H2. Probabilità I

I primi paragrafi di questo capitolo servono per acquisire alcune basi minime di calcolo delle probabilità. Gran parte del capitolo è dedicata allo svolgimento di alcuni esempi classici che servono ad acquisire i metodi di ragionamento propri del calcolo delle probabilità.

H2.1 Percentuali e frazioni

E' necessario saper trasformare frazioni in numeri decimali e in percentuali. Si richiamano qui di seguito alcune regole di base che sono state già studiate in precedenza.

FRAZIONI → NUMERI DECIMALI → PERCENTUALI

- Si divide il numeratore per il denominatore e si ottiene il numero decimale.
- Si moltiplica per cento il numero decimale e si trova la percentuale.

Esempio H2.1:
Trasformare le frazioni $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ in numeri decimali e in frazioni.

$\frac{1}{6}=0{,}1\overline{6}=16{,}\overline{6}\%$, $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}=33{,}\overline{3}\%$, $\frac{1}{2}=0{,}5=50\%$.

NUMERI DECIMALI → PERCENTUALI → FRAZIONI

- Un numero decimale si trasforma in percentuale moltiplicandolo per cento.

Esempio H2.2:
Trasformare i numeri decimali 0,12 e $0{,}\overline{54}$ in percentuale.

0,12=12%, $0{,}\overline{54}=54{,}\overline{5}\%$.

- Un numero decimale <u>finito</u> si trasforma in frazione scrivendolo senza virgola e dividendolo per 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola.

Esempio H2.3:
Trasformare 0,35, 0,7 e 0,0026 in frazioni.

$0{,}35=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$, $0{,}7=\frac{7}{10}$, $0{,}0026=\frac{26}{10000}=\frac{13}{5000}$.

- Un numero decimale periodico si trasforma in frazione scrivendo al NUMERATORE il numero senza la virgola meno il numero formato dalle cifre che precedono il periodo ed al DENOMINATORE tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempio H2.4:
Trasformare $2{,}1\overline{6}$ in frazioni.

$2{,}1\overline{6}$ ha come periodo 6 e come antiperiodo 1.
Si trasforma quindi così: $2{,}1\overline{6}=\frac{216-21}{90}=\frac{195}{90}=\frac{39}{18}$.

Esempio H2.5:
Trasformare $47{,}15\overline{262}$ in frazioni.

$47{,}15\overline{262}$ ha come periodo 262 e come antiperiodo 15.
Si trasforma quindi così: $47{,}15\overline{262}=\frac{4715262-4715}{99900}=\frac{4710547}{99900}$.

PERCENTUALI → NUMERI DECIMALI → FRAZIONI

- Si divide per cento il numero in percentuale e si trova il numero in forma decimale.
- Per passare da numeri decimali a frazioni si usa, se serve, il metodo visto precedentemente.

Esempio H2.6:
Trasforma le seguenti percentuali in numeri decimali: 28%, 37,12%, $59{,}\overline{59}\%$.

28%=0,28 37,12%=0,3712 $59{,}\overline{59}\%=0{,}\overline{59}$

Completare la seguente tabella:

frazioni	num. dec.	perc.
2/3		
1/4		
3/4		
1/12		
3/8		
4/5		

frazioni	num. dec.	perc.
	0,13	
	0,7	
	0,085	
	0,002	
	$0,\overline{6}$	
	$0,\overline{2}$	

frazioni	num. dec.	perc.
		30%
		50%
		$33,\overline{3}\%$
		0,1%
		15,2%
		$23,\overline{23}\%$

H2.2 Definizioni fondamentali

EVENTI E SPAZIO DEGLI EVENTI.
Ci sono esperimenti che danno sempre lo stesso risultato, come il tempo che ci mette un mattone a cadere dal terzo piano. Ci sono esperimenti che possono invece fornire risultati diversi, come ad esempio il lancio di un dado. In probabilità si studieranno questi ultimi esperimenti.
I risultati possibili di questi esperimenti sono detti eventi; un **evento** è quindi il risultato di un esperimento. Se si lancia un dado possono accadere i seguenti casi: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Ci sono dunque sei possibili eventi: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. L'insieme di tutti i casi possibili è detto **spazio degli eventi**.

EVENTI CERTI e IMPOSSIBILI.
Se in un esperimento un certo evento accade sempre è detto **evento certo**.
Un evento che in un esperimento non si può verificare mai è detto **evento impossibile**.
Ad esempio nell'esperimento del lancio di un dado a sei facce il fatto che esca un numero minore di 10 è un evento certo, mentre il fatto che esca un numero più grande di 10 è un evento impossibile.

CASI FAVOREVOLI.
La parola "favorevoli" non vuol dire che ci guadagni qualcosa qualcuno…
Si indicano come **casi favorevoli** quelli per cui la richiesta è verificata.

Nel lancio di un dado i casi favorevoli che esca un numero pari sono 3: {2, 4, 6}.
La richiesta è "numero pari". I casi favorevoli sono {2, 4, 6}.

CASI POSSIBILI.
I **casi possibili** sono tutti i casi che si possono verificare.
Nel lancio di un dado i casi possibili sono dunque 6: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA'.

$$\boxed{\textbf{Probabilità} = \frac{\textbf{Casi favorevoli}}{\textbf{Casi possibili}}}$$

Esempio H2.7:
Si calcoli la probabilità che nel lancio di un dado esca un numero pari.

Nel lancio di un dado la probabilità che esca un numero pari si calcola così:
I casi favorevoli sono 3: {2, 4, 6}.
I casi possibili sono 6: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
La probabilità che esca un numero pari è $\mathbf{p}(\mathbf{pari}) = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\%$.

I casi favorevoli sono sempre in numero minore rispetto ai casi possibili.
Dalla definizione classica di probabilità si deduce che la probabilità è un numero compreso tra 0 e 1.

$$\boxed{\mathbf{0 \le p \le 1}}$$

Se la probabilità viene misurata in percentuale allora la probabilità è compresa tra 0% e 100%.
Se la probabilità è espressa in frazioni allora il numeratore sarà sempre minore o uguale al denominatore.

