G7. Integrali indefiniti

G7.1 Introduzione

Nel capitolo G5 si è visto come calcolare la derivata di una funzione data.
Quando si calcola la derivata di una funzione y=f(x) il risultato è un'altra funzione indicata con y'=f'(x).
In questo capitolo si vedrà come calcolare l'integrale di una funzione data.

Quando si calcola l'integrale di una funzione y=f(x) il risultato è un'altra funzione indicata con $F(x)=\int f(x)dx$.

L'integrale è l'operazione inversa della derivata.

Esempio G7.1:
Trovare l'integrale di $f(x)=3x^2$.

La funzione $f(x)=x^3$ ha derivata $f'(x)=3x^2$.
Poiché l'integrale è l'operazione inversa della derivata allora un integrale della funzione $f(x)=3x^2$ è $F(x)=x^3$.

Definizione:

Data una funzione f(x) il suo integrale si indica con $F(x)=\int f(x)dx$ e F(x)si dice ***primitiva*** di f(x).

Osservazione:
Nell'esempio G7.1 non si è detto: "**l'**integrale della funzione è…", ma "**un** integrale della funzione è…".
Infatti $y=x^3$ non è l'unica funzione che ha derivata $y'=3x^2$.
Hanno la stessa derivata anche le funzioni $y=x^3+1$, $y=x^3+2$, $y=x^3-3/2$, $y=x^3+\pi$, $y=x^3-\frac{e}{3}$, ecc. ecc., poiché la derivata di un numero è zero.
Si può dire quindi che tutte le funzioni del tipo $y=x^3+c$, dove c è un numero, hanno derivata $y=3x^2$.
Quando si calcola l'integrale bisogna quindi aggiungere questo "+c" al risultato.

$$f(x)=x^3 \xrightarrow{\text{derivata}} f'(x)=3x^2$$

$$F(x)=x^3+c \xleftarrow{\text{integrale}} f(x)=3x^2$$

Fig. G7.1
L'integrale è l'operazione inversa
della derivata.

Esempio G7.2:
Si calcoli l'integrale di $f(x)=3x^2$.

Si è visto nell'esempio G7.1 che una primitiva di $f(x)=3x^2$ è $F(x)=x^3$. Per quanto detto nell'osservazione precedente le infinite primitive di $f(x)=3x^2$ sono $F(x)=x^3+c$.
Si scrive $\int 3x^2dx=x^3+c$.

Mentre per ogni funzione è possibile trovare la derivata, non per tutte le funzioni è possibile calcolare algebricamente l'integrale. Ad esempio la funzione $y=\frac{tgx}{x}$ non è la derivata di alcuna funzione, quindi non è possibile calcolarne l'integrale.

Nel paragrafo G7.2 si vedrà come calcolare l'integrale indefinito *solo per le funzioni polinomiali*. Nei paragrafi successivi si vedranno le regole di derivazione per le altre funzioni.

G7.2 Calcolo dell'integrale indefinito per le funzioni polinomiali

La regola per il calcolo dell'integrale indefinito delle funzioni polinomiali è:

REGOLA 1 - $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c}$

Esempio G7.3:

Calcolare l'integrale $\int x^4 dx$.

Con la regola appena mostrata si ottiene: $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$.

Osservazione:
L'integrale di f(x)=1 è F(x)=x+c. Infatti la derivata di f(x)=x+c è f'(x)=1. Questo è un caso particolare della regola precedente con n=0. Infatti con n=0 la regola precedente diventa:

$$\int 1dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c .$$

Osservazione:
L'integrale di un numero f(x)=k è F(x)=kx+c, in quanto la derivata di f(x)=kx+c è f'(x)=k. Infatti se si mette un numero davanti alla x, sapendo che l'integrale di 1 è x, si ha:

$$\int kdx = \int (k \cdot 1) dx = k \int 1dx = kx + c .$$

Si sono quindi ricavate altre due regole per il calcolo dell'integrale:

REGOLA 2 - $\boxed{\int 1dx = x + c}$

REGOLA 3 - $\boxed{\int kdx = kx + c}$

Esempio G7.4:

Calcolare l'integrale $\int 3\, dx$.

