H3. Statistica I

H3.1 Introduzione

La statistica è la scienza che studia i fenomeni collettivi.

Già dai tempi antichi i governanti hanno avuto bisogno di informazioni per prendere le decisioni più opportune.
A questo scopo si utilizzarono (e ancora si utilizzano) i CENSIMENTI.
Si ha notizia storica di rilevamenti statistici già da 4000 anni fa:

- In Cina nel 2000 a.c. l'imperatore YU ordinò rilevazioni statistiche per scopi fiscali
- Gli Egizi introdussero il CATASTO, ossia un inventario dei beni immobili, così come esiste ancora oggi.
- Nella Bibbia viene menzionato il censimento nel momento dell'esodo dell'Egitto. Un altro avvenne quando Gesù aveva 13 anni (se ne parla in un romanzo storico uscito lo scorso anno)
- Nel 555 a.c. Servio Tullio, re di Roma, istituisce il censimento ogni 5 anni. Gli addetti al censimento venivano chiamati censori.

Nel medioevo caddero in disuso ma dal 1790 (Stati Uniti d'America) furono ripresi e dal XIX secolo in poi in tutta Europa divennero regolari.
In Italia i censimenti vengono effettuati ogni 10 anni dal 1861 (quindi negli anni che finiscono per uno). L'ultimo è stato nel 2011. Tutte le famiglie italiane devono compilare alcuni moduli i cui dati verranno poi elaborati dall'ISTAT. I dati vengono pubblicati e sono accessibili anche via internet sul sito dell'ISTAT.

La STATISTICA DESCRITTIVA tratta le metodologie per la raccolta dei dati.
La STATISTICA DEDUTTIVA elabora i dati. I risultati dell'elaborazione possono servire a prendere decisioni. Per elaborare i dati viene utilizzato anche il calcolo delle probabilità.
Un esempio classico è quello delle tavole di sopravvivenza elaborate nell'800, utilizzate ancora oggi per calcolare il costo delle assicurazioni sulla vita. (a tal scopo sono utilizzati anche i logaritmi e gli esponenziali).

La statistica studia i fenomeni collettivi, ossia i fenomeni che riguardano gli elementi di una popolazione.
Non si intende per popolazione la popolazione umana, ma un qualunque insieme all'interno del quale si studia un fenomeno.
Sono fenomeni collettivi, ad esempio:

- La scelta della birra preferita da uomini e donne di una città (la popolazione è l'insieme degli abitanti della città).
- L'altezza degli italiani (la popolazione è l'insieme degli italiani).
- Il numero di bambini per famiglia a Udine (la popolazione è l'insieme delle famiglie di Udine)
- Il funzionamento di lampadine di una fabbrica (la popolazione è l'insieme delle lampadine prodotte dalla fabbrica).

La popolazione è quindi l'insieme su cui si effettua l'indagine.
Ogni elemento della popolazione è detto unità statistica.

I caratteri, che possono essere qualitativi (espressi a parole) o quantitativi (espressi a numeri), sono le caratteristiche delle unità di popolazione.
Ad esempio, riferendosi a un essere umano, si possono considerare i seguenti caratteri:

- Qualitativi: sesso, stato civile, film preferito, ecc.
- Quantitativi: altezza, peso, età, ecc.

Riferendoci per esempio allo stato civile sono dette modalità i valori possibili del carattere: celibe, nubile, coniugato, divorziato, vedovo, ecc.
Per quanto riguarda i caratteri quantitativi non si usa la parola modalità ma si usa la parola valori. Ad esempio il valore dell'altezza può essere 175 cm.

Un'indagine è detta completa se si riferisce a tutti gli elementi della popolazione (ad esempio il censimento). In questo caso la popolazione è detta universo.
Un'indagine è parziale se si riferisce solo a una parte degli elementi della popolazione (ad esempio i sondaggi). In questo caso la popolazione è detta campione.

FASI DELL'INDAGINE STATISTICA

- Individuazione del fenomeno su cui indagare.
- Scelta della popolazione o di una sua parte, dei caratteri da rilevare, ecc.
- Modalità di rilevamento dei dati.
- Raccolta dei dati.
- Spoglio dei dati.
- Elaborazione e rappresentazione dei dati..
- Interpretazione dei dati

I dati vengono spesso rappresentati in tabelle.

Viene detta frequenza assoluta il numero di casi per cui si verifica una modalità.
La frequenza relativa è il rapporto tra frequenza assoluta e numero totale dei casi e viene espressa in percentuale.

Ecco adesso un esempio svolto di indagine statistica.

Esempio H3.1:
Una fabbrica deve produrre un nuovo modello di scarpe. Per questa ragione deve decidere quante produrne per ogni misura. Decide quindi di effettuare una indagine statistica che possa aiutarla a prendere questa decisione.

Si decide di non chiedere informazioni a tutti gli abitanti d'Italia ma solo a una parte (detta campione). Si decide di utilizzare un campione di 10000 donne dai 15 ai 40 anni di età. Si decide di richiedere:

- quante scarpe comprano ogni anno queste diecimila persone.
- quale è la misura di scarpe.
- le marche che preferiscono.
- il prezzo massimo che sono disposti a spendere per un paio di scarpe,…… eccetera.

Viene quindi deciso di effettuare telefonicamente il rilevamento; alcuni telefonisti chiameranno 10000 donne sorteggiate a caso dall'elenco telefonico per rilevare le risposte alle domande indicate precedentemente.
I dati vengono quindi ordinati e raccolti in tabelle.
Ad esempio potrebbe venir fuori questa tabella, (relativamente al numero di scarpe):

Misura piede	Numero donne (frequenza assoluta)	Frequenza relativa (freq. ass./totale)	Percentuale (freq. rel. *100)
31	73	0.0073	0.73%
32	187	0.0187	1.87%
33	312	0.0312	3.12%
34	493	0.0493	4.93%
35	915	0.0915	9.15%
36	1584	0.1584	15.84%
37	2018	0.2018	20.18%
38	2350	0.2350	23.5%
39	1415	0.1415	14.15%
40	438	0.0438	4.38%
41	215	0.0215	2.15%
totali	10000	1	100%

Fig. H3.1
Tabella: numeri di piede di un campione di 10000 donne.

I dati della tabella possono essere rappresentati graficamente in uno dei modi che si vedranno nel paragrafo successivo. Ecco, ad esempio, un istogramma.

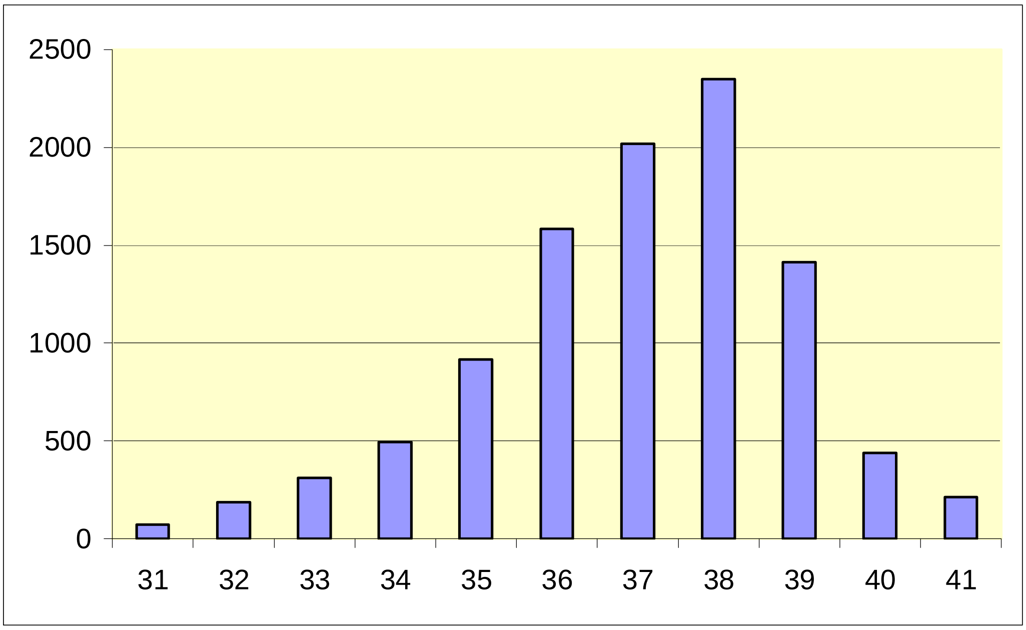


Fig. H3.2
Istogramma: numeri di piede di un campione di 10000 donne.

In base ai dati raccolti la fabbrica di scarpe potrà stabilire quante scarpe produrre di ogni misura e il prezzo di vendita.

H3.2 Rappresentazioni grafiche

Leggere i dati da una tabella non è sufficiente per capire veramente il loro significato. Le rappresentazioni grafiche servono a dare una visione più chiara dei dati.
A seconda del tipo di dati può essere più favorevole la scelta di una rappresentazione piuttosto che un'altra, e bisogna essere in grado di scegliere la più adatta. Una volta decisa la rappresentazione diventa importante anche la scelta della scala per rappresentare in maniera migliore e più leggibile i dati.

DIAGRAMMA CARTESIANO.