Se ci fosse una probabilità più grande di 1 (ad es. 1,2) essa equivarrebbe a una probabilità del 120%?! Ciò non può accadere. Del resto ciò potrebbe succedere solo se i casi favorevoli fossero di più dei casi possibili. Ma i casi possibili sono tutti quelli che si possono verificare, dunque non è possibile che i casi favorevoli siano di più di quelli possibili.

La probabilità dell'evento impossibile è 0. **p(impossibile)=0**
La probabilità dell'evento certo è 1. **p(certo)=1**

PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO.
Se la probabilità che si verifichi un evento è del 70%, la probabilità che si verifichi l'evento contrario è del 30%.
La probabilità dell'**evento contrario** si calcola così:
In numeri decimali o in frazioni: $\boxed{\overline{\mathbf{p}} = 1 - \mathbf{p}}$.
In percentuale: $\boxed{\overline{\mathbf{p}} = 100\% - \mathbf{p}}$.

Esempio H2.8:
Calcolare la probabilità contraria a $\frac{2}{3}$ e a 0,15.

Utilizzando le formule della probabilità dell'evento contrario si calcolano le due probabilità richieste.
Il contrario di $\frac{2}{3}$ è $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
Il contrario di 0,15 è 1-0,15=0,85.

EVENTI COMPATIBILI E INCOMPATIBILI.
Due eventi sono **compatibili** se possono accadere entrambi nello stesso esperimento.
Due eventi sono **incompatibili** se non possono accadere entrambi nello stesso esperimento.
Ad esempio nel lancio di un dado i due eventi A = "esce un numero pari", e B= "esce un numero minore di 5" possono accadere entrambi, quindi sono compatibili. Infatti se esce il 2 oppure il 4 è uscito un numero sia pari che minore di 5. Gli eventi A= "esce un numero pari" e C ="esce un numero dispari" sono invece incompatibili. Non è infatti possibile che nello stesso lancio di dadi esca un numero che sia contemporaneamente pari e dispari!

PROBABILITA' DEL PRODOTTO.
Se si vuole calcolare la probabilità che accada un evento A **e** successivamente un evento B, si calcola la probabilità degli eventi A e B e si moltiplicano tra loro tali probabilità. In pratica la parola italiana **e** si traduce con l'operazione **per**. Il simbolo matematico per indicare la parola italiana **e** è $\wedge$, che in logica è chiamato **et** (latino) o **AND**.

$$\boxed{\mathbf{p(A \wedge B)=p(A)\cdot p(B)}}$$

Questa formula può essere generalizzata per calcolare la probabilità che accadano l'evento $A \wedge B \wedge C \wedge \ldots$ come segue:

$$\boxed{\mathbf{p(A \wedge B \wedge C \wedge \ldots)= p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)\ p(A)\cdot \ldots}}$$

PROBABILITA' DELLA SOMMA.
In probabilità se si vuole calcolare la probabilità che accada un evento A **o** successivamente un evento B, si calcola la probabilità degli eventi A e B e poi si sommano le probabilità. In pratica la parola italiana **o** si traduce con un **più**.
Si devono però distinguere i casi in cui gli eventi sono compatibili o incompatibili.
Il simbolo matematico per indicare la parola italiana **o** è $\vee$, che in logica è chiamato **vel** (latino) o **OR**.

Per gli eventi **incompatibili** si ha:

$$\boxed{p(A \vee B)=p(A)+p(B)}$$

Per gli eventi **compatibili** si ha:

$$\boxed{p(A \vee B)=p(A)+p(B)-p(A \wedge B)}$$

Anche in questo caso si può generalizzare la formula per più di due eventi, ma è abbastanza complesso.

LEGGE EMPIRICA DEL CASO.
In certi casi non si può sapere qual è la probabilità che accada un evento. Si possono però utilizzare degli esperimenti per stimarla. Supponiamo che dentro una scatola ci siano palline bianche e nere. Non si sa quante siano le palline, dunque non si sa quante siano quelle bianche e quante siano quelle nere. Non si conosce la probabilità che esca una pallina bianca o una nera, ma è permesso estrarre una pallina a caso e poi rimetterla dentro.
Supponiamo che dopo 100 esperimenti siano uscite per 58 volte palline bianche e per 42 volte palline nere.
Il numero di volte che si è verificato un evento è detto **frequenza.**
Si dice **frequenza relativa** il rapporto tra la frequenza e il numero di esperimenti effettuati.
La legge empirica del caso (O LEGGE DEI GRANDI NUMERI) dice che:

PIU' ESPERIMENTI SI FANNO E PIU' LA FREQUENZA RELATIVA SI AVVICINA AL VERO VALORE DELLA PROBABILITA'.

E' possibile quindi dire che una stima della probabilità che esca una pallina bianca sia 58%=58/100=0,58 mentre una stima della probabilità che esca una pallina nera è 42%=42/100=0,42.

p(bianca)=0,58.
p(nera)=0,42.

Se si effettuasse un numero maggiore di esperimenti di estrazione si troverebbero approssimazioni più corrette del valore cercato.

H2.3 Risoluzione di problemi

In questo lungo paragrafo si presentano numerosi esercizi svolti in maniera da abituarsi ai metodi di ragionamento tipici del calcolo delle probabilità.

ESEMPIO H2.9: PERMUTAZIONI SU UN TAVOLO.

Marcello, Anastasia e Giulia si devono sedere su questo tavolo con 3 sedie nelle posizioni A, B, C.

I casi possibili sono:

Posizione	A	B	C
	Marcello	Anastasia	Giulia
	Marcello	Giulia	Anastasia
	Anastasia	Marcello	Giulia
	Anastasia	Giulia	Marcello
	Giulia	Anastasia	Marcello
	Giulia	Marcello	Anastasia

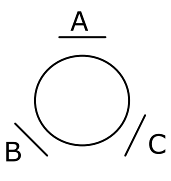


Fig. H2.1
Tavolo con 3 posti.

Nel posto A si può sedere una qualunque delle tre persone. Una volta che si è seduto qualcuno nel posto A, allora nel posto B si può sedere solo uno dei due rimasti. Una volta che si è seduto qualcun altro nel posto B resta solo un posto per l'ultima persona.

