2y-2}{2}=y-1$$

$$x_2=\frac{-y-5-3y-3}{2}=\frac{-4y-8}{2}=-2y-4$$

La conica $x^2+xy-2y^2+5x-2y+4=0$ si scompone in

$$(x-y+1)(x+2y+4)=0$$

ossia nelle due rette:

$$x-y+1=0\ \Rightarrow\ y=x+1=0$$

$$x+2y+4=0\ \Rightarrow\ 2y=-x-4\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x-2$$

III – Grafico

Si tracciano sul grafico le rette trovate. La conica degenere ha come grafico due rette distinte.

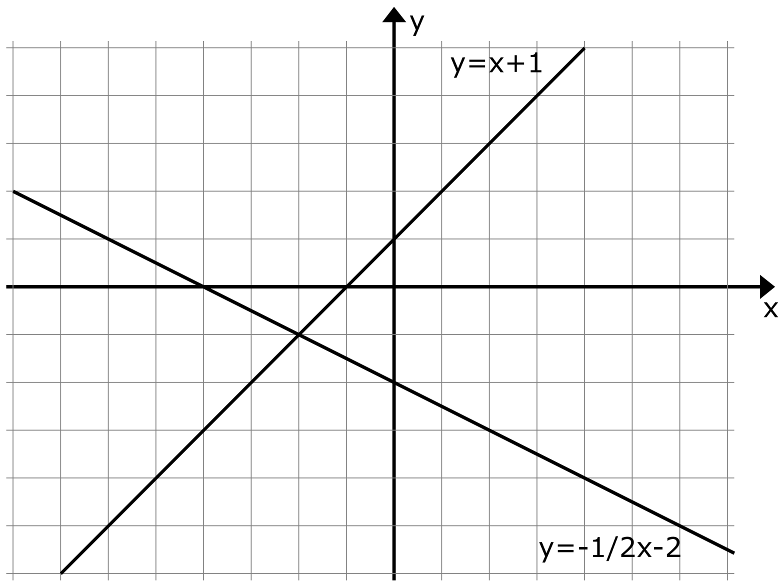


Figura 6.1
Grafico di una conica degenere in due rette distinte incidenti.

Esempio 6.2.2

Classificare e tracciare il grafico della conica

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2+4xz-2yz+z^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-4xy+y^2=0 \Rightarrow (2x-y)^2=0$$

Ponendo y=2 si ottiene x=1. La conica ha un punto improprio: (1,2,0). Se non è degenere è una parabola.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$$

a=4, b=-4y+4, $c=y^2-2y+1$

$$\Delta=(-4y+4)^2-4(4)(y^2-2y+1)=16y^2+16+-32y-16y^2+32y-16=0$$

Il discriminante è 0, che è un quadrato perfetto, dunque la conica è degenere. Si risolve l'equazione della conica, considerandola come una equazione di secondo grado in x.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4y+4)\pm\sqrt{0}}{8}=\frac{4y-4}{8}=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$$

La conica $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$ si scompone in

$$4\left(x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$4\left(\frac{2x-y+1}{2}\right)^2=0$$

$$(2x-y+1)^2=0$$

ossia in due rette coincidenti di equazione 2x-y+1=0 ⇒ y=2x+1

III – Grafico

Si traccia sul grafico la retta trovata.

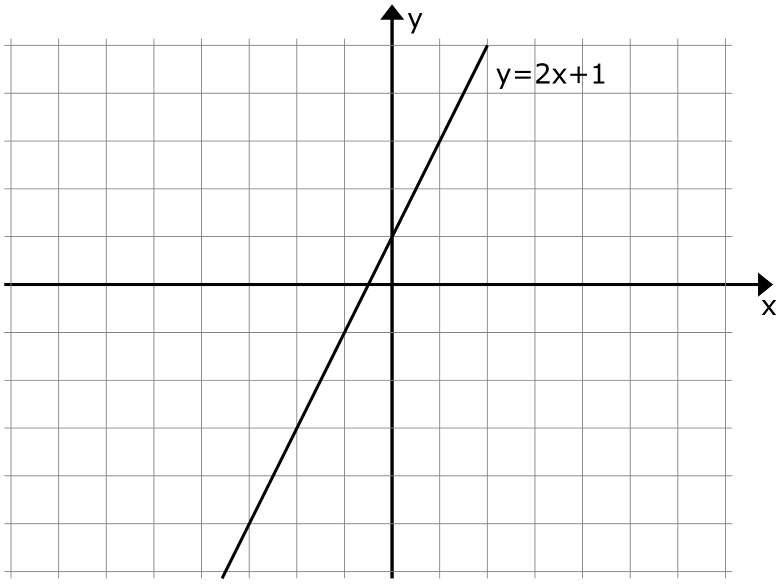


Figura 6.2
Grafico di una conica degenere in due rette coincidenti.

Esempio 6.2.3

Classificare e tracciare il grafico della conica

$$4x^2-4xy+y^2-1=0$$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2-z^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-4xy+y^2=0 \Rightarrow (2x-y)^2=0$$

Ponendo y=2 si ottiene x=1. La conica ha un punto improprio: (1,2,0). Se non è degenere è una parabola.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$4x^2-4xy+y^2-1=0$$

a=4, b=-4y, c=y^2-1

$$\Delta=(-4y)^2-4(4)(y^2-1)=16y^2-16y^2+16=16$$

Il discriminante è 16, che è un quadrato perfetto, dunque la conica è degenere. Si risolve l'equazione della conica, considerandola come una equazione di secondo grado in x.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4y)\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{4y\pm4}{8}$$

$$x_1=\frac{4y+4}{8}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{4y-4}{8}=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$$

La conica $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$ si scompone come prodotto di polinomi:

$$4\left(x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$4\left(\frac{2x-y+1}{2}\right)\left(\frac{2x-y-1}{2}\right)=0$$

$$\left(2x-y+1\right)\left(2x-y-1\right)=0$$
ossia in due rette distinte di equazione

$$2x-y+1=0 \Rightarrow y=2x+1$$
$$2x-y-1=0 \Rightarrow y=2x-1$$

La conica ha un punto all'infinito, quindi le rette sono parallele. Del resto è facile osservare che hanno lo stesso coefficiente angolare m=2.

III – Grafico

Si tracciano sul grafico le rette trovate.