Esempio H3.2:
Nella tabella è rappresentato il numero di bambini maschi con meno di un anno di età dal 1992 al 2001 (dati da demo.istat.it).

Anno	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
	262256	293100	281875	274171	269122	273472	273404	270959	272792	274518

Fig. H3.3
Tabella: numero di bambini maschi con meno di un anno di età in Italia.

Non è così evidente il significato di questi dati solo osservando la tabella. Osservando invece la figura H3.4 si nota subito che nel 1993 c'è stato un aumento di bambini seguito da un calo fino al 1996; successivamente la situazione si è pressoché stabilizzata.

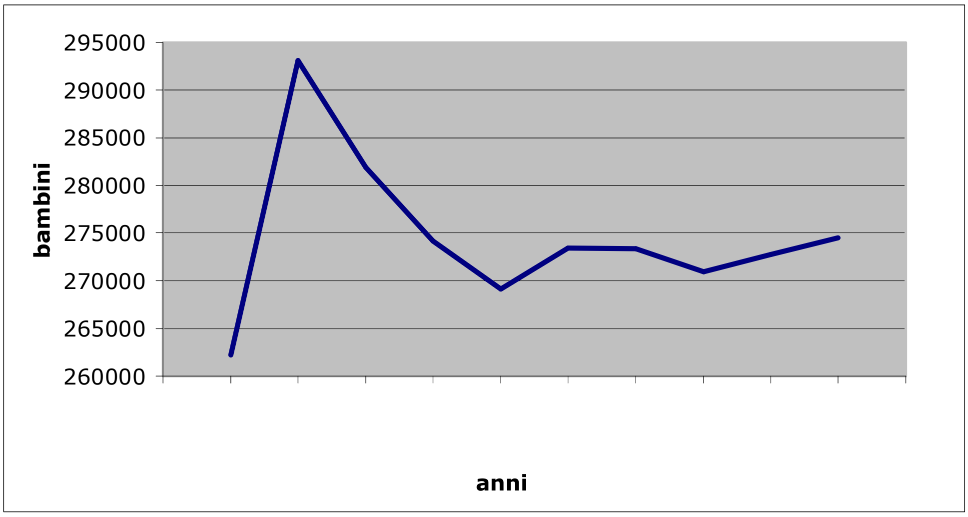


Fig. H3.4
Diagramma cartesiano: numero di bambini maschi con meno di un anno di età in Italia.

N.B. Non sbagliare la scala nella rappresentazione!

ISTOGRAMMA.

Gli istogrammi sono diagrammi a barre.

Esempio H3.3:
Sia data la tabella con il numero di abitanti (in migliaia) delle regioni italiane del nord al 25.10.81 (dati Istat).
Forse non risulta così evidente la differenza di popolazione tra la Lombardia e il resto delle regioni del nord; il grafico permette anche in questo caso una visione d'insieme più chiara.

Regione	Abitanti
Piemonte	4479
Valle d'Aosta	112
Lombardia	8892
Trentino alto Adige	873
Veneto	4345
Friuli V.G.	1234
Liguria	1808
Emilia - Romagna	3958

Fig. H3.5
Tabella: abitanti delle regioni dell'Italia del nord (1981).

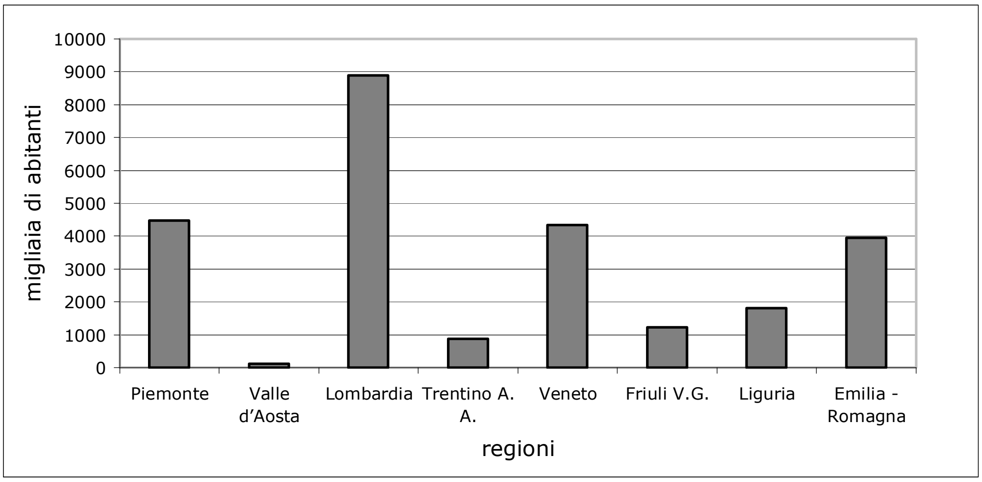


Fig. H3.5
Istogramma: abitanti delle regioni dell'Italia del nord (1981).

IDEOGRAMMA.

Un ideogramma rappresenta una grandezza mediante simboli che danno l'idea del carattere del fenomeno.
Per le nascite di bambini si usano i bebè, per la vendita di auto si usano delle macchinine, ecc.

<u>Esempio H3.4:</u>
Spese per armamenti nel mondo; ecco gli stati che hanno speso di più nell'anno 2004.
Ogni pistola indica 10 miliardi di dollari. – NO COMMENT -

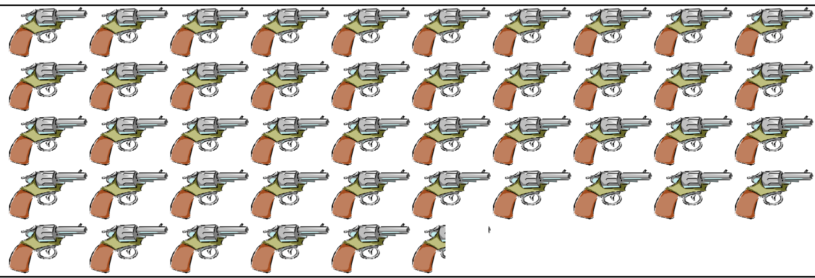
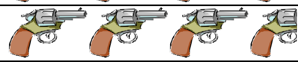
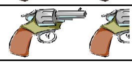
stato	miliardi di dollari	
Stati Uniti	455,3	
Gran Bretagna	47,4	
Francia	46,2	
Giappone	42,4	
Cina	35,4	
Germania	33,9	
Italia	27,8	
Russia	19,4	
Arabia Saudita	19,3	
Corea del sud	15,5	
India	15,1	
Israele	10,7	
Canada	10,6	
Turchia	10,1	
Australia	10,1	

Fig. H3.6
Ideogramma: spese militari nell'anno 2004.

AREOGRAMMA o DIAGRAMMA A SETTORI CIRCOLARI (detto diagramma a torta).

Per rappresentare i dati di una tabella si può suddividere un cerchio in fette proporzionali alla frequenza relativa.
Pertanto una circonferenza intera (360°) rappresenta il 100%.
Per calcolare l'ampiezza di una 'fetta' conoscendo la frequenza relativa (in percentuale) si dovrà risolvere la seguente proporzione:

$$\boxed{\text{AMPIEZZA} : 360° = \text{frequenza relativa} : 100\%}$$

Ecco alcune equivalenze che seguono la proporzione appena vista e i settori circolari che le rappresentano.

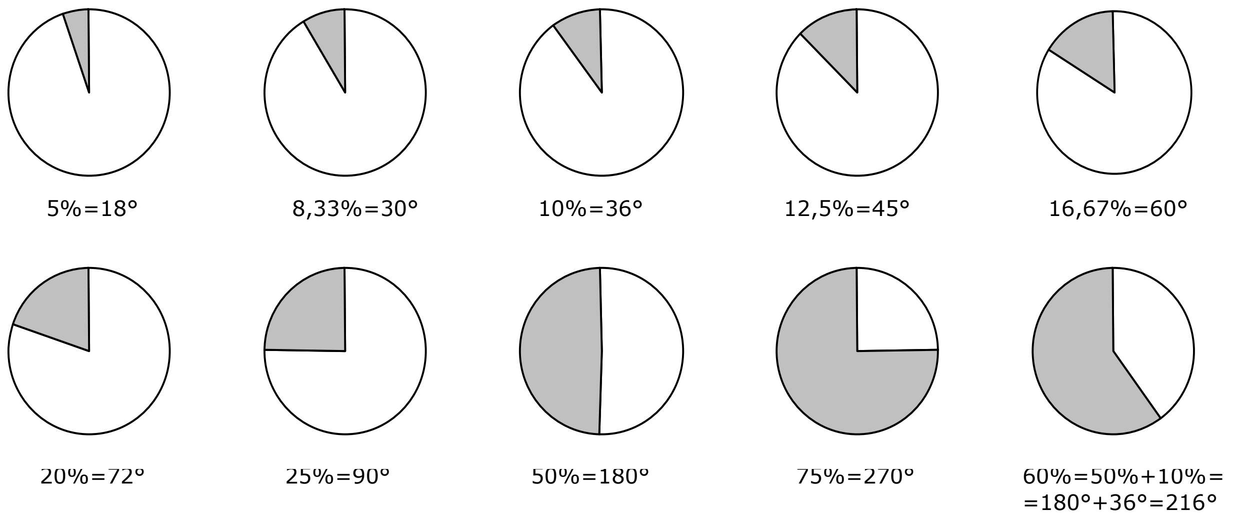


Fig. H3.7
Settori circolari: esempi.