A	B	C
3	2	1

Fig. H2.2
Rappresentazione di tavolo con 3 posti.

Ciò che si è appena calcolato implicitamente è il numero delle permutazioni di tre oggetti, ossia $P_3=3!=6$.

Qual è la probabilità che si siedano nella posizione A Anastasia, nella posizione B Marcello e nella posizione C Giulia?
Il caso favorevole è solo uno, i casi possibili sono 6, quindi $\mathbf{p} = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6} = 16,\overline{6}\%$.

C'è un modo più veloce per calcolare i casi possibili piuttosto che elencarli tutti. Vediamo come.

ESEMPIO H2.10: LANCIO DI UNA MONETA PIU' VOLTE.

Viene lanciata due volte una moneta. Ogni volta che la si lancia può uscire testa (T) o croce (C).
I casi possibili sono 4: TT, TC, CT, CC.

Qual è la probabilità che esca due volte testa? $\mathbf{p}(\mathbf{TT}) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

Qual è la probabilità che esca una volta testa e una croce? $\mathbf{p}(\mathbf{TC}\text{ o }\mathbf{CT}) = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$.

Qual è la probabilità che esca la prima volta testa e la seconda croce? $\mathbf{p}(\mathbf{TC}) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

Qual è la probabilità che esca la prima volta croce? $\mathbf{p}(\mathbf{CC}\text{ o }\mathbf{CT}) = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$.

Per calcolare il numero dei casi senza elencarli si può ricorrere al calcolo combinatorio, e in particolare alla formula per il calcolo delle disposizioni con ripetizione di n oggetti con classe k, ossia $D'_{n,k}=n^k$.

Si può immaginare che per ogni lancio possa uscire testa o croce, quindi per ogni lancio ci sono 2 possibilità, da cui n=2; i lanci in tutto sono due quindi k=2. I casi possibili sono quindi $\boxed{\mathbf{n^k}} = 2^2 = 4$.
Se i lanci fossero stati 5 i casi possibili sarebbero stati $2^5=32$.

ESEMPIO H2.11: LA BANDIERA.

Si hanno a disposizione cinque pezzi rettangolari di stoffa, uno blu, uno rosso, uno giallo, uno verde e uno bianco. Se ne vogliono cucire 3 presi a caso per fare una bandiera a tre fasce verticali, di cui quello a sinistra è legato a un'asta.

Per prima cosa calcoliamo quanti sono i casi possibili.
Si può utilizzare lo stesso metodo visto nell'esempio H2.9. Nel primo posto della bandiera si può mettere uno qualunque dei cinque colori, nel posto accanto solo uno dei quattro rimasti, in quello ancora accanto solo uno dei 3 rimasti.

5	4	3

Da ciò risulta che i casi possibili sono $5 \cdot 4 \cdot 3=60$. Ciò non è altro che il numero delle disposizioni di n oggetti di classe k con n=5 e k=3. La formula per il calcolo delle disposizioni è $D_{n,k} = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, dunque

$D_{5,3}=5 \cdot 4 \cdot 3=60$.

Qual è la probabilità che:
la bandiera che si forma casualmente sia la bandiera italiana?
C'è solo un modo di fare la bandiera italiana: verde, bianco e rosso. $\mathbf{p}(\mathbf{italiana}) = \frac{1}{60} = 0,01\overline{6} = 1,\overline{6}\%$.

la bandiera che si forma sia la bandiera svizzera?
Non si può fare la bandiera svizzera con le stoffe a nostra disposizione! $\mathbf{p}(\mathbf{svizzera}) = \frac{0}{60} = 0 = 0\%$.

il verde sia in mezzo?
Nel primo posto può stare uno qualunque dei 5 colori escluso il verde, nel secondo posto deve stare il verde, nel terzo posto uno qualunque dei 3 rimanenti.

4	1	3

Quindi i casi favorevoli sono $4 \cdot 1 \cdot 3=12$ $\mathbf{p}(\mathbf{verde\ in\ mezzo}) = \frac{12}{60} = 0,2 = 20\%$.

che la bandiera che si forma abbia i 3 colori della bandiera francese anche non in ordine?
Nel primo posto può stare uno qualunque dei colori bianco, rosso o blu. Nel secondo uno dei due rimanenti. Nel terzo solo quello che resta. Stiamo calcolando il numero delle permutazioni di 3 elementi, ossia $P_3=3!=6$.

3	2	1

Quindi i casi favorevoli sono 3·2·1=6. **p(francese anche non in ordine)** $= \frac{6}{60} = 0,1 = 10\%$.

siano i 3 colori della bandiera francese NON in ordine?
Ai 6 casi favorevoli dell'esercizio precedente ne va tolto uno, quello in cui i colori sono in ordine.
Ci sono quindi 5 casi favorevoli **p(francese non in ordine)** $= \frac{5}{60} = 0,08\overline{3} = 8,\overline{3}\%$.

ESEMPIO H2.12: LANCIO DI DUE DADI.

La prima cosa da calcolare è sempre il numero dei casi possibili.
Come nell'esempio H2.10 si deve vedere quanti sono i casi possibili per ogni lancio (n=6), e quanti lanci vengono effettuati (k=2). Si utilizza la regola $n^k = 6^2 = 36$.
Si può altrimenti ragionare sul fatto che per il primo lancio ci sono 6 possibilità, e così anche per il secondo lancio, da cui:

6	6

6·6=36.

E' opportuno e utile elencare (in ordine!!) tutti e 36 i casi.

Si noti che tutte le coppie sulle diagonali dal basso a sinistra verso l'alto a destra danno come somma lo stesso numero.

1_1	2_1	3_1	4_1	5_1	6_1
1_2	2_2	3_2	4_2	5_2	6_2
1_3	2_3	3_3	4_3	5_3	6_3
1_4	2_4	3_4	4_4	5_4	6_4
1_5	2_5	3_5	4_5	5_5	6_5
1_6	2_6	3_6	4_6	5_6	6_6

Fig. H2.3
Lancio di due dadi: elenco dei casi possibili.