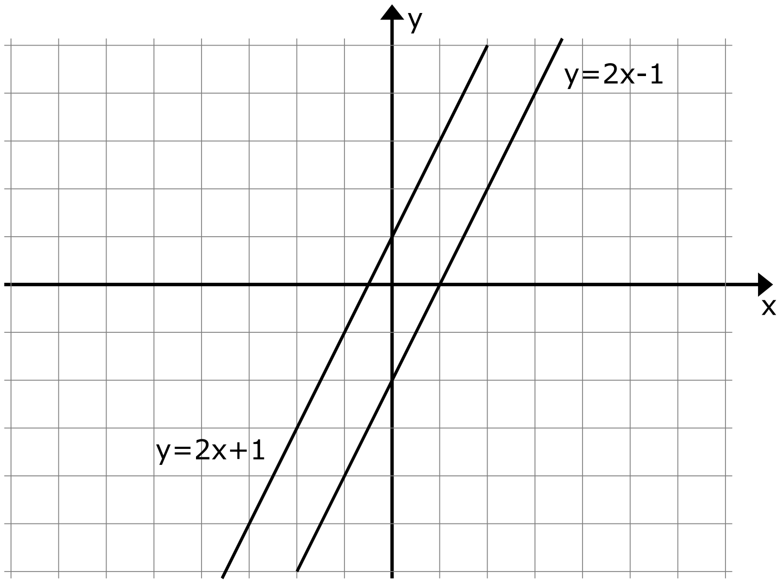


Figura 6.3
Grafico di una conica degenere in due rette distinte parallele.

Esempio 6.2.4

Classificare e tracciare il grafico della conica

$$2x^2-2xy+y^2+6x-4y+5=0$$

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2+6xz-4yz+5z^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow\ 2x^2-2xy+y^2=0$$

Considerando tale equazione di secondo grado in x si ha a=2, b=-2y, c=y^2.

Si calcola il discriminante.

$$\Delta=\left(-2y\right)^2-4\left(2\right)\left(y^2\right)=4y^2-8y^2=-4y^2$$

Il discriminante è negativo a meno che y=0. In tal caso però anche x=0. Non esiste alcun punto improprio di coordinate omogenee (0,0,0), dunque la conica non ha punti impropri. Se non è degenere è una ellisse.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$2x^2-2xy+y^2+6x-4y+5=0$$

a=2, b=-2y+6, c=y^2-4y+5

$$\Delta=\left(-2y+6\right)^2-4\left(2\right)\left(y^2-4y+5\right)=4y^2+36-24y-8y^2+32y-40=$$
$$=-4y^2+8y-4=-4\left(y^2-2y+1\right)=-4\left(y-1\right)^2$$

Tale polinomio è sempre negativo a meno che y=1. La conica è degenere in un solo punto. Ponendo y=1 nell'equazione della conica si ha:

$2x^2-2xy+y^2+6x-4y+5=0$
$2x^2-2x(1)+(1)^2+6x-4(1)y+5=0$
$2x^2-2x+1+6x-4+5=0$
$2x^2+4x+2=0$
$2(x^2+2x+1)=0$
$2(x+1)^2=0$
$x=-1$
Il punto è dunque, in coordinate affini, (-1,1).

III – Grafico
Si traccia sul grafico il punto trovato.

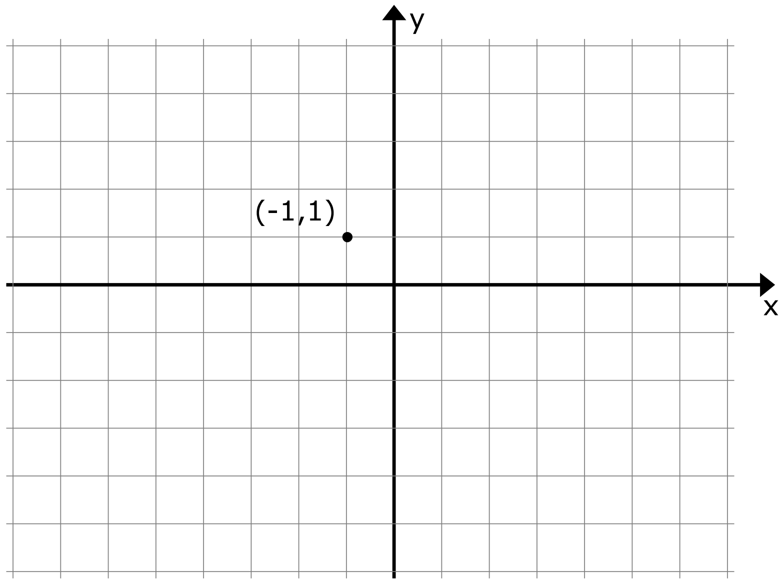


Figura 6.4
Grafico di una conica degenere in un punto.

6.3 Intersezione di una retta e di una conica

Per determinare il punto di intersezione di una retta r: $Ax+By+C=0$ e di una conica $\mathcal{C}$: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ si risolve il sistema tra la retta e la conica:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$$

Le due equazioni sono rispettivamente di primo e di secondo grado, quindi il sistema è di secondo grado.

Si possono verificare i seguenti casi:

1. **L'equazione risolvente ha grado zero ed è una identità.**
   In questo caso la retta r presenta infiniti punti di intersezione con la conica $\mathcal{C}$, ossia la retta r è contenuta nella conica $\mathcal{C}$ ($r\subseteq\mathcal{C}$). Perché ciò avvenga la conica deve essere degenere.

   Esempio 6.3.1
   Si trovi l'intersezione tra la retta $x+y+2=0$ e la conica $2x^2+xy-y^2+5x-y+2=0$.

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ 2x^2+xy-y^2+5x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x-2 \\ 2x^2+x(-x-2)-(-x-2)^2+5x-(-x-2)+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ 2x^2 - x^2 - 2x - x^2 - 4 - 4x + 5x + x + 2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La retta r è contenuta nella conica $\mathcal{C}$.
In tal caso la conica è sicuramente degenere.

2. **L'equazione risolvente ha grado zero ma non è una identità.**
In questo caso la retta r e la conica $\mathcal{C}$ si intersecano in un punto all'infinito.
Ciò avviene quando la conica $\mathcal{C}$ è una iperbole e la retta r è uno dei suoi asintoti.

Esempio 6.3.2
La conica x^2-4xy+3y^2-2x+y+1=0, come visto nell'esempio 5.4.5, è una iperbole.
Cerchiamo l'intersezione tra essa e la retta y=x+1/2

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{2} \\ x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2x + \left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x^2 - 2x + 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} - 2x + x + \frac{1}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} = 0 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile. La retta e l'iperbole non hanno punti propri di intersezione.

Si cercano allora i punti impropri di intersezione.
Per far ciò si risolve il sistema tra la chiusura proiettiva della retta e la chiusura proiettiva della conica, ossia tra le loro equazioni in coordinate omogenee.

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{2}z \\ x^2 - 4xy + 3y^2 - 2xz + yz + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{2}z \\ x^2 - 4x\left(x + \frac{1}{2}z\right) + 3\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 - 2xz + \left(x + \frac{1}{2}\right)z + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{2}z \\ x^2 - 4x^2 - 2xz + 3x^2 + 3xz + \frac{3}{4}z^2 - 2xz + xz + \frac{1}{2}z^2 + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{2}z \\ \frac{9}{4}z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

Ponendo x=1 si ottiene y=1. Il punto d'intersezione è il punto improprio (1,1,0).

3. **L'equazione risolvente ha grado uno.**
   In tal caso la conica e la retta si intersecano in un punto affine. L'altro punto di intersezione è improprio. Ciò avviene, per esempio, quando la conica è una parabola e la retta r è parallela all'asse della parabola.