Per la regola 3 si ottiene $\int 3\, dx = 3x + c$.

Osservazione:
Se la x è al denominatore si deve scrivere la frazione senza denominatore con esponente negativo.

REGOLA 4 - $\boxed{\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{1}{(-n+1)\, x^{n-1}} + c}$ $(n \neq 1)$.

Poi si applica la regola 1.

Esempio G7.5:

Calcolare l'integrale di $\int \frac{1}{x^2} dx$.

Si utilizza la regola 4 e si ottiene: $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$.

Osservazione:

Se si deve calcolare l'integrale $\int \frac{1}{x} dx$ con la regola 4 si ottiene una contraddizione. Infatti utilizzando la regola 4 si otterrebbe $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} + c$. Ma è vietato dividere per zero!

E' per questo che nella regola 4 è specificato $n \neq 1$. In questo caso si utilizza una regola differente. Ricordando le regole di derivazione si sa che la derivata di $f(x) = \frac{1}{x}$ è f'(x)=lnx.

Sapendo che l'integrale è l'operazione inversa dalla derivata si ricava la regola 5.

REGOLA 5 - $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c}$.

Osservazione:
Se si deve calcolare l'integrale di una radice la si deve trasformare in potenza ad esponente razionale.
Poi si utilizza la regola 1.

REGOLA 6 - $\boxed{\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \ldots}$

Esempio G7.6:

Calcolare l'integrale $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$.

Con la regola 6 e poi la regola 1 si ottiene: $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{2/5}dx = \frac{x^{(2/5)-1}}{(2/5)-1}+c = \frac{x^{-3/5}}{-3/5}+c = -\frac{5}{3\cdot\sqrt[5]{x^3}}+c$.

Osservazione:

Se si deve calcolare l'integrale di una somma di monomi basta calcolare l'integrale di ogni monomio per conto suo.

REGOLA 7 - $\boxed{\int f(x)+g(x)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx=\ldots}$

Esempio G7.7:

Calcolare l'integrale $\int -3x^2+\frac{2}{x^3}+\sqrt{x}\,dx$.

Utilizzando le regole viste finora, e integrando ogni monomio per conto proprio si ottiene:

$$\int -3x^2+\frac{2}{x^3}+\sqrt{x}\,dx = \int -3x^2dx+\int 2x^{-3}dx+\int x^{1/2}dx = \frac{-3x^3}{3}+\frac{2x^{-2}}{-2}+\frac{x^{(1/2)-1}}{(1/2)-1}+c=$$

$$=-x^3-\frac{1}{x^2}+\frac{x^{-1/2}}{-1/2}+c=-x^3-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}+c.$$

G7.3 Altre regole

Si ricorda che la derivata di $y=f^n(x)$ è $y'=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$. Invertendo tale regola di derivazione si ottiene la regola seguente:

REGOLA 8 - $\boxed{\int f^n(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+c}$

Si noti che non c'è alcuna regola che permetta di integrare $y=f^n(x)$, è sempre necessario che il fattore $f^n(x)$ sia moltiplicato per la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$.

Allo stesso modo, ricordando che la derivata del logaritmo naturale è $1/x$, si ottiene la regola seguente:

REGOLA 9 - $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c}$

E' necessario mettere il valore assoluto perché il logaritmo di un numero negativo non esiste. Anche in tal caso non è possibile integrare $1/f(x)$. E' necessaria la presenza del fattore $f'(x)$ al numeratore.
Utilizzando tali regole è possibile calcolare numerosi integrali, come mostrato nei seguenti esempi.

ESEMPIO G7.8:

Calcolare l'integrale $\int \cos^4 x\cdot \text{sen}x\,dx$.