Qual è la probabilità che la somma dei due numeri sia 1, 2, 3, ecc.?

La somma non può dare 1: **p(1)**$= \frac{0}{36} = 0 = 0\%$.

La somma dà 2 in un caso: **p(2)**$= \frac{1}{36} = 0.02\overline{7} = 2.\overline{7}\%$.

La somma dà 3 in 2 casi: **p(3)**$= \frac{2}{36} = 0.0\overline{5} = 5.\overline{5}\%$.

La somma dà 4 in 3 casi: **p(4)**$= \frac{3}{36} = 0.08\overline{3} = 8.\overline{3}\%$.

La somma dà 5 in 4 casi: **p(5)**$= \frac{4}{36} = 0.\overline{1} = 11.\overline{1}\%$.

La somma dà 6 in 5 casi: **p(6)**$= \frac{5}{36} = 0.13\overline{8} = 13.\overline{8}\%$.

La somma dà 7 in 6 casi: **p(7)**$= \frac{6}{36} = 0.1\overline{6} = 16.\overline{6}\%$.

La somma dà 8 in 5 casi: **p(8)**$= \frac{5}{36} = 0.13\overline{8} = 13.\overline{8}\%$.

La somma dà 9 in 4 casi: **p(9)**$= \frac{4}{36} = 0.\overline{1} = 11.\overline{1}\%$.

La somma dà 10 in 3 casi: **p(10)**$= \frac{3}{36} = 0.08\overline{3} = 8.\overline{3}\%$.

La somma dà 11 in 2 casi: **p(11)**$= \frac{2}{36} = 0.0\overline{5} = 5.\overline{5}\%$.

La somma dà 12 in un caso: **p(12)**$= \frac{1}{36} = 0.02\overline{7} = 2.\overline{7}\%$.

E' possibile rappresentare questi valori con un istogramma.
Sull'asse delle x si rappresenta il valore della somma dei due dadi.
Sull'asse delle y si rappresenta il numero dei casi possibili.

Se al posto di 2 dadi a sei facce se ne tirano 3, 4 o un altro numero, oppure se le facce del dado non sono 6, è necessario ripetere da capo tutto il procedimento visto fin qui.

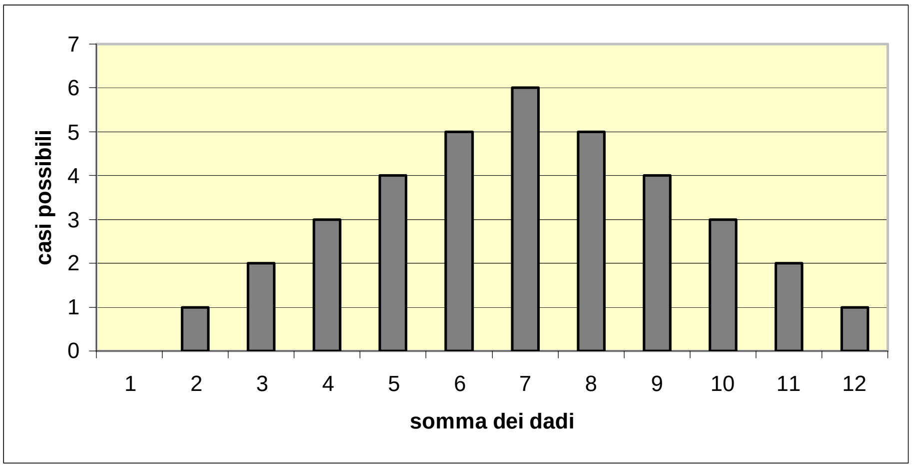


Fig. H2.4
Somma di due dadi: casi che si possono verificare.

Ecco qualche altra domanda - Qual è la probabilità che:

la somma sia un numero dispari?

Si devono contare i casi in cui la somma è un numero dispari. Nell'elenco alla pagina precedente i casi sono i seguenti: 1_2, 1_4, 1_6, 2_1, 2_3, 2_5, 3_2, 3_4, 3_6, 4_1, 4_3, 4_5, 5_2, 5_4, 5_6, 6_1, 6_3, 6_5, ossia 18.
p(**somma dispari**)= $\frac{18}{36}$ =0.5=50%.

il prodotto sia 12?

Si devono contare i casi in cui il prodotto è 12. Nell'elenco alla pagina precedente i casi sono i seguenti: 2_6, 3_4, 4_3, 6_2, ossia 4. **p**(**prodotto 12**)= $\frac{4}{36} = 0.\overline{1} = 11.\overline{1}\%$.

il prodotto sia pari?

Si fa prima a contare quanti sono i casi in cui il prodotto è dispari: 1_1, 1_3, 1_5, 3_1, 3_3, 3_5, 5_1, 5_3, 5_5, ossia 9. Se la probabilità che il prodotto sia dispari è $\frac{9}{36}$, la probabilità che il prodotto sia pari è, per la regola della probabilità contraria: **p**(**prodotto pari**)=**1-p**(**prodotto dispari**)$= 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = 0.75 = 75\%$.

ESEMPIO H2.13: INTERROGAZIONI CON LA PAGINA DEL LIBRO

Quando gli insegnanti interrogano usano vari metodi per estrarre il nome del malcapitato. Uno dei metodi più utilizzati è quello di sommare le cifre di una pagina del libro aperta a caso e così scegliere sull'elenco lo sfortunato di turno.
In questo modo alcuni verranno interrogati in continuazione ed altri quasi mai. Per capire se conviene essere all'inizio dell'elenco con un cognome che inizia per A oppure avere un cognome come ZUZZI risolviamo questo problema in un caso particolare: una classe composta da 17 allievi e un libro aperto a caso avente 200 pagine.