<u>Esempio H3.5:</u>
Mezzi di trasporto utilizzati per venire a scuola dalla classe 4°B composta da 20 allievi.

mezzo	allievi	percentuale
piedi	4	20%
bus	9	45%
treno	3	15%
motorino	2	10%
auto	2	10%

Fig. H3.8
Tabella: mezzi di trasporto utilizzati dagli allievi della 4°B.

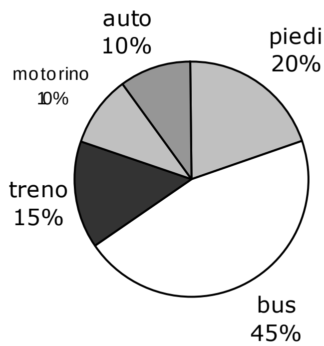


Fig. H3.9
Diagramma a torta: mezzi di trasporto utilizzati dagli allievi della 4°B.

CARTOGRAMMA

Un cartogramma è un diagramma nel quale si utilizza una carta geografica su cui vengono visualizzati con simboli, colori o altro che rappresenti i valori del fenomeno osservato.

<u>Esempio H3.6</u>
Per rappresentare la densità di popolazione in Italia per regioni si può utilizzare un cartogramma.
Il colore più scuro indica una maggior densità di popolazione (da geodemo di demo.istat.it).

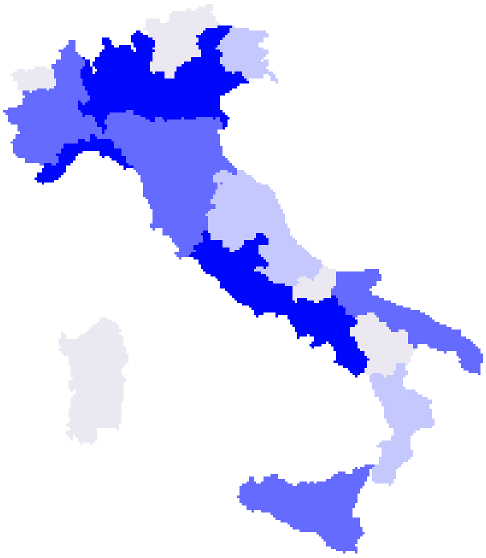


Fig. H3.10
Cartogramma: densità di popolazione in Italia.

H3.3 Indici di posizione centrale

Alcuni fenomeni tendono a raggrupparsi intorno ad un valore; nell'esempio 1 nel paragrafo H3.1 si nota anche senza calcolare nulla che i piedi delle donne hanno una misura media di 37 o 38. Ma quale è il valore medio esatto?
Oltre alla **media** esistono altri due indici di posizione centrale che hanno una loro importanza: la **mediana** e la **moda**.
Per ognuno degli indici di posizione centrale si indica il metodo di calcolo nei due casi seguenti:

- i dati sono valori singoli.
- i dati sono organizzati in tabelle di frequenza.

MEDIA.

Primo metodo: I dati sono valori singoli.
La media di n valori $x_1, x_2, \ldots, x_N$ si calcola con la seguente formula:

$$\boxed{\text{Media} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}}.$$

N rappresenta il numero dei valori di cui si deve calcolare la media.

Esempio H3.7:
Nei primi 4 mesi dell'anno la casa automobilistica 'bejod' ha venduto in Italia un certo numero di auto come segue.
A gennaio ha venduto 15873 auto.
A febbraio ha venduto 19622 auto.
A marzo ha venduto 8758 auto.
Ad aprile ha venduto 13298 auto.
La media, come indicato dalla formula precedente, si calcola sommando i 4 valori e dividendo il totale per 4.

$$\text{Media} = \frac{15873 + 19622 + 8758 + 13298}{4} = \frac{57551}{4} = 14387{,}75\,.$$

La casa automobilistica ha venduto in media 14387,75 auto al mese.

Esempio H3.8:
A Fusine, località di montagna vicino Tarvisio, fa molto freddo. Ecco le temperature registrate a Fusine alle 13 nell'ultima settimana.

Lunedì	2°
Martedì	-1°
Mercoledì	-3°
Giovedì	4°
Venerdì	3°
Sabato	0°
Domenica	2°

Quale è stata la temperatura media nell'ultima settimana a Fusine?
La media si calcola sommando i 7 valori e dividendo il totale per 7.

$$\text{Media} = \frac{2 - 1 - 3 + 4 + 3 + 0 + 2}{7} = \frac{7}{7} = 1\,.$$

La temperatura media a Fusine alle 13 nell'ultima settimana è stata di 1°.

<u>Secondo metodo: I dati sono organizzati in tabelle di frequenza</u>

<u>Esempio H3.9:</u>
La seguente tabella rappresenta i voti degli studenti ad un esame universitario (minimo voto 18, massimo voto 30).

Voto (valori)	numero allievi (frequenza)	Frequenze * valori
18	34	612
19	6	114
20	14	280
21	19	399
22	11	242
23	8	184
24	12	288
25	18	450
26	14	364
27	19	513
28	24	672
29	2	58
30	21	630
totale	202	4806

Fig. H3.11
Tabella: voti di un gruppo di studenti a un esame universitario.

$$\text{Media} = \frac{4806}{202} = 23{,}79 .$$

Il voto medio degli studenti che hanno sostenuto e superato l'esame è stato 23,79.

<u>PROCEDIMENTO UTILIZZATO:</u>

- Si crea una nuova colonna frequenze · valori, ottenuta moltiplicando tra loro i valori delle prime due colonne.
- Si sommano le frequenze.
- Si sommano i valori della colonna frequenze * valori.
- Si divide la somma delle frequenze per valori per la somma delle frequenze.
- Nella formula che segue x_1 è il primo valore e f_1 è la sua frequenza, x_2 è il secondo valore e f_2 è la sua frequenza eccetera. n rappresenta il numero dei gruppi. N la somma delle frequenze che è anche il numero totale dei valori di cui si deve calcolare la media.

$$\boxed{\text{Media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{N}}$$

<u>Spiegazione:</u>
La frequenza 34 del voto 18 vuol dire che 34 allievi hanno preso 18, 6 hanno preso 19 ecc.
Se usassimo il metodo per valori singoli si potrebbe scrivere:

$$\frac{\overbrace{18+\ldots+18}^{34\text{ volte}}+\overbrace{19+\ldots+19}^{6\text{ volte}}+\overbrace{20+\ldots+20}^{14\text{ volte}}+\overbrace{21+\ldots+21}^{19\text{ volte}}+\ldots\ldots+\overbrace{26+\ldots+26}^{14\text{ volte}}+\overbrace{27+\ldots+27}^{19\text{ volte}}+\overbrace{28+\ldots+28}^{24\text{ volte}}+\overbrace{29+\ldots+29}^{2\text{ volte}}+\overbrace{30+\ldots+30}^{21\text{ volte}}}{\text{il numero totale degli studenti ossia: } 34+6+14+19+11+8+12+18+14+19+24+2+21} =$$

$$= \frac{18\cdot34+19\cdot6+20\cdot14+21\cdot19+22\cdot11+23\cdot8+24\cdot12+25\cdot18+26\cdot14+27\cdot19+28\cdot24+29\cdot2+30\cdot21}{202} =$$

$$= \frac{612+114+280+399+242+184+288+450+364+513+672+58+630}{202} = \frac{4806}{202} = 23{,}79.$$

Il secondo metodo visto è perciò una scorciatoia del metodo per valori singoli che per molti casi è un metodo scomodo e lungo.

Esempio H3.10 - media ponderata.
Utilizzando un'asta di lunghezza 5 metri si mettono alle due estremità un peso di 6 kg ed uno di 4 kg come in figura.

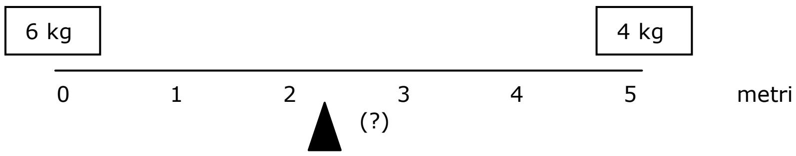


Fig. H3.12
Media ponderata e equilibrio.

Dove si deve mettere il piolo affinché l'asta risulti in equilibrio?
Si deve calcolare una media pesata. Il peso di 6kg è sul valore 0, il peso di 4kg è sul valore 5. La somma dei pesi è 10.
$\text{Media} = \frac{0 \cdot 6 + 5 \cdot 4}{10} = \frac{0+20}{10} = \frac{20}{10} = 2$ pertanto se il piolo viene messo sul numero 2 l'asta sarà in equilibrio.