Si utilizza la regola 8 con $f(x)=\cos x$, $n=4$, $f'(x)=-\text{sen}x$. E' necessario inserire un meno dentro e uno fuori dal simbolo di integrale.

$$-\int -\cos^4 x\cdot \text{sen}x\,dx=-\frac{\cos^5 x}{5}+c\ .$$

ESEMPIO G7.9:

Calcolare l'integrale $\int \frac{10x+3}{5x^2+3x}dx$.

Si utilizza la regola 9 con $f(x)=5x^2+3x$, $f'(x)=10x+3$.

$$\int \frac{10x+3}{5x^2+3x}dx=\ln|5x^2+3x|+c\ .$$

ESEMPIO G7.10:

Calcolare l'integrale $\int \text{cotg}x\,dx$.

$$\int \text{cotg}x\,dx=\int \frac{\cos x}{\text{sen}x}dx=\int \frac{\cos x}{\text{sen}x}dx=\ln|\text{sen}x|+c.$$

ESEMPIO G7.11:

Calcolare l'integrale $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx$.

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx=\int x^2\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\frac{\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\left(x^3+2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2\left(x^3+2\right)^{\frac{3}{2}}}{9}+c=\frac{2\cdot\sqrt[2]{\left(x^3+2\right)^3}}{9}+c.$$

ESEMPIO G7.12:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{x\ln x}dx$.

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx=\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln\left|\ln x\right|+c.$$

ESEMPIO G7.13:

Calcolare l'integrale $\int \frac{2x+4}{x-3}dx$.

$$\int \frac{2x+4}{x-3}dx=2\int \frac{x+2}{x-3}dx=2\int \frac{x+2-5+5}{x-3}dx=2\left(\int \frac{x-3}{x-3}dx+\int \frac{5}{x-3}dx\right)=2\left(\int 1dx+5\int \frac{1}{x-3}dx\right)=2x+10\ln\left|x-3\right|+c.$$

Ricordando le regole di derivazione delle funzioni goniometriche è possibile ricavare le analoghe regole di integrazione.

REGOLA 10 - $\boxed{\int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+c}$ REGOLA 11 - $\boxed{\int \operatorname{sen}\left(f(x)\right)\cdot f'(x)dx=-\cos f(x)+c}$

REGOLA 12 - $\boxed{\int \cos x\,dx=\operatorname{sen}x+c}$ REGOLA 13 - $\boxed{\int \cos\left(f(x)\right)\cdot f'(x)dx=\operatorname{sen}f(x)+c}$

REGOLA 14 - $\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+c}$ REGOLA 15 - $\boxed{\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx=\operatorname{tg}\left(f(x)\right)+c}$

REGOLA 16 - $\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx=-\operatorname{cotg}x+c}$ REGOLA 17 - $\boxed{\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}dx=-\operatorname{cotg}\left(f(x)\right)+c}$

ESEMPIO G7.14:

Calcolare l'integrale $\int \cos\left(3x+5\right)dx$.

$$\int \cos\left(3x+5\right)dx=\frac{1}{3}\int 3\cos\left(3x+5\right)dx=\frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(3x+5\right)+c\,.$$

ESEMPIO G7.15:

Calcolare l'integrale $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}dx$.

$$\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}dx=\operatorname{tg}e^x+c.$$

Nel capitolo sulle derivate non si sono viste le regole di derivazione delle funzioni goniometriche inverse perché non capita spesso di utilizzarle. Le corrispondenti regole di integrazione sono invece molto utilizzate:

REGOLA 18 - $\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+c}$ REGOLA 19 - $\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\operatorname{arctg}\left(f(x)\right)+c}$

REGOLA 20 - $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{arcsen}x+c}$ REGOLA 21 - $\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx=\operatorname{arcsen}\left(f(x)\right)+c=-\arccos\left(f(x)\right)+c}$

ESEMPIO G7.16:

Calcolare l'integrale $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \text{arctg}\left(e^x\right)+c$$

ESEMPIO G7.17:

Calcolare l'integrale $\int \frac{8x}{\sqrt{1-16x^4}}dx$.