Se esce la pagina 1 viene interrogato il numero 1. Si mette quindi una crocetta sul numero 1, se esce la pagina 2 si mette una crocetta sul numero 2. Dopo 200 crocette si avrà questo schema:

xx	$\frac{2}{200}$	=0.01	=1%
xxxxx	$\frac{5}{200}$	=0.025	=2.5%
xxxxxx	$\frac{6}{200}$	=0.03	=3%
xxxxxxxx	$\frac{8}{200}$	=0.04	=4%
xxxxxxxxxx	$\frac{10}{200}$	=0.05	=5%
xxxxxxxxxxxx	$\frac{12}{200}$	=0.06	=6%
xxxxxxxxxxxxxx	$\frac{14}{200}$	=0.07	=7%

xxxxxxxxxxxxxxxx	$\frac{16}{200}$	=0.08	=8%
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	$\frac{22}{200}$	=0.11	=11%
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	$\frac{21}{200}$	=0.105	=10.5%
xxxxxxxxxxxxxxxxxx	$\frac{18}{200}$	=0.09	=9%
xxxxxxxxxxxxxxxx	$\frac{16}{200}$	=0.08	=8%
xxxxxxxxxxxxxx	$\frac{14}{200}$	=0.07	=7%
xxxxxxxxxxxx	$\frac{12}{200}$	=0.06	=6%
xxxxxxxxxx	$\frac{10}{200}$	=0.05	=5%
xxxxxxxx	$\frac{8}{200}$	=0.04	=4%
xxxxxx	$\frac{6}{200}$	=0.03	=3%

Chi si trova all'inizio o alla fine dell'elenco ha meno probabilità di essere interrogato, chi si trova nella parte centrale dell'elenco sarà tartassato con regolarità… Meglio avere un cognome tipo 'Abate' o 'Zuzzi', ma comunque meglio Abate! Nel caso in cui la classe abbia un numero diverso di allievi o il libro abbia un numero diverso di pagine si risolverà il problema con lo stesso metodo appena visto. E' chiaro che in realtà il libro non verrà aperto con la stessa probabilità in ogni pagina, perché lo si apre più spesso verso il centro, comunque il calcolo appena svolto garantisce una certa verosimiglianza con la realtà.

ESEMPIO H2.14: ESTRAZIONE DI PALLINE DA UN'URNA SENZA REINSERIMENTO.

Questo è uno degli esempi classici del calcolo delle probabilità, pertanto verrà trattato in maniera approfondita.

Ci siano in un'urna **5 palline bianche e 8 palline nere**.
Si vuole calcolare la probabilità che venga estratto a caso un certo numero di palline bianche e nere. Per far questo si risolve il caso in cui viene estratta una pallina, poi due, poi tre e così via…
Per ogni prima estrazione i casi possibili sono 13. Poiché la pallina, una volta estratta, non è reinserita nell'urna, nella seconda estrazione i casi possibili sono 12, nella terza 11 e così via.

1 pallina
Se si estrae una pallina ci sono solo due casi: bianca o nera.

p(**b**)= $\frac{5}{13}$.

p(**n**)= $\frac{8}{13}$.

2 palline
Se si estraggono 2 palline ho ben 4 casi: 2 bianche, 2 nere, una bianca e una nera in quest'ordine (una nera e una bianca in ordine ha la stessa probabilità), una bianca e una nera non importa in che ordine.

Due bianche vuol dire che si estrae una bianca e poi una bianca; si ricorda che la lettera e si rappresenta con il per.

p(**bb**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}$.

Due nere vuol dire che se ne estrae una nera e poi una nera; si ricorda che la lettera e si rappresenta con il per.

p(**nn**) = $\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}$.

Una bianca e una nera in quest'ordine (è la stessa probabilità di "una nera e una bianca in quest'ordine").

p(**bn in ordine**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}$.

Si è utilizzata qui la probabilità del prodotto.

Una bianca e una nera - può essere estratta [(una bianca e una nera) oppure (una nera e una bianca)]; si ricorda che l'e si rappresenta con il per e l'oppure con il più. Pertanto si ha

p(**bn senza ordine**) = **p**(**bn oppure nb**) = **p**(**bn**)+**p**(**nb**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}+\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}=2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}$.

Un altro modo di risolvere questo esercizio può essere il seguente: si calcola la probabilità p(bn in ordine), e poi ci si chiede :" in quanti modi è possibile che escano una bianca e una nera?" I modi sono due: 'bn' oppure 'nb'; si prende perciò la p(bn in ordine) e la si moltiplica per due:

p(**bn senza ordine**) = **p**(**bn in ordine**)·**modi possibili** = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot 2$.

Il numero dei modi in cui possono essere estratte una pallina bianca e una nera sono le permutazioni di b ed n, ossia P_2=2!=2. Un altro modo di utilizzare il calcolo combinatorio è utilizzare le combinazioni $C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$, e nel nostro caso n=2 e k=1. Si ha dunque $C_{2,1} = \frac{2!}{1!\cdot(1)!} = \binom{2}{1} = 2$.

3 palline

Si noti che **p**(**bnn**) = **p**(**nbn**) = **p**(**nnb**) e che **p**(**bbn**) = **p**(**bnb**) = **p**(**nbb**) pertanto non serve calcolare tutti e 6 questi casi, ma basta calcolarne due.

I casi possibili sono quindi: bbb, nnn, bnn in ordine, bbn in ordine, bnn in ogni ordine, bbn in ogni ordine.

Tre bianche.

p(**bbb**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}$.

Tre nere.

p(**nnn**) = $\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}$.

Una bianca e due nere in questo ordine.

p(**bnn**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}$.

Due bianche e una nera in questo ordine.

p(**bbn**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}$.

Una bianca e due nere in ogni ordine.

I modi possibili sono 3: bnn, nbn, nnb. Si deve quindi moltiplicare **p**(**bnn**) per 3.

p(**bnn in ogni ordine**) = **p**(**bnn**)·3 = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot 3$.

Un altro modo di contare i modi possibili è il seguente: si dispongano in 3 posti una bianca e due nere. La bianca può andare in uno qualunque dei 3 posti, poi gli altri due posti saranno occupati da palline nere.

I modi possibili sono 3·1·1=3. Utilizzando il calcolo combinatorio si possono calcolare le permutazioni con ripetizione di una pallina bianca e di due palline nere, ossia $P_3^{(2,1)} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = 3$. Un altro modo di utilizzare il calcolo combinatorio è utilizzare le combinazioni $C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$, e nel nostro caso n=3 e k=1. Si ha dunque $C_{3,1} = \frac{3!}{1!\cdot(2)!} = \binom{3}{1} = 3$.