Esempio H3.11: media ponderata.
L'insegnante di Italiano ha deciso che per quest'anno sarà più importante lo scritto rispetto all'orale. Non verrà perciò calcolata la media tra scritto e orale per decidere la media finale, ma lo scritto avrà peso 70% e l'orale 30%.
La somma dei pesi è ovviamente 100%.
Se Anastasia ha 4½ in scritto e 7½ in orale quale sarà la sua media finale?

$$\text{Media} = \frac{4½ \cdot 70 + 7½ \cdot 30}{100} = \frac{315+225}{100} = \frac{540}{100} = 5{,}4 .$$

La media di Anastasia sarà pertanto di 5,4.

Esempio H3.12: che schifo di media!!!
In una ditta di lampadari ci sono 15 dipendenti. Uno (il dirigente) guadagna 136000€ al mese, gli altri 1000€ al mese.
Qual è lo stipendio medio nella ditta?

Si devono sommare gli stipendi e dividere per 15.

$$\frac{136000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000+1000}{15} = \frac{150000}{15} =$$

=10000; in questa ditta si guadagnano 10000€ al mese.
E' evidente che in questo caso la media non è rappresentativa dello stipendio medio.
Si pensi solo che si potrebbe dire "vieni a lavorare da noi, lo stipendio medio è di 10000€ al mese", ed è vero!
E poi quando lo sfortunato di turno va a lavorare lì si ritrova uno stipendio di 1000€ al mese………
E' per questa ragione che in certi casi non si usa la media ma si utilizzano altri indici di posizione centrale come la mediana o la moda.

MEDIANA.

Per trovare la mediana si mettono in ordine tutti i valori e si prende quello in mezzo. Se i valori sono in numero pari si fa la media tra i due valori in mezzo.

Primo metodo: I dati sono valori singoli.

Esempio H3.13: calcolo della mediana con un numero dispari di valori.
Si riprenda l'esempio 8 con le temperature di Fusine: 2°, -1°, -3°, 4°, 3°, 0°, 2°
Si mettono in ordine tali valori dal più piccolo al più grande: -3°, -1°, 0°, 2°, 2°, 3°, 4°.

Il valore in mezzo è 2°.

La mediana è 2°.
Poiché i valori sono 7 il valore in mezzo è il quarto.
L'operazione è $\frac{7}{2}$=3,5 e si approssima al numero superiore ossia 4.

Se i valori fossero stati 2315 avrei dovuto calcolare $\frac{2315}{2}$=1157.5 perciò avrei dovuto prendere il 1158mo valore.

Esempio H3.14: calcolo della mediana con un numero pari di valori.
Si riprenda l'esempio 7 con le auto vendute dalla casa automobilistica, ossia:
gennaio 15873 auto, febbraio 19622 auto, marzo 8758 auto, aprile 13298 auto.
Per calcolare la mediana si mettono in ordine i valori dal più piccolo al più grande.
8758 $\underbrace{13298 \quad 15873}$ 19622

Si calcola la media dei due valori in mezzo, ossia $\frac{13298+15273}{2}$=14585,5. La mediana è 14585,5.

Poiché i valori erano quattro abbiamo preso il secondo e il terzo. Si calcola $\frac{4}{2}$=2 quindi si prende il secondo e quello che segue ossia il terzo.
Se i valori fossero stati 286 si sarebbe calcolato $\frac{286}{2}$=143 e si sarebbe fatta la media del 143mo e del 144mo valore.

Secondo metodo: I dati sono organizzati in tabelle di frequenza.

Esempio H3.15:
Sia data la seguente tabella con le misure di reggiseno vendute da una merceria nel mese di ottobre 2003.

misura (valori)	reggiseni venduti (freq.)	somma progressiva delle frequenze	
1	18	18	dal 1^ al 18^
2	48	66	dal 19^ al 66^
3	52	118	dal 67^ al 118^
4	16	134	dal 119^ al 134^
5	11	145	dal 135^ al 145^
6	6	151	dal 146^ al 151^

Fig. H3.13
Tabella: vendite di reggiseni in una merceria.

Si aggiunge alla tabella una colonna con la somma progressiva delle frequenze.

Poiché i valori sono 151 e $\frac{151}{2}$ =75,5 per trovare la mediana si deve prendere il 76mo valore.

Poiché il 76mo valore si trova tra il 67mo e il 118mo la mediana è 3.

N.B. L'errore classico che gi insegnanti devono correggere durante le verifiche è che l'allievo confonde il valore con la sua frequenza. Si stia dunque attenti al fatto che la mediana (nell'esempio appena svolto) è il valore 3, NON E' LA FREQUENZA 52.

Esempio H3.16:
Si riprenda l'esempio H3.9 con i voti degli studenti ad un esame universitario.

voto (valori)	numero allievi (freq.)	somma progr. delle frequenze	
18	34	34	dal 1^ al 34^
19	6	40	dal 35^ al 40^
20	14	54	dal 41^ al 54^
21	19	73	dal 55^ al 73^
22	11	84	dal 74^ al 84^
23	8	92	dal 85^ al 92^
24	12	104	dal 93^ al 104^
25	18	122	dal 105^ al 122^
26	14	136	dal 123^ al 136^
27	19	155	dal 137^ al 155^
28	24	179	dal 156^ al 179^
29	2	181	dal 180^ al 181^
30	21	202	dal 182^ al 202^

Fig. H3.14
Tabella: voti di studenti a un esame universitario.

Anche in questo caso si aggiunge alla tabella una colonna con la somma progressiva delle frequenze.

Poiché i valori sono 202 e $\frac{202}{2}$ =101 per trovare la mediana si deve calcolare la media tra il 101mo e il 102mo valore.

Poiché il 101mo valore e il 102mo valore sono entrambi 24 la mediana è 24. Se fossero stati diversi si sarebbe dovuta calcolare la loro media.
Come già detto precedentemente attenzione: la mediana è il valore 24, NON E' LA FREQUENZA 12.

Esempio H3.17:
Si riprenda l'esempio H3.12.
In una ditta di lampadari ci sono 15 dipendenti. Uno guadagna 136000€ al mese, gli altri 1000€ al mese.
Qual è lo stipendio medio nella ditta? Come già visto è' meglio usare la mediana piuttosto che la media.

Si mettono in ordine i 15 valori e si prende l'ottavo ($\frac{15}{2}$ =7,5 e si approssima all'intero superiore).

1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	136000
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

L'ottavo valore è 1000.
La mediana è 1000€, che è in questo caso sicuramente un valore più rappresentativo della media per indicare lo stipendio medio dei dipendenti della ditta.

MODA

La moda è il valore corrispondente alla frequenza più alta.
In questo caso se anche si hanno valori singoli per capire qual è la frequenza più alta è conveniente organizzarli sotto forma di tabella.

Esempio H3.18:
Si riprenda l'es. H3.8 con le temperature di Fusine: 2°, -1°, -3°, 4°, 3°, 0°, 2° e si mettano tali valori in tabella.

Temp.	Frequenza
-3°	1
-1°	1
0°	1
2°	2
3°	1
4°	1

Fig. H3.15
Tabella: temperature a Fusine nell'ultima settimana.

La frequenza più alta è 2.
Il valore corrispondente è 2°.
La moda è 2°.

Esempio H3.19:
Si riprenda l'esempio H3.9 con i voti degli studenti ad un esame universitario.

Voto (valori)	numero allievi (frequenza)
18	34
19	6
20	14
21	19
22	11
23	8
24	12
25	18
26	14
27	19
28	24
29	2
30	21

Fig. H3.16
Tabella: voti degli studenti a un esame universitario.

La frequenza più alta è 34.
Il valore corrispondente è 18.
La moda è 18.

H3.4 Indici di dispersione

Per introdurre i concetti di omogeneità e di dispersione si consideri il seguente esempio.

Esempio H3.20:
3 gruppi di 12 studenti consumano ogni settimana un certo numero di pasti in mensa.
Gruppo A: tutti i 12 studenti della sezione A vanno tutti 3 volte in mensa alla settimana: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.
Gruppo B: i 12 studenti della sezione B vanno in mensa un certo numero di volte come segue: 1, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 2, 4, 5, 3, 3.
Gruppo C: i 12 studenti della sezione C vanno in mensa un certo numero di volte come segue: 1, 3, 3, 5, 3, 3, 5, 1, 1, 3, 5, 3.
Calcolare mediana, moda e media per i 3 gruppi.

Gruppo A:

$$\text{Media} = \frac{3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3}{12} = \frac{36}{12} = 3\,.$$

Mediana $\quad 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ \underbrace{3\ 3}_{3}\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3$ per cui la mediana è 3.

Moda

valore	frequenza
3	12

Il valore corrispondente alla frequenza più alta è 3, per cui la moda è 3.
In conclusione media, mediana e moda valgono tutte 3.

Gruppo B:

$$\text{Media} = \frac{1+3+2+3+3+3+4+2+4+5+3+3}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

Mediana $\quad 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ \underbrace{3\ 3}_{3}\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5 \quad$ per cui la mediana è 3.

Moda

valore	frequenza
1	1
2	2
3	6
4	2
5	1

Il valore corrispondente alla frequenza più alta è 3, per cui la moda è 3.
In conclusione media, mediana e moda valgono tutte 3.

Gruppo C:

$$\text{Media} = \frac{1+3+3+5+3+3+5+1+1+3+5+3}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

Mediana $\quad 1\ 1\ 1\ 3\ 3\ \underbrace{3\ 3}_{3}\ 3\ 3\ 5\ 5\ 5 \quad$ per cui la mediana è 3.