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-16x^4}}dx = \int \frac{4x}{\sqrt{1-\left(4x^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{8x}{\sqrt{1-\left(4x^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\text{arcsen}\left(4x^2\right)+c.$$

ESEMPIO G7.18:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{1+9x^2}dx$.

$$\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\text{arctg}(3x)+c.$$

ESEMPIO G7.19:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = \text{arcsen}\frac{x}{2}+c.$$

ESEMPIO G7.20:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{m^2+x^2}dx$.

$$\int \frac{1}{m^2+x^2}dx = \int \frac{1}{m^2\left(1+\frac{x^2}{m^2}\right)}dx = \frac{1}{m}\int \frac{\frac{1}{m}}{1+\left(\frac{x}{m}\right)^2}dx = \frac{1}{m}\text{arctg}\frac{x}{m}+c.$$

Quest'ultimo esempio sarà molto utile per l'integrazione delle funzioni razionali fratte, pertanto è opportuno inserirlo tra le regole:

REGOLA 22 - $\boxed{\int \frac{1}{x^2+m^2}dx = \frac{1}{m}\text{arctg}\frac{x}{m}+c.}$

Tale regola può essere generalizzata al caso in cui al posto di x c'è f(x). Si ottiene così la regola 23. La regola 24 è un caso particolare della 23, molto utile, con f(x)=x+k.

REGOLA 23 - $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f^2(x)+m^2}dx = \frac{1}{m}\text{arctg}\frac{f(x)}{m}+c.}$ REGOLA 24 - $\boxed{\int \frac{1}{(x+k)^2+m^2}dx = \frac{1}{m}\text{arctg}\frac{x+k}{m}+c.}$

ESEMPIO G7.21:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{x^2+5}dx$.

$$\int \frac{1}{x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+c.$$

ESEMPIO G7.22:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx$.

$$\int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx=\frac{1}{3}\,\text{arctg}\,\frac{x+2}{3}+c.$$

Le ultime regole riguardano l'integrazione delle funzioni esponenziali. Si ricavano facilmente dalle corrispondenti regole di derivazione.

REGOLA 25 - $\boxed{\int e^x dx=e^x+c}$ REGOLA 26 - $\boxed{\int e^{(f(x))}\cdot f'(x)dx=e^{(f(x))}+c}$

REGOLA 27 - $\boxed{\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c}$ REGOLA 28 - $\boxed{\int a^{(f(x))}\cdot f'(x)dx=\frac{a^{(f(x))}}{\ln a}+c}$

<u>ESEMPIO G7.23:</u>

Calcolare l'integrale $\int e^{2x^2-4x}(x-1)\,dx$.

$$\int e^{2x^2-4x}(x-1)\,dx=\frac{1}{4}\int e^{2x^2-4x}(4x-4)\,dx=\frac{1}{4}e^{2x^2-4x}+c\,.$$

<u>ESEMPIO G7.24:</u>

Calcolare l'integrale $\int 2^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.

$$\int 2^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2}+c\,.$$

G7.4 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Per integrare una funzione razionale fratta è necessario che il grado del numeratore sia strettamente minore del grado del denominatore. Se così non è allora si deve dividere il numeratore per il denominatore, con il metodo della divisione dei polinomi, in maniera da abbassare il grado del numeratore.
Si ricorda che 17:3=5 con il resto di 2. Infatti 3·5+2=17.
Analogamente si può ragionare con il numeratore e il denominatore di una funzione razionale fratta.