Due bianche e una nera in qualsiasi ordine.

I modi possibili sono 3: bbn, nbb, bnb. Si deve quindi moltiplicare **p**(**bbn**) per 3.

p(**bbn in ogni ordine**) = **p**(**bbn**)·3 = $\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot 3$.

Un altro modo di contare i modi possibili è il seguente: si dispongano in 3 posti due bianche e una nera. La nera può andare in uno qualunque dei 3 posti, poi gli altri due posti saranno occupati da palline bianche.

I modi possibili sono 3·1·1=3. Utilizzando il calcolo combinatorio si possono calcolare le permutazioni con ripetizione di due palline bianche e di una pallina nera, ossia $P_3^{(2,1)} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = 3$. Un altro modo di utilizzare il calcolo combinatorio è utilizzare le combinazioni $C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$, e nel nostro caso n=3 e k=1. Si ha dunque $C_{3,1} = \frac{3!}{1!\cdot(2)!} = \binom{3}{1} = 3$.

4 palline

p(**bbbb**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}$.

p(**nnnn**) = $\frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10}$.

p(**bnnn**) = $\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}$.

Per calcolare p(bnnn in ogni ordine) si devono contare i modi possibili di avere 1 pallina bianca e 3 nere.
I modi sono 4: bnnn, nbnn, nnbn, nnnb. Utilizzando il calcolo combinatorio si possono calcolare le permutazioni con ripetizione di tre palline nere e di una pallina bianca, ossia $P_4^{(3,1)} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4$. Un altro modo di utilizzare il calcolo combinatorio è utilizzare le combinazioni $C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$, e nel nostro caso n=4 e k=1. Si ha dunque $C_{4,1} = \frac{4!}{1! \cdot (3)!} = \binom{4}{1} = 4$.

p(**bnnn in ogni ordine**) = $\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot 4$.
p(**bbnn**) = $\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10}$.

Per calcolare p(bbnn in ogni ordine) si devono contare i modi possibili di avere 2 palline bianche e 2 nere.
I modi sono 6: bbnn, bnbn, bnnb, nbbn, nbnb, nnbb. Utilizzando il calcolo combinatorio si possono calcolare le permutazioni con ripetizione di due palline bianche e di due palline nere, ossia $P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$. Un altro modo di utilizzare il calcolo combinatorio è utilizzare le combinazioni $C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$, e nel nostro caso n=4 e k=2. Si ha dunque $C_{4,2} = \frac{4!}{2 \cdot (2)!} = \binom{4}{2} = 6$.

p(**bbnn in ogni ordine**) = $\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot 6$.

p(**bbbn**) = $\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10}$.

Per calcolare p(bbbn in ogni ordine) si devono contare i modi possibili di avere 3 palline bianche e 1 nera.
I modi sono 4: bbbn, bbnb, bnbb, nbbb. Come detto prima si possono usare le formule $P_4^{(3,1)} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4$ o $C_{4,1} = \frac{4!}{1! \cdot (3)!} = \binom{4}{1} = 4$.

p(**bbbn in ogni ordine**) = $\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot 4$.

Importante:
Per trovare i modi possibili si può utilizzare il triangolo di Tartaglia, o la formula di calcolo combinatorio dei coefficienti binomiali $C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.

1

1 b   1 n

1 bb   2 bn   1 nn

1 bbb   3 bbn   3 bnn   1 nnn

1 bbbb   4 bbbn   6 bbnn   4 bnnn   1 nnnn

1 bbbbb   5 bbbbn   10 bbbnn   10 bbnnn   5 bnnnn   1 nnnnn

1 bbbbbb   6 bbbbbn   15 bbbbnn   20 bbbnnn   5 bbnnnn   6 bnnnnn   1 nnnnnn

Fig. H2.5
Calcolo dei modi possibili: triangolo di Tartaglia.

5 palline

Completare:

p(**bbbbb**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}$

p(**bbbbn**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}$

p(**bbbbn in ogni ordine**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot ......$

p(**bbbnn**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}$

p(**bbbnn in ogni ordine**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot ......$

p(**bbnnn**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}$

p(**bbnnn in ogni ordine**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot ......$

p(**bnnnn**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}$

p(**bnnnn in ogni ordine**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot ......$

p(**nnnnn**) = $\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}\cdot\frac{....}{....}$

Per ogni pallina estratta inserire al numeratore i casi favorevoli e al denominatore i casi possibili

Modi possibili; per vedere quanti sono è possibile consultare il triangolo di tartaglia o calcolare $C_{n,k}$.

ESEMPIO H2.15: ESTRAZIONE DI PALLINE DA UN'URNA CON REINSERIMENTO.

La differenza dal precedente esempio è che ogni volta che si estrae una pallina la si rimette dentro l'urna prima della successiva estrazione; questo vuol dire che i casi favorevoli e quelli possibili non cambiano dopo ogni estrazione. Risolviamo ad esempio il caso precedente (5 palline bianche e 8 nere) con l'estrazione di 3 palline.

p(**bbb**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}=\left(\frac{5}{13}\right)^3\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^0.$

p(**bbn**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{13}=\left(\frac{5}{13}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^1.$

p(**bbn in ogni ordine**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{13}\cdot 3=\left(\frac{5}{13}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^1\cdot 3.$

p(**bnn**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{8}{13}=\left(\frac{5}{13}\right)^1\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^2.$

p(**bnn in ogni ordine**) = $\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{8}{13}\cdot 3=\left(\frac{5}{13}\right)^1\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^2\cdot 3.$

p(**nnn**) = $\frac{8}{13}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{8}{13}=\left(\frac{5}{13}\right)^0\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^3.$