Moda

valore	frequenza
1	3
2	0
3	6
4	0
5	3

Il valore corrispondente alla frequenza più alta è 3, per cui la moda è 3.
In conclusione media, mediana e moda valgono tutte 3.

Ma che razza di esercizio è questo in cui tutti e 3 i gruppi hanno la stessa media, moda e mediana?
Eppure i 3 gruppi sono ben diversi! Ma in cosa differiscono?

PRIMA PROPOSTA: il campo di variabilità.

Il **campo di variabilità** è la differenza tra il valore massimo e quello minimo.

Nel gruppo A la variabilità è 3-3=0
Nel gruppo B la variabilità è 5-1=4
Nel gruppo C la variabilità è 5-1=4
Una differenza effettivamente c'è, ed è quella che nel gruppo A i valori sono tutti uguali e il campo di variabilità è 0, mentre negli altri due casi c'è una differenza di 4 tra il valore minimo e quello massimo.
Ma qual è allora la differenza tra il gruppo B e quello C?
Per scoprirlo si traccino gli istogrammi.

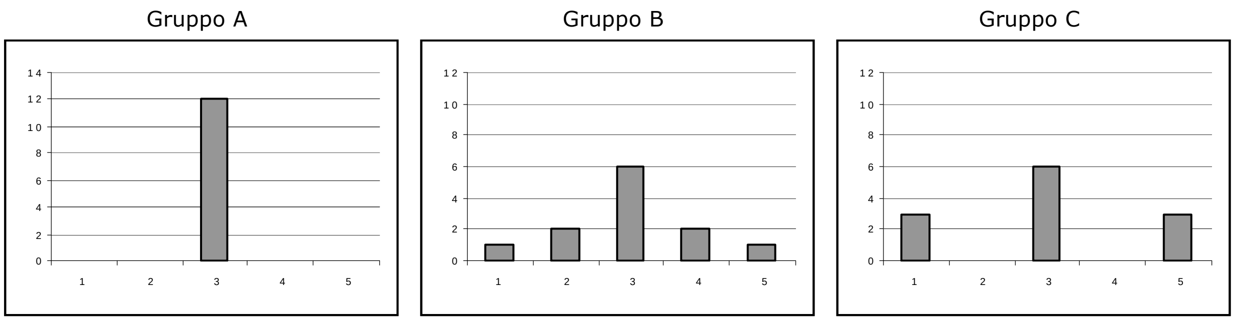


Fig. H3.17
Istogrammi: giorni che mangiano in mensa gruppi di 12 persone.

Osservando gli istogrammi si nota che:

- La media è la stessa ed è 3.
- Nel gruppo A i valori sono tutti vicini alla media.
- Nel gruppo C i valori sono più lontani dalla media rispetto al gruppo A, ma anche rispetto al gruppo B.

Si dice quindi che il gruppo A è il **più omogeneo**, nel gruppo C c'è **una maggiore dispersione**.
In questo caso particolare si è riusciti a capire dall'istogramma qual è il gruppo più omogeneo e quello in cui c'è più dispersione. Non sempre si capisce dalle rappresentazioni grafiche. E' possibile però calcolare alcuni valori, detti

rispettivamente varianza, scarto quadratico medio ed indice di variabilità, i quali permettono di capire più facilmente quale dei gruppi è più omogeneo e quale meno, e ciò anche nel caso la media sia diversa.

VARIANZA E SCARTO QUADRATICO MEDIO.

Procedimento per il calcolo di varianza e scarto quadratico medio.
- Si compila una nuova colonna $x_i \cdot f_i$ moltiplicando tra loro i valori delle colonne valori e frequenze.
- Si calcola la media $M = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$.
- Si compila una nuova colonna x_i-M sottraendo a tutti i valori la media M.
- Si compila una nuova colonna $(x_i-M)^2$ elevando la colonna precedente al quadrato.
- Si compila una nuova colonna $(x_i-M)^2 \cdot f_i$ moltiplicando la colonna precedente per le frequenze.
- Si sommano i valori della colonna $(x_i-M)^2 \cdot f_i$.
- Si calcola la varianza $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - M)^2 \cdot f_i}{\sum f_i}$ dividendo la somma dei valori della colonna $(x_i-M)^2 \cdot f_i$ con la somma dei valori della colonna delle frequenze.
- Si calcola lo scarto quadratico medio $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ calcolando la radice quadrata della varianza.

Quindi lo scarto quadratico medio è la radice quadrata della varianza.
Si effettua questo calcolo per il gruppo C, si lascia per esercizio questo calcolo (in maniera analoga) per i gruppi A e B.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i-M	$(x_i-M)^2$	$(x_i-M)^2 \cdot f_i$
1	3	3	-2	4	12
2	0	0	-1	1	0
3	6	18	0	0	0
4	0	0	1	1	0
5	3	15	2	4	12
	$\Sigma f_i = 12$	$\Sigma x_i \cdot f_i = 36$			$\Sigma(x_i-M)^2 \cdot f_i = 24$

Fig. H2.18
Tabella: esempio di calcolo di varianza e scarto quadratico medio.

Media: $M = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{36}{12} = 3$.

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - M)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{24}{12} = 2$.

Scarto quadratico medio: $\sigma = \sqrt{2} \approx 1.41$.

Effettuando tale calcolo per il gruppo A risulta $\sigma^2 = 0$ e $\sigma = 0$.
Effettuando tale calcolo per il gruppo B risulta $\sigma^2 = 1$ e $\sigma = 1$.

Si nota che più piccoli risultano varianza e scarto quadratico medio e maggiore è l'omogeneità (minore la dispersione).
più grandi risultano varianza e scarto quadratico medio e minore è l'omogeneità (maggiore la dispersione).

In ordine	gruppo A	$\sigma^2 = 0$ e $\sigma = 0$	↑ PIU' OMOGENEITA'	MENO DISPERSIONE ↓
	gruppo B	$\sigma^2 = 1$ e $\sigma = 1$		
	gruppo C	$\sigma^2 = 2$ e $\sigma \approx 1.41$	MENO OMOGENEITA'	PIU' DISPERSIONE

INDICE DI VARIABILITA'

Nel caso precedente i tre gruppi sono formati dallo stesso numero di elementi e la media è la stessa.
Per confrontare i gruppi si sono quindi usati lo scarto quadratico medio e la varianza. In generale per confrontare gruppi di elementi diversi e con medie diverse e determinare in quale gruppo c'è più variabilità si utilizza l'indice di variabilità.
L'indice di variabilità si calcola con la seguente formula: $\boxed{i = \frac{\sigma}{M}}$
i è l'indice di variabilità e si esprime in percentuale.
σ è lo scarto quadratico medio, quindi per calcolare l'indice di variabilità va calcolato prima lo scarto quadratico medio come visto precedentemente. M è la media.

<u>Esempio H3.21:</u>
Una classe di 30 allievi è composta da 18 maschi e 12 femmine.
I voti nel compito di matematica del gruppo dei maschi sono i seguenti: 2, 3, 3, 3, 4,4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8.
Per il gruppo delle femmine i voti sono i seguenti: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9.

Gruppo dei maschi:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i-M	$(x_i-M)^2$	$(x_i-M)^2 \cdot f_i$
2	1	2	-3	9	9
3	3	9	-2	4	12
4	2	8	-1	1	2
5	5	25	0	0	0
6	4	24	1	1	4
7	2	14	2	4	8
8	1	8	3	9	9
9	0	0	4	16	0
	$\Sigma f_i = 18$	$\Sigma x_i \cdot f_i = 90$			$\Sigma(x_i-M)^2 \cdot f_i = 44$

Fig. H3.19
Tabella: calcolo di varianza e scarto quadratico medio
per i voti di un gruppo di 18 maschi.

Media: $M = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{90}{18} = 5$.

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - M)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{44}{18} \approx 2,44$.

Scarto quadratico medio: $\sigma = \sqrt{2,44} \approx 1,56$.

Indice di variabilità: $i = \dfrac{1,56}{5} = 0,312 = 31,2\%$.

Gruppo delle femmine:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i-M	$(x_i-M)^2$	$(x_i-M)^2 \cdot f_i$
2	0	0	-4	16	0
3	1	3	-3	9	9
4	1	4	-2	4	4
5	2	10	-1	1	2
6	4	24	0	0	0
7	2	14	1	1	2
8	1	8	2	4	4
9	1	9	3	9	9
	$\Sigma f_i = 12$	$\Sigma x_i \cdot f_i = 72$			$\Sigma(x_i-M)^2 \cdot f_i = 30$

Fig. H2.20
Tabella: calcolo di varianza e scarto quadratico medio
per i voti di un gruppo di 12 femmine.

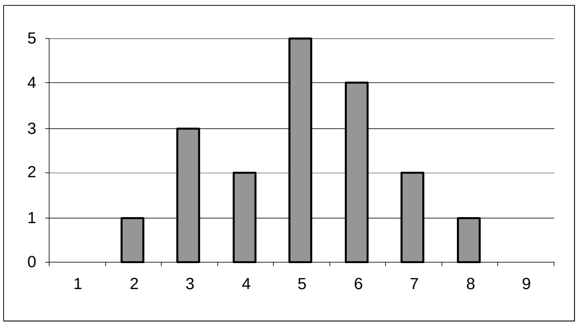
Media: $M = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{72}{12} = 6$.