   Esempio 6.3.3
   La conica x^2-10xy+25y^2+2x-17y+3=0, come già visto nell'esempio 5.4.6, è una parabola. Si vuole trovare l'intersezione di tale parabola con la retta x-5y+2=0.
   Risolvendo il sistema tra conica e retta si determina il punto affine di intersezione, risolvendo il sistema tra conica e retta in coordinate omogenee si determina anche il punto improprio di intersezione.

$$\begin{cases} x-5y+2=0 \\ x^2-10xy+25y^2+2x-17y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5y-2 \\ (5y-2)^2-10(5y-2)y+25y^2+2(5y-2)-17y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5y-2 \\ 25y^2-20y+4-50y^2+20y+25y^2+10y-4-17y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5y-2 \\ -7y+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5\cdot\frac{3}{7}-2=\frac{15}{7}-2=\frac{15-14}{7}=\frac{1}{7} \\ y=\frac{3}{7} \end{cases}$$

   Il punto di intersezione ha coordinate affini $\left(\frac{1}{7};\frac{3}{7}\right)$.

   Il punto improprio di intersezione si trova risolvendo il sistema tra la retta e la conica in coordinate omogenee.

$$\begin{cases} x=5y-2z \\ x^2-10xy+25y^2+2xz-17yz+3z^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5y-2z \\ (5y-2z)^2-10(5y-2z)y+25y^2+2(5y-2z)z-17yz+3z^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5y=0 \\ 25y^2+4z^2-20yz-50y^2+20yz+25y^2+10yz-4z^2-17yz+3z^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=5y-2z \\ 3z^2-7yz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5y-2z \\ z(3z-7y)=0 \end{cases}$$

   Per determinare il punto improprio di intersezione si pone z=0. Per determinare quello proprio si pone z=1.

$$\begin{cases} x=5y-2(0) \\ z_1=0 \end{cases}$$

   C'è la libertà di scegliere una delle variabili x e y. Ad esempio si fissa y=1 e si trova la corrispondente x.

$$\begin{cases} x_1=5(1)=5 \\ y_1=1 \\ z_1=0 \end{cases}$$

   Il punto improprio di intersezione ha coordinate omogenee (5,1,0).

$$\begin{cases} x = 5y - 2(1) \\ 1 \cdot (3(1) - 7y) = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5\left(\frac{3}{7}\right) - 2 = \frac{15}{7} - 2 = \frac{15-14}{7} = \frac{1}{7} \\ y_2 = \frac{3}{7} \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Il punto proprio di intersezione è $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 1\right)$, già trovato precedentemente.

4. L'equazione risolvente ha grado due.

In tal caso la conica e la retta si intersecano in due punti.
Le soluzioni possono essere:

- Reali distinte — la retta è secante la conica
- Reali coincidenti — la retta è tangente la conica
- Complesse coniugate — la retta è esterna alla conica

Esempio 6.3.4

Si trovi l'intersezione tra la retta r: x-y-1=0 e la conica *C*: xy+2x-y+2=0.
Si è già visto nell'esempio 5.4.10 che la conica *C* è un'iperbole.

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ xy + 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x(x-1) + 2x - (x-1) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x + 2x - x + 1 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile. La retta r è esterna alla conica.

Esempio 6.3.5

Si trovi l'intersezione tra la retta r: x+5=0 e la conica *C*: $x^2+2xy+y^2-7x-6y+4=0$.

$$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 7x - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ (-5)^2 + 2(-5)y + y^2 - 7(-5) - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ 25 - 10y + y^2 + 35 - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y^2 - 16y + 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ (y-8)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 8 \end{cases}$$

C'è un punto di intersezione, il punto proprio (-5,8) in coordinate affini. La retta è tangente alla conica.

Esempio 6.3.6

Si trovi l'intersezione tra la retta r: x+y+2=0 e la conica *C*: $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ (-y-2)^2 + y^2 - 4(-y-2) - 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ y^2 + 4y + 4 + 4y + 8 - 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y - 2 \\ y(y + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y - 2 = -0 - 2 = -2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -y - 2 = -(-2) - 2 = 0 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Ci sono due punti propri di intersezione, il punto (-2,0) e il punto (0,-2). La retta è secante la conica.

6.4 Retta tangente a una conica

Data una conica $\mathcal{C}$ non degenere e un suo punto $P(x_1,y_1)$ è possibile determinare la retta tangente alla conica $\mathcal{C}$ in P.
Un metodo per determinare la retta tangente è già stato studiato in geometria analitica:

- Si imposta il sistema tra l'equazione della conica $\mathcal{C}$ e il fascio di rette per P.
- Si ricava una equazione letterale di secondo grado che non va risolta ma se ne pone il $\Delta=0$. (condizione di tangenza)
- La condizione di tangenza permette di trovare il coefficiente angolare della retta tangente.
- Si sostituisce il coefficiente angolare della retta tangente nell'equazione del fascio di rette per P.

Il metodo resta ovviamente valido, ma presenta alcuni inconvenienti: non permette di trovare rette tangenti verticali (che non hanno coefficiente angolare) e non permette di trovare rette tangenti passanti per punti impropri.

Esempio 6.4.1
Si determini la retta tangente alla conica $x^2+y^2-25=0$ per il suo punto P(5;0).
Si imposta il sistema tra la conica e il fascio di rette per P.

$$\begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 0 = m(x - 5) = mx - 5m \\ x^2 + (mx - 5m)^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + m^2x^2 + 25m^2 - 10m^2x - 25 = 0$$

$$x^2(1 + m^2) - 10m^2x + 25m^2 - 25 = 0$$

Si impone la condizione di tangenza $\Delta=b^2-4ac=0$.

$$(-10m^2)^2 - 4(1 + m^2)(25m^2 - 25) = 0$$

$$100m^4 - 100m^2 - 100m^4 + 100 + 100m^2 = 0$$

$$100 = 0 \quad \text{impossibile}$$

Dai calcoli sembra che non ci siano rette tangenti, ma è evidente dalla figura 6.5 che la retta x=5 (verticale) è tangente alla circonferenza ed è passante per P(5;0).

Quindi il procedimento appena visto non permette (in questo caso) di determinare la retta tangente!

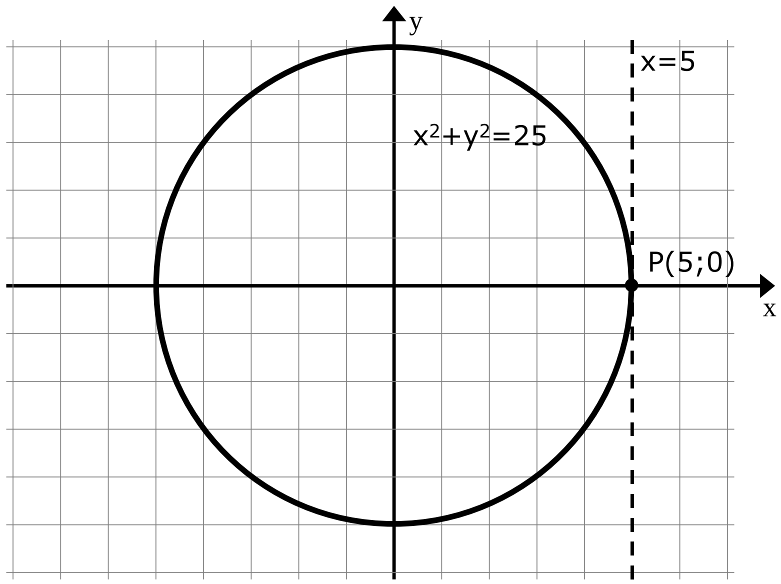


Figura 6.5
Retta verticale tangente a una conica.