Se i due casi hanno probabilità p(A) e p(B) e non ci sono altri casi (come in questo caso, in cui la pallina estratta è bianca o nera), si effettuino k estrazioni e si vuole calcolare la probabilità che sia estratto A n volte è possibile utilizzare la formula seguente:

$$\boxed{\mathbf{p}(\textbf{A si verifica n volte su k}) = \left(\mathbf{p}(\mathbf{A})\right)^{\mathbf{n}}\cdot\left(\mathbf{p}(\mathbf{B})\right)^{\mathbf{k-n}}}$$

Se si vuole anche calcolare in ogni ordine si deve moltiplicare per i modi possibili, ossia il numero di combinazioni $C_{n,k}$.

$$\boxed{\mathbf{p}(\textbf{A n volte su k in ogni ordine}) = \left(\mathbf{p}(\mathbf{A})\right)^{\mathbf{n}}\cdot\left(\mathbf{p}(\mathbf{B})\right)^{\mathbf{k-n}}\cdot\mathbf{C}_{\mathbf{n,k}}}$$

ESEMPIO H2.16: PROBLEMA DEI COMPLEANNI.

La domanda è "qual è la probabilità che due persone siano nate in giorni diversi".

Ecco alcuni casi:

Qual è la probabilità che 2 persone siano nate in giorni diversi?

La prima persona può essere nata ogni giorno dell'anno, mentre la seconda deve nascere in un giorno che non sia quello in cui è nata la prima persona.

p(**2 persone in giorni diversi**) = $\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}$ ≈99.73%.

Qual è la probabilità che 3 persone siano nate in giorni diversi?
La prima persona può essere nata ogni giorno dell'anno, mentre la seconda deve nascere in un giorno che non sia quello in cui è nata la prima persona; la terza deve essere nata in un giorno diverso dai primi due.

p(**3 persone in giorni diversi**) = $\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$ ≈99.17%.

Qual è la probabilità che 23 persone siano nate in giorni diversi?

p(**23 persone in giorni diversi**) = $\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\frac{361}{365}\cdot\frac{360}{365}\cdot\frac{359}{365}\cdot\frac{358}{365}\cdot\frac{357}{365}\cdot\frac{356}{365}\cdot\frac{355}{365}\cdot\frac{354}{365}\cdot\frac{353}{365}\cdot\frac{352}{365}\cdot\frac{351}{365}\cdot\frac{350}{365}\cdot\frac{349}{365}\cdot\frac{348}{365}\cdot\frac{347}{365}\cdot\frac{346}{365}\cdot\frac{345}{365}\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}$ ≈49.27%.

Il contrario di "23 persone nate in giorni diversi" è "almeno due persone su 23 sono nate lo stesso giorno".
Quindi se la probabilità che 23 persone siano nate in giorni diversi è 49.27%, allora la probabilità che almeno due persone su 23 siano nate lo stesso giorno è il 50.73%.

Qual è la probabilità che 30 persone siano nate in giorni diversi?

p(**30 persone in giorni diversi**) = $\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot....\cdot\frac{337}{365}\cdot\frac{336}{365}$ ≈29.37%.

Il contrario di "30 persone nate in giorni diversi" è "almeno due persone su 30 sono nate lo stesso giorno".
Quindi se la probabilità che 30 persone siano nate in giorni diversi è 29.37%, allora la probabilità che almeno due persone su 30 siano nate lo stesso giorno è il 70.63%. E' quanto meno un risultato inaspettato!

Qual è la probabilità che 80 persone siano nate in giorni diversi?

p(**80 persone in giorni diversi**) = $\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot....\cdot\frac{287}{365}\cdot\frac{286}{365}$ ≈0.0085668%

Il contrario di "80 persone nate in giorni diversi" è "almeno due persone su 80 sono nate lo stesso giorno".
Quindi se la probabilità che 80 persone siano nate in giorni diversi è 0.0085668%, allora la probabilità che almeno due persone su 80 siano nate lo stesso giorno è circa il 99.99%.

ESEMPIO H2.17: EVENTI COMPATIBILI.

Eleonora ed Antinea tirano una cartaccia nel cestino durante l'ora di italiano per non alzarsi a buttarla.
Eleonora fa canestro con la probabilità dell'80% perché è molto precisa visto che gioca a pingpong, Antinea con la probabilità del 50% perché è seduta più lontana dal cestino.

Qual è la probabilità che:

Entrambe facciano canestro.
Entrambe significa che fa canestro Eleonora e fa canestro Antinea; si è visto che e indica il per.

p(**Eleonora e Antinea**) = **p**(**Eleonora**)·**p**(**Antinea**) = $\frac{80}{100}\cdot\frac{50}{100}=\frac{4000}{10000}=\frac{40}{100}$ = 40%.

Eleonora non faccia canestro.
La probabilità che Eleonora non faccia canestro è il contrario della probabilità che faccia canestro;

p(**Eleonora non fa canestro**) = **1-p**(**Eleonora**) = $1-\frac{80}{100}=\frac{20}{100}$ =20%.

Tutte e due non facciano canestro.
Tutte e due significa che Eleonora non fa canestro e (per) Antinea non fa canestro.

p(**Eleonora non fa canestro**)· **p**(**Antinea non fa canestro**) = $\frac{20}{100}\cdot\frac{50}{100}=\frac{1000}{10000}=\frac{10}{100}$ =10%.

Solo una fa canestro.
Solo una significa che [(fa canestro Eleonora e non fa canestro Antinea) oppure (non fa canestro Eleonora e fa canestro Antinea)].

[**p**(**E**)·¬**p**(**A**)] + [¬**p**(**E**) · **p**(**A**)] = $\frac{80}{100}\cdot\frac{50}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{50}{100}=\frac{40}{100}+\frac{10}{100}=\frac{50}{100}$ = 50%.

Un altro modo di calcolare questa probabilità è il seguente, utilizzando il grafico al termine del prossimo esempio.

p(E o A ma non tutte e due)=p(E)+p(A)-2·p(E e A) = $\frac{80}{100}+\frac{50}{100}-2\cdot\frac{80}{100}\cdot\frac{50}{100}=\frac{50}{100}$ = 50%.

Almeno una fa canestro.
"Almeno una fa canestro" è il contrario di "tutte e due non fanno canestro"; basta quindi calcolare la probabilità contraria di "tutte e due non fanno canestro", che si è già visto essere il 10%.