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - M)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{30}{12} \approx 2,5$.

Scarto quadratico medio: $\sigma = \sqrt{2,5} \approx 1,58$.

Indice di variabilità: $i = \dfrac{1,58}{6} = 0,263 = 26,3\%$.

Gruppo dei maschi



Gruppo delle femmine

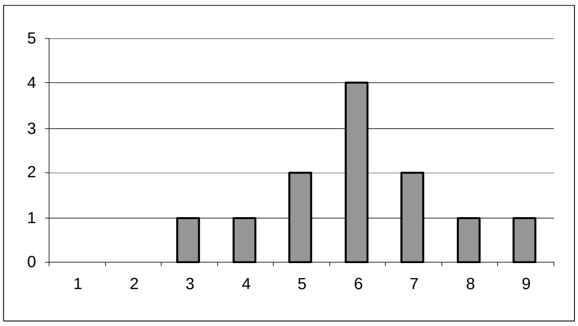


Fig. H3.21
Istogrammi: voti di un gruppo di 18 maschi e di un
gruppo di 12 femmine.

Dai grafici risulta abbastanza chiaro che la media delle femmine è superiore a quella dei maschi.
Non è così chiaro dall'istogramma quale dei due gruppi è più omogeneo.

La varianza e lo scarto quadratico medio del gruppo dei maschi sono inferiori a quelli del gruppo delle femmine, ma in questo caso, con i gruppi composti da un numero di elementi diversi, si deve utilizzare l'indice di variabilità. La varianza non è in questo caso attendibile per confrontare i due gruppi.

L'indice di variabilità per le femmine è 26,3%, mente per i maschi è 31,2%.
Ciò indica che il gruppo di femmine ha dei valori più omogenei rispetto al gruppo di maschi, che ha invece più dispersione.

Molti dei calcoli svolti qui negli esempi sono stati svolti più facilmente utilizzando un foglio elettronico come Excel o Openoffice. Alcuni esercizi proposti sono da svolgersi utilizzando uno di questi programmi.

H3.5 Statistica con Excel

Questo paragrafo non vuole essere una spiegazione particolareggiata di Excel ma vuole solamente dare gli strumenti per risolvere con un foglio di calcolo gli esercizi di questo capitolo.

Questo è l'aspetto di una finestra di Excel.

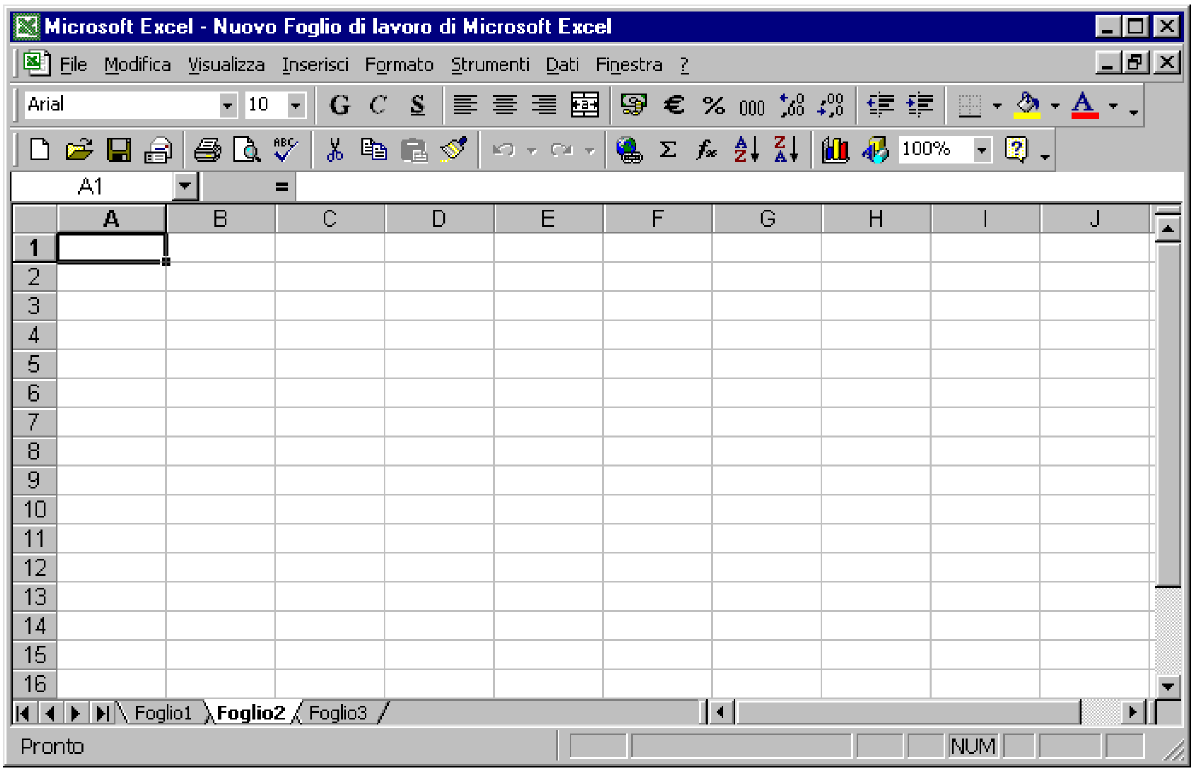


Fig. H3.22
Aspetto di una finestra di Excel.

Excel serve a gestire tabelle di dati e a realizzare grafici. Per questa ragione è particolarmente utile per svolgere esercizi di statistica.

Inserimento dati in tabelle.
Ogni cella si indica con le sue coordinate. Ad esempio la cella attiva in figura è la A1.
Dentro ogni cella si possono scrivere:

- Testo.
- Numeri.
- Formule.

Quando si inserisce un dato si deve premere il tasto invio.
Per modificare il contenuto di una cella si digita il suo contenuto nella barra di modifica che si trova accanto all'uguale sopra i nomi delle colonne.
La formattazione del contenuto, come con Word, si effettua con i tasti sulla barra degli strumenti di formattazione.
E' possibile copiare e incollare i contenuti delle celle o di gruppi di celle selezionandole e utilizzando Taglia (Ctrl X), Copia (Ctrl C) e Incolla (Ctrl V) come in Word.

Righe e colonne.
Si selezionano righe e colonne andando sulla barra a sinistra dove le righe si chiamano 1, 2, 3, ecc. o sulla barra in alto dove le colonne si chiamano A, B, C, ecc. e quindi si possono restringere, allargare o modificarne il contenuto con FORMATO → CELLE oppure FORMATO → RIGHE oppure con FORMATO → COLONNE.
Si inseriscono nuove righe o colonne selezionandone una e poi usando il comando INSERISCI → RIGHE.
Si seleziona tutto il foglio premendo il quadratino a sinistra della A e sopra l'uno.

Fogli.
In fondo alla pagina c'è l'elenco dei fogli di lavoro per lo stesso documento. E' possibile (utilizzando il tasto destro del mouse) inserire nuovi fogli, eliminare quelli esistenti o rinominarli.

Somme.
Per sommare più celle e mettere il risultato in una cella bisogna:
- Posizionarsi sulla cella dove mettere la somma.
- Premere il tasto Σ.
- Selezionare le celle da sommare.
- Premere invio.

Bordi e sfondo.
E' possibile modificare i bordi delle celle e i loro colori con
FORMATO → CELLE → BORDO o con FORMATO → CELLE → MOTIVO.

Riferimenti relativi e assoluti.
Questo è uno dei concetti più importanti. Con C5, $C$5, $C5, C$5 si intende il contenuto della cella C5.
Quale è dunque la differenza?
C5 è un riferimento relativo.
$C$5 è un riferimento assoluto.
Se si fa un copia e incolla con $C$5 si ottiene $C$5, mentre se si fa con C5 si ottiene qualcos'altro…

<u>Esempio H3.22:</u>

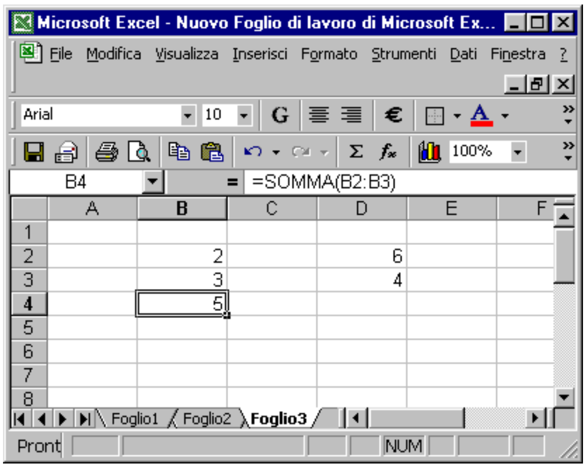


Fig. H3.23
Somma: riferimenti assoluti e relativi.