Per risolvere i problemi suindicati c'è la necessità di trovare una formula che permetta di calcolare la retta tangente a una conica in un suo punto ***in ogni caso*** possibile.

Data la conica non degenere ***C***: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ e un suo punto $P(x_1,y_1)$ la retta tangente alla conica passante per il punto proprio P è:

$$x\left(ax_1+\frac{b}{2}y_1+\frac{d}{2}\right)+y\left(\frac{b}{2}x_1+cy_1+\frac{e}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}x_1+\frac{e}{2}y_1+f\right)=0 \tag{6.1}$$

Se il punto P è dato in coordinate omogenee (x_0,y_0,z_0) è possibile determinare la tangente alla conica passante per il punto improprio con la formula seguente:

$$x\left(ax_0+\frac{b}{2}y_0+\frac{d}{2}z_0\right)+y\left(\frac{b}{2}x_0+cy_0+\frac{e}{2}z_0\right)+z\left(\frac{d}{2}x_0+\frac{e}{2}y_0+fz_0\right)=0 \tag{6.2}$$

La dimostrazione di tali formule è omessa in quanto fa uso di argomenti che esulano dalla trattazione.

Esempio 6.4.2
Nell'esempio 6.4.1 non è stato possibile determinare la retta tangente alla conica passante per il punto dato utilizzando il procedimento studiato in geometria analitica.
Si mostra ora come, utilizzando la formula (6.1), sia possibile determinare la retta tangente alla conica $x^2+y^2-25=0$ per il suo punto P(5;0).
$a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$, $e=0$, $f=-25$, $x_1=5$, $y_1=0$.

Si applica la formula (6.1):

$$x\left(1\cdot5+\frac{0}{2}\cdot0+\frac{0}{2}\right)+y\left(\frac{0}{2}\cdot5+1\cdot0+\frac{0}{2}\right)+\left(\frac{0}{2}\cdot5+\frac{0}{2}\cdot0-25\right)=0$$

$$5x-25=0$$

$$x-5=0$$

Tale formula quindi permette di determinare le rette tangenti a una conica per un suo punto anche se tali rette sono verticali.

Esempio 6.4.3
Si determinino le rette tangenti alla conica $3x^2-4xy+8x+5=0$ passanti per i suoi punti impropri.

I – Ricerca dei punti all'infinito.

Si omogeneizza la conica e la si interseca con la retta impropria.

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 8xz + 5z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3x - 4y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

I punti impropri sono due: A(4,3,0) e B(0,1,0). Se la conica non è degenere è una iperbole.

II – Verifica se la conica è degenere.

Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$3x^2-4xy+8x+5=0$$

a=3, b=-4y+8, c=5

$$\Delta = (-4y + 8)^2 - 4(3)(5) = 16y^2 + 64 - 64y - 60 = 16y^2 - 64y + 4$$

Tale trinomio non è un quadrato perfetto. La conica è non degenere, dunque è una iperbole.

III – Ricerca delle rette tangenti per i punti impropri.

- A(4,3,0)

  La conica $3x^2-4xy+8x+5=0$ ha coefficienti: a=3, b=-4, c=0, d=8, e=0, f=5.

  Si applica la formula appena vista:

  $$x\left(3 \cdot 4 + \frac{-4}{2} \cdot 3 + \frac{8}{2} \cdot 0\right) + y\left(\frac{-4}{2} \cdot 4 + 0 \cdot 3 + \frac{0}{2} \cdot 0\right) + z\left(\frac{8}{2} \cdot 4 + \frac{0}{2} \cdot 3 + 5 \cdot 0\right) = 0$$

  $$-6x - 8y + 16z = 0$$

  $$-3x - 4y + 8z = 0$$

  $$3x + 4y - 8z = 0$$

  che, in coordinate affini, è:

  $$3x + 4y - 8 = 0$$

  La retta tangente è uno degli asintoti dell'iperbole.

- B(0,1,0)

  Si applica la formula (6.2):

  $$x\left(3 \cdot 0 + \frac{-4}{2} \cdot (1) + \frac{8}{2} \cdot 0\right) + y\left(\frac{-4}{2} \cdot 0 + 0 \cdot (1) + \frac{0}{2} \cdot 0\right) + z\left(\frac{8}{2} \cdot 0 + \frac{0}{2} \cdot 0 + 5 \cdot 0\right) = 0$$

  $$-2x = 0$$

  $$x = 0$$

  La retta tangente è l'altro asintoto dell'iperbole.

6.5 Polare

Le formule (6.1) e (6.2) permettono, dato un punto P appartenente alla conica *C*, di determinare la retta tangente alla conica *C* passante per P.
Ovviamente è possibile utilizzare le (6.1) e (6.2) anche con punti non appartenenti alla conica. In tal caso la retta che si ottiene non è la tangente alla conica ma una particolare retta detta polare.

Definizione: Dato un punto P e una conica *C* si dice **polare** del punto P la retta p determinata dalle formule (6.1) o (6.2). Il punto P è detto **polo** della retta p.

Si è quindi determinata, data una conica, una corrsipondenza tra punti del piano e rette del piano. Vale il seguente teorema:

<u>Teorema di reciprocità</u>
Sia p la polare di P e P il polo di p; sia a la polare di A e A il polo di a.
Se A∈p allora P∈a.

E' possibile utilizzare il teorema di reciprocità per determinare graficamente la polare di un punto.

Caso 1
Il punto P appartiene alla conica *C*. Questo caso è esattamente quello trattato nel paragrafo precedente, per cui:

- La polare di P è la retta t, tangente alla conica nel punto P.
- Se una retta t è tangente alla conica, il polo della retta t è il punto di tangenza P.

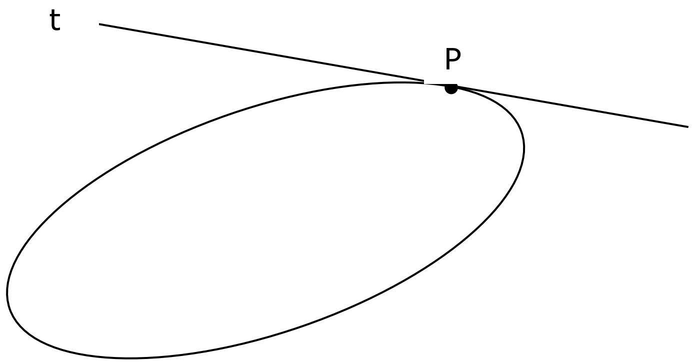


Figura 6.6
Polo e polare nel caso P∈*C*.