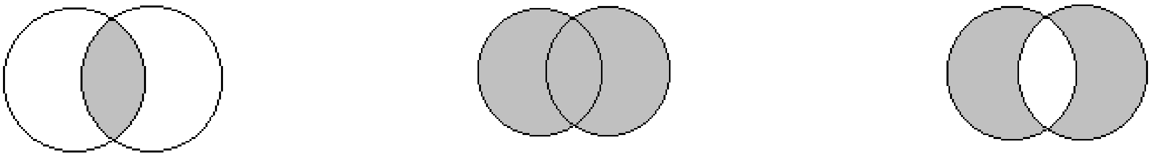
p(**almeno una fa canestro**) = $1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$ = 90%.

Un altro modo di calcolare questa probabilità è di utlizzare la formula della somma vista nel paragrafo H2.2.

p(A o B)=p(A)+p(B)-p(A e B).

In questo modo si calcola **p(E o A)=p(E)+p(A)-p(E e A)** = $\frac{80}{100} + \frac{50}{100} - \frac{80}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{90}{100}$ = 90%.

Per ricordare meglio questo importante esercizio ecco 3 schemi:



A "e" B.
Si calcola con A·B.

A "o" B.
Si calcola con A+B-A·B.

A "o" B ma non tutti e due.
Si calcola con A+B-2·A·B.

Fig. H2.6
Calcolo delle probabilità in caso di eventi compatibili.

ESEMPIO H2.18: IL BERSAGLIO.

Se si tira a caso una freccia verso un bersaglio e lo si colpisce si può prendere qualsiasi punto con la stessa probabilità (trascurando la bravura del lanciatore…).
Per calcolare la probabilità di colpire una certa zona si deve fare il rapporto tra la zona che ci interessa e l'area totale.

$$\text{PROBABILITA'} = \frac{\text{Area della zona richiesta}}{\text{Area totale}}.$$

1) *Qual è la probabilità di colpire la zona colorata in figura H2.7?*

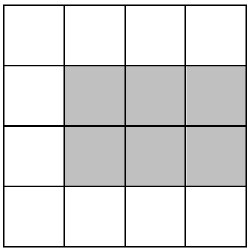


Fig. H2.7
Bersaglio: calcolo della probabilità di colpire la parte colorata.

L'area della zona colorata è 6 quadretti. Questa rappresenta i casi favorevoli.
L'area totale è 16 quadretti. Questa rappresenta i casi possibili.

p(**colorata**) = $\frac{6}{16}$ = 37.5%.

2) *Qual è la probabilità di colpire la zona colorata in figura H2.8?*

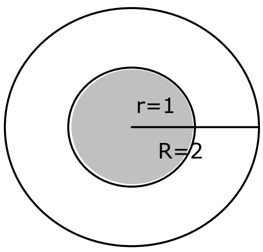


Fig. H2.8
Bersaglio: calcolo della probabilità di colpire la parte colorata.

L'area della zona colorata è $r \cdot r \cdot \pi = 1\pi$.
L'area totale è $2 \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi$.

p(**colorata**) = $\frac{\pi}{4\pi}$ = 25%.

3) *Nel caso precedente, se si colpisce il bersaglio con probabilità 70%, qual è la probabilità di colpire la zona colorata?*

Per colpire la zona colorata si deve colpire il bersaglio e colpire la zona colorata, per cui:
p(**colorata**) = $\frac{70}{100}\cdot\frac{25}{100}=\frac{35}{200}$ = 17.5%.

ESEMPIO H2.19: GIOCO EQUO.

Se un giocatore scommette 1€ su due risultati equiprobabili (lancio di una moneta) se vince guadagna 1€, se no lo perde. Se invece si scommette su due risultati che hanno probabilità diverse di vittoria anche il calcolo della quota di vincita è diverso.

Lancio di un dado a 6 facce.
Mattia scommette un euro sull'uscita del numero cinque. Se il gioco è equo quanto dovrebbe vincere?
La probabilità di vincere è $\frac{1}{6}$.

La formula è: QUOTA VINCITA = QUOTA PUNTATA $\cdot \frac{\text{PROBABILITA' DI PERDERE}}{\text{PROBABILITA' DI VINCERE}}$.

Nel nostro caso VINCITA = $1€\cdot\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$ = 1€·5=5€.

Un bookmaker dice che Deborah svolgerà il compito meglio di Jennifer con la probabilità del 60%.
Deborah scommette 5€ che la sua valutazione sarà migliore di quella di Jennifer. Se vince e il gioco è equo quanto dovrà essere pagata?

VINCITA = $5€\cdot\frac{\frac{40}{100}}{\frac{60}{100}}=5€\cdot\frac{2}{3}=3.\overline{3}€$.

In realtà spesso la quota che viene pagata dai bookmaker o nei casinò è DI MENO della quota che spetterebbe se il gioco fosse equo (ci devono pur guadagnare qualcosa per campare…)
I giochi d'azzardo con un allibratore non sono MAI equi. Ad esempio nel superenalotto la quota pagata dallo stato è circa un terzo di quello che dovrebbe essere se il gioco fosse equo. I restanti due terzi se li tiene lo stato.

ESEMPIO H2.20: IL SUPERENALOTTO.

Per vincere con il 6 al superenalotto bisogna indovinare 6 numeri da 1 a 90.
Si deve indovinare il primo, il secondo, il terzo, il quarto, il quinto e il sesto.
p(6 al superenalotto) = $\frac{6}{90}\cdot\frac{5}{89}\cdot\frac{4}{88}\cdot\frac{3}{87}\cdot\frac{2}{86}\cdot\frac{1}{85}\simeq 0.00000000161\simeq 0.000000161\%$ cioè praticamente zero.
In pratica se si giocassero ogni settimana due combinazioni si vincerebbe in media una volta ogni circa 6000 anni.
Solo che la cifra spesa in 6000 anni è circa 3 volte quella che poi viene vinta (**se** viene vinta).
Ognuno faccia le sue riflessioni.