Nella cella B4 è stata inserita la formula =SOMMA(B2:B3); poiché in B2 e B3 vi sono contenuti i valori 2 e 3 la cella B4 avrà contenuto 5.
Se ora si copia il contenuto della cella B4 nella cella D4 il contenuto della cella D4 <u>NON SARA'</u> =SOMMA(B2:B3), perché i riferimenti B2 e B3 non hanno il simbolo $ e quindi sono relativi, ma sarà =SOMMA(D2:D3) e quindi il contenuto della cella D4 sarà 10.

Poiché D4 è due caselle a destra di B4 anche i riferimenti nella formula si modificano di due caselle a destra, ossia B2 → D2 e B3 → D3.

Se invece la casella B4 contiene =SOMMA($B$2:$B$3) allora copiando B4 in D4 si otterrebbe anche in D4 =SOMMA($B$2:$B$3), e il contenuto della casella D4 sarebbe ancora 5.

Inserimento delle operazioni matematiche: +, -, *, /, ^, SQRT, parentesi.
E' possibile inserire nelle celle le operazioni matematiche:
- + per la somma.
- - per la sottrazione.
- per la moltiplicazione.
- / per la divisione.
- ^ per l'elevamento a potenza.
- SQRT(…) per la radice quadrata.

Le parentesi, anche se se ne mettono molte, sono sempre tonde.

Rappresentazioni grafiche.
Si possono ottenere quasi tutte le rappresentazioni grafiche viste in questo capitolo <u>dopo aver selezionato un insieme di dati</u> con INSERISCI → GRAFICO.
Ogni grafico ha moltissime opzioni di visualizzazione, per apprenderle si svolgano gli esercizi cercando di ottenere la rappresentazione migliore.

Formula successore.
Il modo più comodo di ottenere un elenco 1, 2, 3, 4, ecc. su celle verticali è quello di inserire in una cella (ad esempio A2) il valore 1. Nella cella sotto (ad es. A3) scrivere =A2+1. Ora si copi A3 su tutte le celle desiderate da A4 in giù.

Disegno di rette (scala del grafico e sua formattazione).
Una retta ha equazione y=mx+q.
Supponiamo di voler disegnare per punti una retta qualunque.
Si inseriscano i valori di m in B2 e di q in B3.
Si inseriscano i valori di x da –5 a 5 da C3 a C13.
Si inserisca in D3 la formula =$B$2*C3+$B$3, che altro non è che y=mx+q.
Si copi poi questa formula nelle celle da D4 a D13.
Ora le celle da C3 a D13 contengono dei punti della retta y=mx+q.
Si noti che è stato necessario bloccare le celle B2 e B3 con dei riferimenti assoluti, mentre la cella C3 è stata lasciata libera con un riferimento relativo.

Ora si selezionino le celle da C3 a D13 e si inserisca il grafico DISPERSIONE. Il grafico così ottenuto va però modificato: vanno modificati l’asse x e l’asse y cambiandone la scala e le dimensioni.
Si modificano le righe e le colonne che formano i quadratini.
L’aspetto della retta.
Il colore dello sfondo.

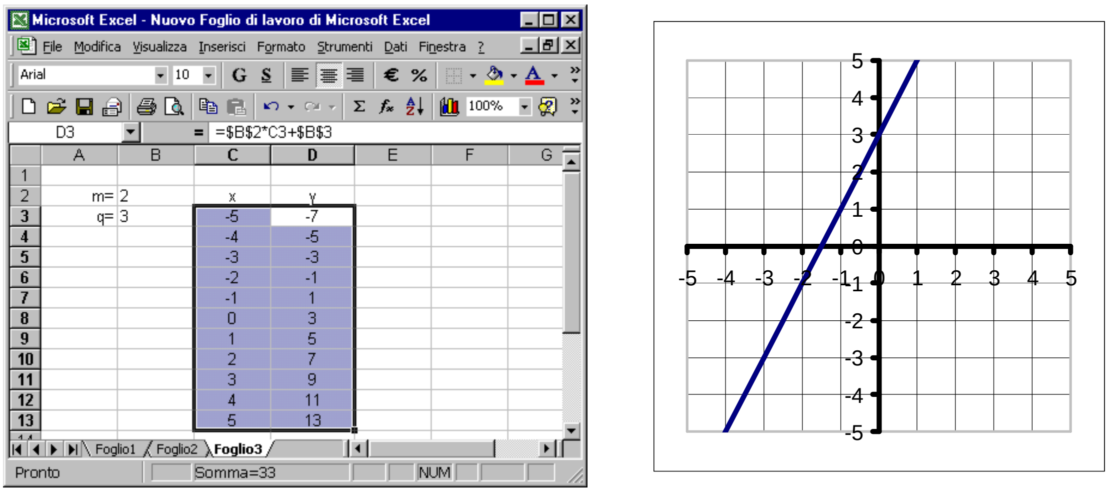
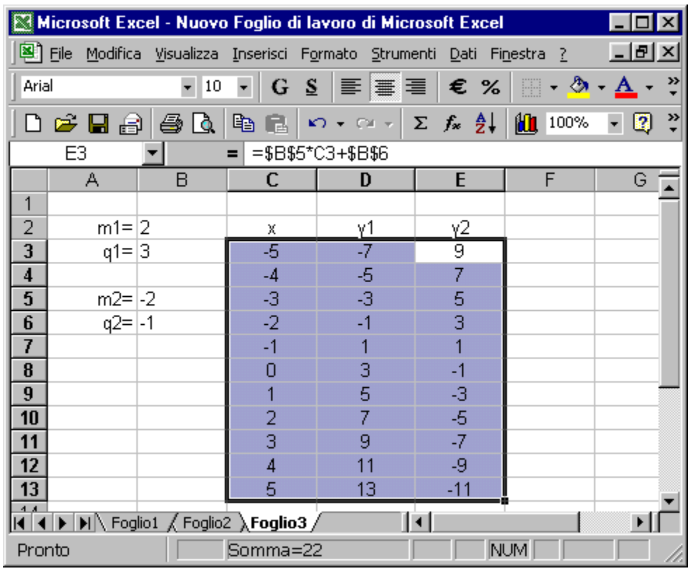


Fig. H3.24
Grafico di una retta.

Ordina.
E’ possibile ordinare i contenuti delle celle selezionate con DATI → ORDINA.

Disegno di due rette sullo stesso grafico.
E’ possibile disegnare due rette sullo stesso grafico per vedere il punto di intersezione.
Prima si inserisce la tabella con i valori della y per le due rette, poi si seleziona la zona indicata e il grafico DISPERSIONE mostrerà le due rette.



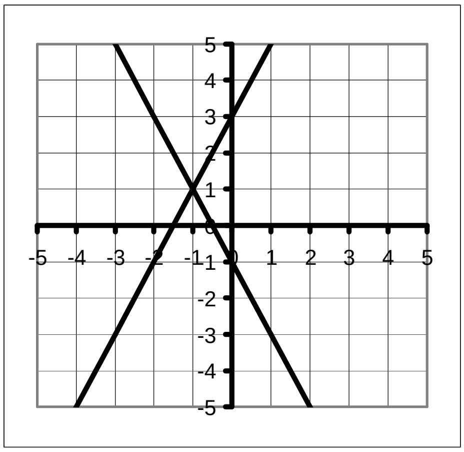
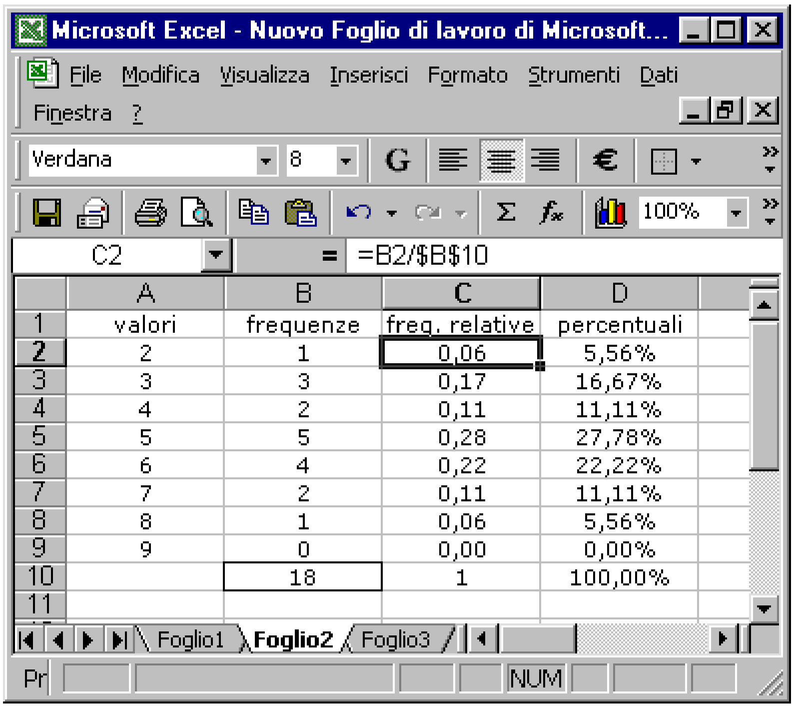


Fig. H3.25
Intersezione di due rette.

Disegno di parabole.
Utilizzando la tecnica appena vista è possibile anche tracciare il grafico della parabola o di altre funzioni.