Caso 2
Il punto P è esterno alla conica *C*.

- Dato P esterno alla conica si vuole trovare la polare p. Si conducono per P le rette tangenti a *C*. Si trovano i due punti di contatto H e K. La retta passante per H e K è la polare di P.
- Data una retta p secante la conica *C* si vuole trovare il suo polo. Si trovano le due intersezioni tra la retta P e la conica *C* e le si chiama H e K. Si tracciano le tangenti alla conica *C* per H e K. Le due rette tangenti si intersecano nel polo P.

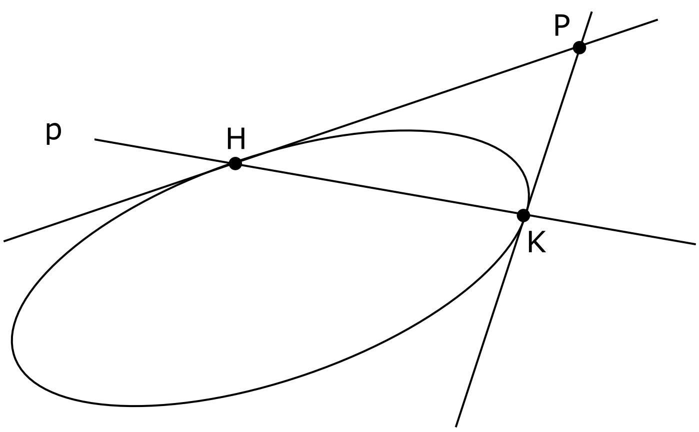


Figura 6.7
Polo e polare nel caso P esterno a *C* (p secante *C*).

Caso 3
Il punto P è interno alla conica $\mathcal{C}$.

- Dato P interno alla conica si vuole trovare la polare p. Si traccia una retta r passante per P e se ne trova il polo R col procedimento visto nel caso precedente. Si traccia una retta s passante per P e se ne trova il polo S con il procedimento visto nel caso precedente. La retta p passante per R ed S è la polare di P.
- Data una retta p esterna alla conica $\mathcal{C}$ si vuole trovare il suo polo. Si prendono due suoi punti R ed S. Si trovano, con il procedimento visto nel caso precedente, la retta r polare di R e la retta s polare di S. Il punto P di intersezione di r ed s è il polo della retta p.

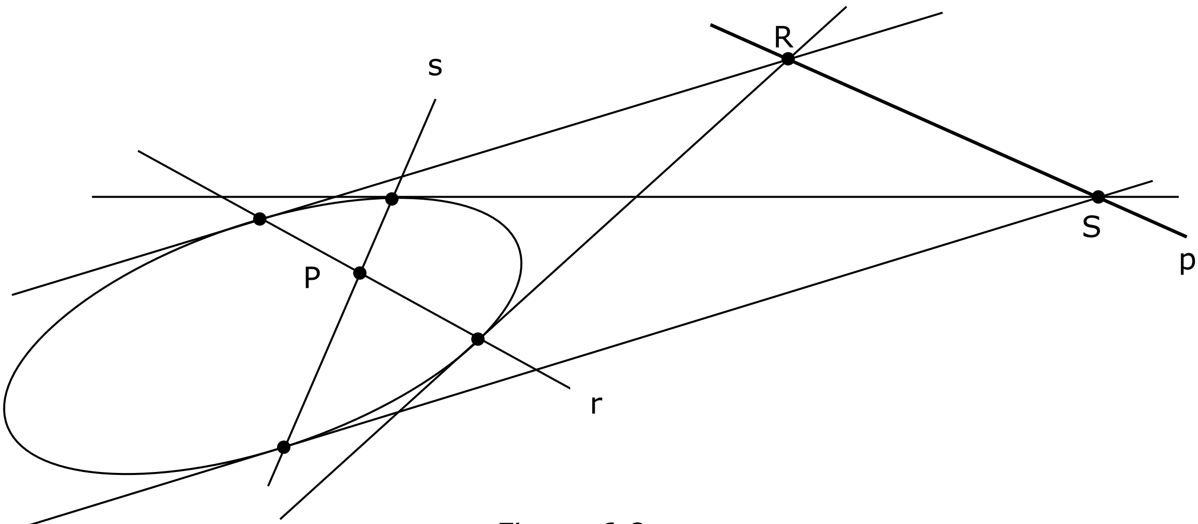


Figura 6.8
Polo e polare nel caso P interno a $\mathcal{C}$ (p esterna a $\mathcal{C}$).

Esempio 6.5.1
Trovare la polare alla conica $\mathcal{C}$: $2x^2-xy-y^2+x-y-1=0$ per il punto P(1;-3).
Per trovare la polare si utilizza la formula (6.1). Dal punto di vista algebrico non importa se il punto è interno alla conica, appartenente alla conica o esterno ad essa.
Si deve invece verificare che la conica sia non degenere.

I - Verifica che la conica è non degenere
Si calcola il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$2x^2-xy-y^2+x-y-1=0$$

$a=2$, $b=-y+1$, $c=-y^2-y-1$

$$\Delta=(-y+1)^2-4(2)(-y^2-y-1)=y^2+1-2y+8y^2+8y+8=9y^2+6y+9$$

Tale trinomio non è un quadrato perfetto. La conica è non degenere.
II – Ricerca della polare con la formula (6.1).
$a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$, $e=-1$, $f=-1$, $x_1=1$, $x_2=-3$

$$x\left(ax_1+\frac{b}{2}y_1+\frac{d}{2}\right)+y\left(\frac{b}{2}x_1+cy_1+\frac{e}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}x_1+\frac{e}{2}y_1+f\right)=0$$

$$x\left(2(1)+\frac{-1}{2}(-3)+\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{-1}{2}(1)-1(-3)+\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}(1)+\frac{-1}{2}(-3)-1\right)=0$$

$$x\left(2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+y\left(-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1\right)=0$$

$$4x+2y+1=0$$

Esempio 6.5.2
Trovare il polo della retta r: $3x+y-1=0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$: $x^2+xy+y^2+x-1=0$.

In questo caso si deve utilizzare la formula proiettiva (6.2). Per questo si omogeneizza l'equazione della retta r: 3x+y-z=0.
a=1, b=1, c=1, d=1, e=0, f=-1

$$x\left(ax_0+\frac{b}{2}y_0+\frac{d}{2}z_0\right)+y\left(\frac{b}{2}x_0+cy_0+\frac{e}{2}z_0\right)+z\left(\frac{d}{2}x_0+\frac{e}{2}y_0+fz_0\right)=0$$

$$x\left(1x_0+\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}z_0\right)+y\left(\frac{1}{2}x_0+1y_0+\frac{0}{2}z_0\right)+z\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{0}{2}y_0-1z_0\right)=0$$

Affinchè quest'ultima equazione rappresenti la retta r devono risultare uguali i relativi coefficienti.

$$\begin{cases}1x_0+\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}z_0=3\\ \frac{1}{2}x_0+1y_0+\frac{0}{2}z_0=1\\ \frac{1}{2}x_0+\frac{0}{2}y_0-1z_0=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}x_0\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x_0\right)=3\\ y_0=1-\frac{1}{2}x_0\\ z_0=1+\frac{1}{2}x_0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x_0=3\\ y_0=1-\frac{1}{2}x_0\\ z_0=1+\frac{1}{2}x_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=3-1=2\\ y_0=1-\frac{1}{2}(2)=0\\ z_0=1+\frac{1}{2}(2)=2\end{cases}$$

Il punto proiettivo trovato è (2,0,2). Dividendo tutti i coefficienti per 2 si ottiene il punto (1,0,1) che corrisponde al punto affine R(1,0) cercato.

6.6 Diametri

Con la (6.2) è possibile calcolare la polare di un punto in coordinate omogenee, quindi si può calcolare anche la polare di un punto improprio.
Si dice **diametro** la polare di un punto improprio.

Dato una conica *C*: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ e un punto improprio P_∞ (l,m,0) sostituendo le coordinate del punto nella (6.2) si ottiene:

$$x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)+z\left(\frac{d}{2}l+\frac{e}{2}m\right)=0 \quad (6.3)$$

che è l'equazione del **diametro della conica *C* coniugato al punto P_∞**.

Un punto improprio P_∞ è la direzione di un fascio di rette parallele. Due rette di tale fascio sono tangenti alla conica non degenere *C* in due punti distinti.
Il diametro è la retta passante per questi due punti, come mostrato nella figura 6.9.

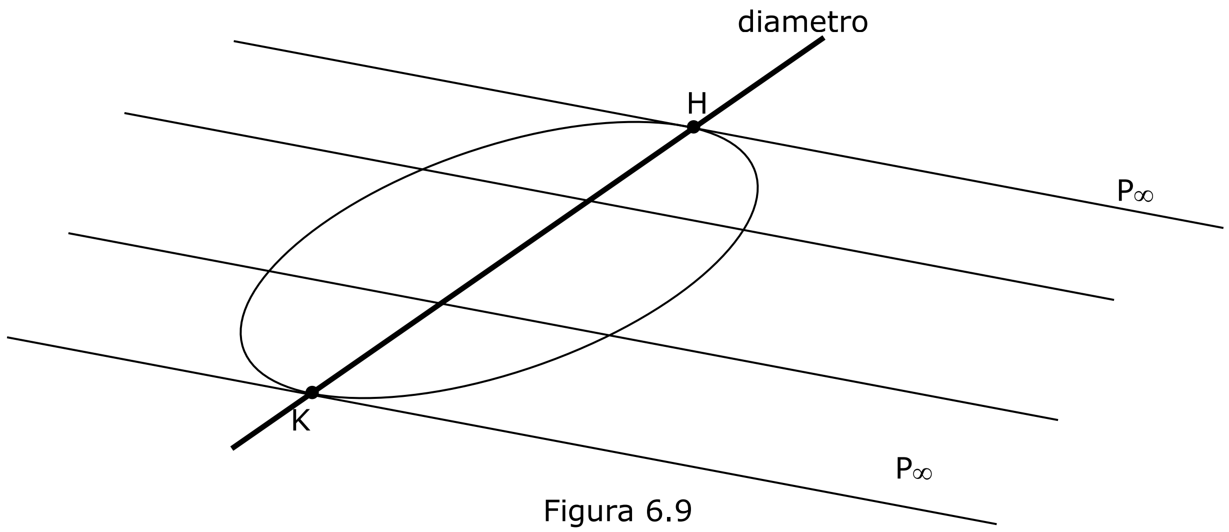


Figura 6.9

Diametro di una conica rispetto al punto improprio P_∞.

Esempio 6.6.1
Data la conica $\mathcal{C}$: $x^2+xy+y^2+x-1=0$ trovare il suo diametro rispetto al punto improprio P(1,-2,0).
Si applica la (6.3) con a=1, b=1, c=1, d=1, e=0, f=-1, l=1, m=-2.

$$x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)+z\left(\frac{d}{2}l+\frac{e}{2}m\right)=0$$

$$x\left(1(1)+\frac{1}{2}(-2)\right)+y\left(\frac{1}{2}(1)+1(-2)\right)+z\left(\frac{1}{2}(1)+\frac{0}{2}(-2)\right)=0$$

$$-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=0$$

$-3y+z=0,$ che in coordinate affini diventa:

$$-3y+1=0$$

6.7 Centro di simmetria di una conica a centro

Le coniche a centro sono l'iperbole e l'ellisse, in quanto hanno un centro di simmetria.
Per determinare il centro di una conica si utilizza il seguente teorema:

Teorema:
Data la conica generica di equazione

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

il centro di simmetria della conica, se esiste, è la soluzione del sistema

$$\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases}$$

Dim.
Si scriva la formula del diametro (6.3) in maniera differente raccogliendo x_0 e y_0.

$$x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)+z\left(\frac{d}{2}l+\frac{e}{2}m\right)=0$$

$$axl+\frac{b}{2}xm+\frac{b}{2}yl+cym+\frac{d}{2}zl+\frac{e}{2}zm=0$$

$$l\left(ax+\frac{b}{2}y+\frac{d}{2}z\right)+m\left(\frac{b}{2}x+cy+\frac{e}{2}z\right)=0 \qquad (6.4)$$

La (6.4) esprime i diametri come fascio di rette generato dalle rette d_1 e d_2:

$$d_1:\ ax+\frac{b}{2}y+\frac{d}{2}z=0 \quad \text{e} \quad d_2:\ \frac{b}{2}x+cy+\frac{e}{2}z=0 \qquad (6.5)$$

Tutte le rette di tale fascio, ossia tutti i diametri, passano per il punto di intersezione di tali rette generatrici. Moltiplicando le (6.5) per 2 e disomogeneizzando si ottiene la tesi.

$$\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases} \qquad (6.6)$$

Il sistema (6.6) si utilizza per determinate il **centro** della conica.

Esempio 6.7.1
Determinare il centro della conica $\mathcal{C}$: $x^2+xy+y^2+x-1=0$.

$$\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+y+1=0\\ x+2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(-2y)+y+1=0\\ x=-2y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-3y+1=0\\ x=-2y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{3}\\ x=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Il punto $C\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ è il centro della conica.

6.8 Assi di simmetria di una conica a centro

Dato un punto P_∞ (l,m,0) se ne vuole calcolare il diametro d_1.
Per la (6.3) il diametro ha equazione: $x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)+z\left(\frac{d}{2}l+\frac{e}{2}m\right)=0$.