Inserimento tabelle, calcolo delle frequenze relative e delle percentuali.
E’ possibile inserire le tabelle in Excel e calcolare automaticamente le frequenze relative e le percentuali.
Si devono inserire due colonne, la prima con i valori e la seconda con le frequenze, e calcolare, come già visto, la somma delle frequenze.
La terza colonna (frequenze relative) si ottiene con la formula $f_r = \frac{f_i}{\sum f_i}$; la f_r sarà un riferimento relativo, la Σf_i un riferimento assoluto. Per avere solo due cifre decimali si va su FORMATO → CELLE → NUMERO e si specifica il numero di cifre decimali desiderate.
La quarta colonna (percentuali) è uguale alla terza ma la si ottiene con FORMATO → CELLE → PERCENTUALI specificando il numero desiderato di cifre decimali. Ovviamente la somma delle percentuali deve dare 100%, e quella delle frequenze relative deve dare somma 1.

Utilizzando il gruppo di maschi dell'esempio H3.21 si ha la tabella seguente:

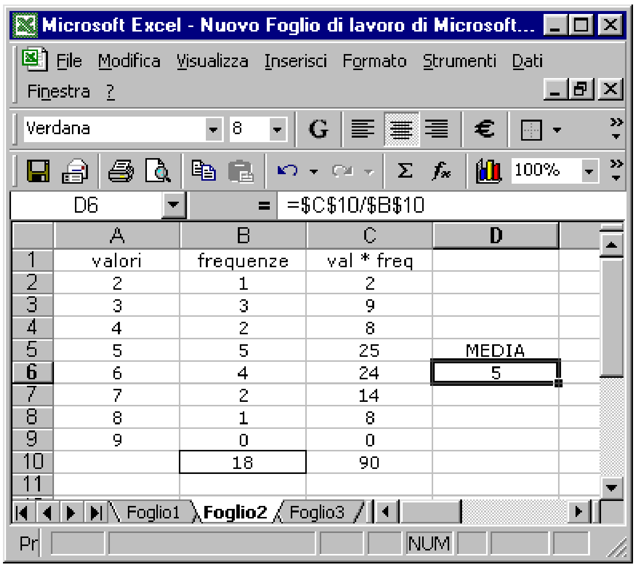


	A	B	C	D
1	valori	frequenze	freq. relative	percentuali
2	2	1	0,06	5,56%
3	3	3	0,17	16,67%
4	4	2	0,11	11,11%
5	5	5	0,28	27,78%
6	6	4	0,22	22,22%
7	7	2	0,11	11,11%
8	8	1	0,06	5,56%
9	9	0	0,00	0,00%
10		18	1	100,00%

Fig. H3.26
Calcolo di frequenze relative e percentuali.

La cella B10 contiene = SOMMA(B2:B9).
La cella C2 contiene = B2/$B$10.
Le celle da C3 a C9 sono ottenute copiando e incollando la cella C2.
La cella D2 contiene = C2.
Le celle da D3 a D9 sono ottenute copiando e incollando la cella D2.
La cella C1 contiene = SOMMA(C2:C9).
La cella D1 contiene = SOMMA(D2:D9).

Calcolo dei valori medi.
Con i dati precedenti per calcolare la media si agisce così:



	A	B	C	D
1	valori	frequenze	val * freq	
2	2	1	2	
3	3	3	9	
4	4	2	8	
5	5	5	25	MEDIA
6	6	4	24	5
7	7	2	14	
8	8	1	8	
9	9	0	0	
10		18	90	

Fig. H3.27
Calcolo della media.

Si aggiunge la colonna valori * frequenze ($x_i \cdot f_i$).
Si sommano i valori di questa colonna ($\Sigma\, x_i \cdot f_i$).

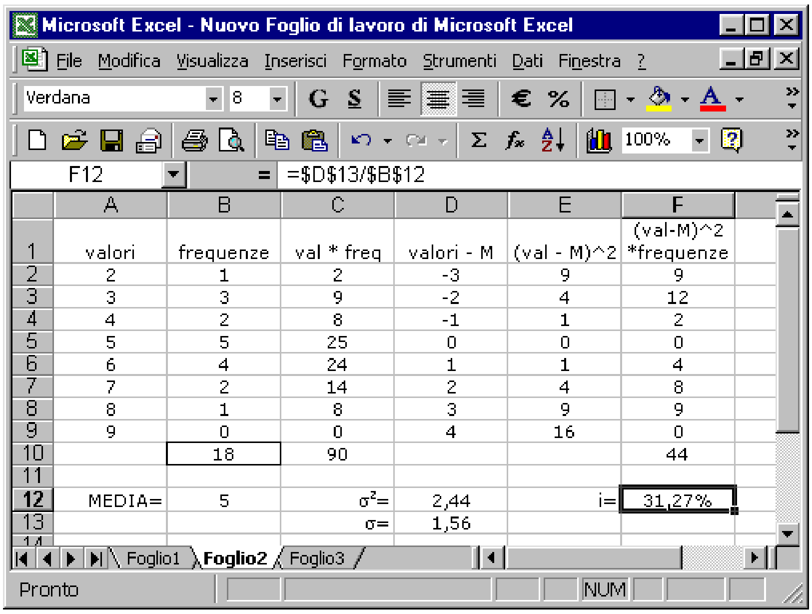
Si divide tale valore per la somma delle frequenze. $\left(M = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} \right)$.

Esempio H3.23:
Si riprende l'esempio H3.21 per svolgerlo con Excel.

La cella C2 contiene =A2*B2.
Le celle C3:C9 si ottengono copiando e incollando C2.
La cella B10 contiene =SOMMA(B2:B9).
La cella C10 contiene =SOMMA(C2:C9).
La cella D6 contiene =$C$10/$B$10.

La funzione MEDIA, già precostituita restituisce la media di valori singoli, non calcola la media a partire da una tabella.

Calcolo di σ^2, σ, i.
E' possibile utilizzare Excel per calcolare σ^2=, σ, i senza essere costretti a usare la calcolatrice per svolgere operazioni ripetitive.



	A	B	C	D	E	F
1	valori	frequenze	val * freq	valori - M	(val - M)^2	(val-M)^2 *frequenze
2	2	1	2	-3	9	9
3	3	3	9	-2	4	12
4	4	2	8	-1	1	2
5	5	5	25	0	0	0
6	6	4	24	1	1	4
7	7	2	14	2	4	8
8	8	1	8	3	9	9
9	9	0	0	4	16	0
10		18	90			44
11						
12	MEDIA=	5	σ^2=	2,44	i=	31,27%
13			σ=	1,56		

Fig. H3.28
Calcolo di varianza, scarto quadratico medio e indice
di variabilità con Excel.

Ecco come si fa utilizzando i dati dell'esempio precedente (in ordine):

La cella C2 contiene =A2*B2.
Le celle C3:C9 si ottengono copiando e incollando la cella C2.
La cella C10 contiene =SOMMA(C3:C9).
La cella B12 contiene =$C$10/$B$10.
La cella D2 contiene =A2-$B$12.
Le celle D3:D9 si ottengono copiando e incollando la cella D2.
La cella E2 contiene =D2^2.
Le celle E3:E9 si ottengono copiando e incollando la cella E2.
La cella F2 contiene =E2*B2.
Le celle F3:F9 si ottengono copiando e incollando la cella F2.
La cella F10 contiene =SOMMA(F3:F9).
La cella D12 contiene =$F$10/$B$10.
La cella D13 contiene =RADQ($D$12).
La cella F12 contiene =$D$13/$B$12 e va messa in percentuale con FORMATO → CELLE → PERCENTUALI e specificando 2 cifre decimali.
Le funzioni VAR (varianza) e DEV.ST (scarto quadratico medio) restituiscono la varianza e lo scarto quadratico medio di un insieme di valori singoli, non calcolano varianza e scarto quadratico medio a partire da una tabella .

Le funzioni.
Ecco un elenco di funzioni molto usate. Tutte le funzioni si trovano su INSERISCI → FUNZIONE.
=SOMMA(celle) somma i valori delle celle indicate.
=MEDIA(celle) calcola la media dei valori delle celle indicate.
=RADQ(cella) calcola la radice quadrata del valore della cella indicata.
=MODA(celle) calcola la moda dei valori delle celle indicate.
=MEDIANA(celle) calcola la mediana dei valori delle celle indicate.
=ARROTONDA(cella, cifre) arrotonda il valore della cella indicata con il numero specificato di cifre decimali.
=INT(cella) approssima il valore della cella per difetto all'intero più vicino.
=MAX(cella) restituisce il valore più grande di un insieme di dati.
=MIN(cella) restituisce il valore più piccolo di un insieme di dati.
=SE(test; se_vero; se_falso) se il test è vero si dà il valore se_vero, se no si dà il valore se_falso.

=CONTA.NUMERI(celle)   dice quante delle celle indicate contengono numeri.
=ASS(cella)   calcola il valore assoluto del valore di una cella.
=PI.GRECO()   dà il valore di pigreco approssimato a 15 cifre.
=FATTORIALE(cella)   calcola il fattoriale del valore di una cella.

E’ possibile inserire valori al posto dell’indicazione della cella in tutte le formule.