Il diametro d_1, essendo una retta, ha un punto improprio Q_∞. Lo si trova intersecando il diametro con la retta impropria.

$$\begin{cases} x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)+z\left(\frac{d}{2}l+\frac{e}{2}m\right)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)=0 \tag{6.7}$$

Il punto improprio Q_∞ è dunque, in coordinate omogenee, $Q_\infty\left(\frac{b}{2}l+cm,-\left(al+\frac{b}{2}m\right),0\right)$.

Il diametro d_2 coniugato a $Q_\infty\left(\frac{b}{2}l+cm,-\left(al+\frac{b}{2}m\right),0\right)$ è ortogonale al diametro d_1 coniugato a P_∞ (l,m,0) se le direzioni dei punti impropri sono ortogonali.
Per la condizione di ortogonalità vista nel paragrafo 3.11 deve valere

$$l\left(\frac{b}{2}l+cm\right)-m\left(al+\frac{b}{2}m\right)=0$$

$$\frac{b}{2}l^2+clm-alm-\frac{b}{2}m^2=0$$

$$\frac{bl^2+2clm-2alm-bm^2}{2}=0$$

$$bl^2+2(c-a)lm-bm^2=0 \tag{6.8}$$

La (6.8) permette di individuare le direzioni di due diametri coniugati e ortogonali.

Definizione: due diametri coniugati e ortogonali sono detti **assi di simmetria** di una conica a centro.

Se la conica $\mathcal{C}$ è una circonferenza a=c=1, b=0, la condizione (6.8) diventa una identità, ossia tutti i valori di l ed m soddisfano la condizione; non ha del resto senso cercare gli infiniti assi di simmetria di una circonferenza. Se invece la conica è una iperbole o una ellisse la (6.7) permette di trovare le direzioni degli assi di simmetria.

Una volta ricavata la direzione degli assi di simmetria basta imporre il passaggio di essi per il centro della conica per ricavare le equazioni degli assi di simmetria.

Esempio 6.8.1
Data la conica xy+2x-y+2=0 determinarne gli assi di simmetria.

Nell'esempio 5.4.10 si è già classificata la conica $\mathcal{C}$ come iperbole, quindi si è certi che si tratta di una conica a centro. Se ne cerca il centro di simmetria, utilizzando la (6.6).
a=0, b=1, c=0, d=2, e=-1, f=2.

$$\begin{cases} 2ax+by+d=0 \\ bx+2cy+e=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

Il centro di simmetria è il punto C(1,-2), in coordinate omogenee (1,-2,0).

Si cerca orano le direzione degli assi ortogonali e coniugati con la (6.8).

$$bl^2+2(c-a)lm-bm^2=0$$

$$l^2-m^2=0$$

Si ha l=± m. Ponendo m=1 si ottiene l=± 1.

I punti impropri trovati sono P∞(1,1,0) e Q∞(-1,1,0).

Come visto nel capitolo 3 si cercano ora le rette passanti per il centro di simmetria di coefficienti angolari m_1=1 e m_2=-1.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ $\qquad$ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = 1(x - 1)$ $\qquad$ $y + 2 = -1(x - 1)$

$-x + y + 3 = 0$ $\qquad$ $x + y + 1 = 0$

Le rette trovate sono gli assi di simmetria dell'iperbole.

Esempio 6.8.2

Data la conica $x^2 + xy + 3y^2 + y - 2 = 0$ determinarne gli assi di simmetria.

Nell'esempio 5.4.3 si è già classificata la conica *C* come ellisse, quindi si è certi che si tratta di una conica a centro. Se ne cerca il centro di simmetria, utilizzando la (6.6).

a=1, b=1, c=3, d=0, e=1, f=-2.

$$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 6y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 6(-2x) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -11x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{11} \\ x = \frac{1}{11} \end{cases}$$

Il centro di simmetria è il punto: $C\left(\frac{1}{11}, -\frac{2}{11}\right)$

Si cercano le direzione degli assi ortogonali e coniugati con la (6.7).

$bl^2 + 2(c - a)lm - bm^2 = 0$

$l^2 + 4lm - m^2 = 0$

$l_{1,2} = -2m \pm \sqrt{4m^2 + m^2} = -2m \pm m\sqrt{5}$

Ponendo m=1 si ottengono $l_1 = -2 + \sqrt{5}$ e $l_2 = -2 - \sqrt{5}$.

I punti impropri trovati sono P∞($-2 + \sqrt{5}$,1,0) e Q∞($-2 - \sqrt{5}$,1,0), corrispondenti ai coefficienti angolari $\frac{1}{-2 + \sqrt{5}}$ e $\frac{1}{-2 - \sqrt{5}}$.

Si cercano ora le rette passanti per il centro di simmetria di coefficienti angolari $m_1 = \frac{1}{-2 + \sqrt{5}}$ e $m_2 = \frac{1}{-2 - \sqrt{5}}$, come già visto nel capitolo 3.

$y + \frac{2}{11} = \frac{1}{-2 + \sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{11}\right)$ $\qquad$ $y + \frac{2}{11} = \frac{1}{-2 - \sqrt{5}}\left(x - \frac{1}{11}\right)$

$y + \frac{2}{11} = \frac{1}{-2 + \sqrt{5}}x - \frac{1}{11\left(-2 + \sqrt{5}\right)}$ $\qquad$ $y + \frac{2}{11} = \frac{1}{-2 - \sqrt{5}}x - \frac{1}{11\left(-2 - \sqrt{5}\right)}$

$\frac{11y\left(-2 + \sqrt{5}\right) + 2\left(-2 + \sqrt{5}\right) = 11x - 1}{11\left(-2 + \sqrt{5}\right)}$ $\qquad$ $\frac{11y\left(-2 - \sqrt{5}\right) + 2\left(-2 - \sqrt{5}\right) = 11x - 1}{11\left(-2 - \sqrt{5}\right)}$

$11y\left(-2 + \sqrt{5}\right) - 4 + 2\sqrt{5} - 11x + 1 = 0$ $\qquad$ $11y\left(-2 - \sqrt{5}\right) - 4 - 2\sqrt{5} - 11x + 1 = 0$

$-11x + 11y\left(-2 + \sqrt{5}\right) - 3 + 2\sqrt{5} = 0$ $\qquad$ $-11x + 11y\left(-2 - \sqrt{5}\right) - 3 - 2\sqrt{5} = 0$

Le rette trovate sono gli assi di simmetria dell'ellisse.

6.9 Asse di simmetria di una parabola

Nel paragrafo 6.5 si è visto che la polare di un punto appartenente alla conica è proprio la retta tangente alla conica.

Si consideri come punto appartenente alla parabola il suo punto improprio P_∞, come già visto nella figura 4.1. La retta tangente al punto improprio della parabola è la retta impropria.

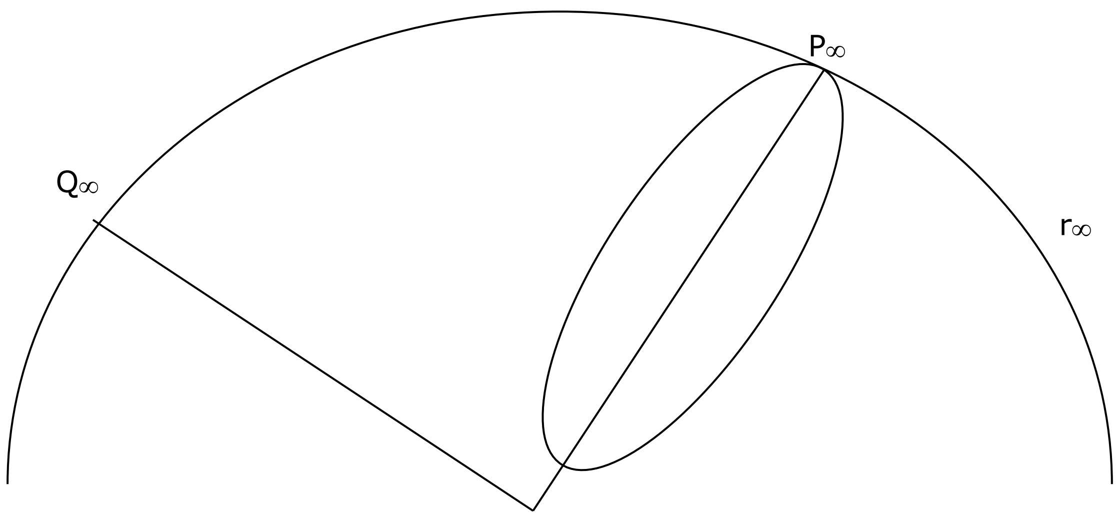


Figura 6.10
Asse della parabola

Si consideri il punto improprio Q_∞ perpendicolare al punto all'infinito P_∞ della parabola.

La polare di Q_∞ è l'asse della parabola.

Definizione
Si dice **asse** di una parabola la polare del punto improprio perpendicolare al punto improprio della parabola.

Intersecando l'equazione della parabola con il suo diametro si trova il vertice della parabola.

Esempio 6.9.1
Trovare l'asse e il vertice della parabola *C*: $x^2 - 4xy + 4y^2 - y + 1 = 0$

Per prima cosa si classifica la conica verificando che è una parabola.
Se ne trova il punto all'infinito, omogeneizzando e intersecando con la retta impropria.

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - yz + z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

$$(x - 2y)^2 = 0$$

Ponendo y=1 si ottiene x=2. Il punto improprio della conica è P_∞ (2,1,0). Se non è degenere è una parabola.

Si verifica che è non degenere, risolvendo l'equazione di secondo grado in x:
$x^2 - 4xy + 4y^2 - y + 1 = 0$ con a=1, b=-4y, c=$4y^2$-y+1.

$$x_{1,2}=\frac{4y\pm\sqrt{16y^2-4\left(4y^2-y+1\right)}}{2}=\frac{4y\pm\sqrt{16y^2-16y^2+4y-4}}{2}$$

Il discriminante è $\Delta=4y-4$, che non è un quadrato perfetto. La conica è non degenere e quindi è una parabola.

Il punto perpendicolare a P_∞ è Q_∞ (-1,2,0).

Utilizzando la (6.3) si trova il diametro rispetto a Q_∞.

$$x\left(al+\frac{b}{2}m\right)+y\left(\frac{b}{2}l+cm\right)+z\left(\frac{d}{2}l+\frac{e}{2}m\right)=0$$

$$x\left(1(-1)+\frac{-4}{2}(2)\right)+y\left(\frac{-4}{2}(-1)+4(2)\right)+z\left(\frac{0}{2}(-1)+\frac{-1}{2}(2)\right)=0$$

$$x(-1-4)+y(2+8)+z(-1)=0$$

$$-5x+10y-z=0$$

Questa è l'equazione dell'asse della parabola. La si interseca con la parabola per trovare il vertice. Poiché il vertice è l'unico punto proprio di intersezione si risolve il sistema tra le equazioni affini di parabola e asse.

$$\begin{cases}-5x+10y-1=0\\ x^2-4xy+4y^2-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-5}{-5}x=\frac{-10}{-5}y+\frac{1}{-5}\\ x^2-4xy+4y^2-y+1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2y-\frac{1}{5}\\ \left(2y-\frac{1}{5}\right)^2-4\left(2y-\frac{1}{5}\right)y+4y^2-y+1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2y-\frac{1}{5}\\ 4y^2-\frac{4}{5}y+\frac{1}{25}-8y^2+\frac{4}{5}y+4y^2-y+1=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2y-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{25}-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y-\frac{1}{5}=2\left(\frac{26}{25}\right)-\frac{1}{5}=\frac{52}{25}-\frac{1}{5}=\frac{52-5}{25}=\frac{47}{25}\\ y=\frac{26}{25}\end{cases}$$

Il punto $\left(\frac{47}{25},\frac{26}{25}\right)$ è il vertice della parabola.

6.10 Grafico di una iperbole

Una volta classificata una conica come iperbole è possibile tracciarne il grafico con il procedimento seguente:

- Si trova il centro dell'iperbole con la formula (6.6)
  $$\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases}$$
- Si trovano le direzioni degli assi di simmetria con la (6.8)
  $$bl^2+2(c-a)lm-bm^2=0$$
- Si trovano gli assi di simmetria determinando le rette passanti per il centro di simmetria e di direzioni trovate al passo precedente.
- Si trovano gli asintoti determinando le rette passanti per il centro di simmetria e di direzione i punti impropri dell'iperbole.
- Si trovano i vertici intersecando gli assi di simmetria dell'iperbole con l'equazione dell'iperbole.
- Se ne trovano alcuni punti, per esempio le intersezioni con gli assi cartesiani.

6.11 Grafico di una ellisse

Una volta classificata una conica come ellisse è possibile tracciarne il grafico con il procedimento seguente:

- Si trova il centro dell'ellisse con la formula (6.6)
  $$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$
- Si trovano le direzioni degli assi di simmetria con la (6.8)
  $$bl^2 + 2(c-a)lm - bm^2 = 0$$
- Si trovano gli assi di simmetria determinando le rette passanti per il centro di simmetria e di direzioni trovate al passo precedente.
- Si trovano i vertici intersecando gli assi di simmetria dell'ellisse con l'equazione dell'ellisse.
- Se ne trovano alcuni punti, per esempio le intersezioni con gli assi cartesiani.

6.12 Grafico di una parabola

Una volta classificata una conica come parabola è possibile tracciarne il grafico con il procedimento seguente:

- Si trova il punto improprio della parabola intersecandone l'equazione proiettiva con la retta impropria.
- Si trova l'asse di simmetria, che è la polare del punto improprio perpendicolare al punto improprio della parabola. Per far ciò utilizza la formula (6.3).
  $$x\left(al + \frac{b}{2}m\right) + y\left(\frac{b}{2}l + cm\right) + z\left(\frac{d}{2}l + \frac{e}{2}m\right) = 0$$
- Si trova il vertice intersecando l'asse di simmetria della parabola con l'equazione della parabola.
- Se ne trovano alcuni punti, per esempio le intersezioni con gli assi cartesiani.