Sia $\frac{N}{D}=Q$ con il resto di R. Allora D·Q+R=N. Si sostituisca D·Q+R al posto di N e si ottiene:

$$\frac{D\cdot Q+R}{D}=\frac{D\cdot Q}{D}+\frac{R}{D}=Q+\frac{R}{D}\,.$$

Per integrare $\frac{N}{D}$ lo si scrive nella forma $Q+\frac{R}{D}$. Q è un polinomio, quindi è facilmente integrabile con le prime regole di questo capitolo. Per integrare la seconda parte $\frac{R}{D}$ si mostreranno delle tecniche apposite in questo paragrafo.

<u>ESEMPIO G7.25:</u>

Calcolare l'integrale $\int \frac{3x^3+2}{3x+1}\,dx$.

Il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, quindi si deve effettuare la divisione di polinomi.

$$\begin{array}{lll|l}
3x^3+ & & +2 & 3x+1 \\
\cline{4-4}
3x^3+x^2 & & & x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9} \\
\hline
\text{"}\quad -x^2 & & +2 & \\
-x^2 & -\frac{1}{3}x & & \\
\cline{1-3}
\text{"} & \frac{1}{3}x & +2 & \\
 & \frac{1}{3}x & +\frac{1}{9} & \\
\cline{2-3}
 & \text{"} & +\frac{17}{9} &
\end{array}$$

Si è trovato che
$Q=x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$, $R=\frac{17}{9}$. Si può ora procedere a integrare.

$$\int \frac{3x^3+2}{3x+1}\,dx=\int x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\,dx+\int\frac{\frac{17}{9}}{3x+1}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1x^2}{6}+\frac{1}{9}x+\frac{17}{9}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{3}{3x+1}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1x^2}{6}+\frac{1}{9}x+\frac{17}{27}\ln|3x+1|+c$$

L'integrazione del fattore $\frac{R}{D}$ non è stata in questo caso molto difficoltosa, come invece certe volte avviene. In questo paragrafo si presenteranno d'ora in poi sempre casi in cui il denominatore ha un grado maggiore del numeratore. E' sempre possibile, come si è visto, ricondursi a questi casi con il procedimento appena descritto.

I - IL DENOMINATORE HA GRADO UNO

Se il denominatore ha grado uno, visto che si trattano casi in cui il numeratore ha grado minore del denominatore, allora il numeratore avrà grado zero. Questi casi sono tutti risolubili, come già si è visto, con la regola 9.

II - IL DENOMINATORE HA GRADO DUE

Se il denominatore ha grado due il numeratore avrà grado zero o uno e si è in uno dei seguenti casi:

$$\frac{q}{ax^2+bx+c} \quad \text{oppure} \quad \frac{px+q}{ax^2+bx+c}.$$

A seconda del numero delle radici del trinomio di secondo grado al denominatore varia il procedimento risolutivo. Vedremo quindi dapprima il caso in cui ci siano due radici, poi il caso con una sola radice e infine il caso in cui non ci sono radici.

IIA - IL DENOMINATORE HA GRADO DUE e $\Delta>0$.

Si devono dapprima determinare le radici x_1 e x_2, in maniera da scomporre il denominatore $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Si deve poi scrivere la frazione nella forma $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$, infine integrare i due termini che al denominatore sono di primo grado. Si svolge un esempio per chiarire meglio il procedimento.

<u>ESEMPIO G7.26:</u>

Calcolare l'integrale $\int \frac{2x+1}{x^2-2x-8}dx$.

Risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2-2x-8=0$ si ottiene $x_1=-2$ e $x_2=4$.
Il denominatore si scompone $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$.

Si vuole scrivere la funzione da integrare nella forma $\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$. Per trovare A e B si procede come segue:

$$\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x+2)(x-4)}=\frac{Ax+2A+Bx-4B}{(x+2)(x-4)}=\frac{(A+B)x+2A-4B}{(x+2)(x-4)}=\frac{2x+1}{x^2-2x-8}.$$

Per il principio di identità dei polinomi i numeratori sono uguali se $A+B=2$ e $2A-4B=1$. Si risolve il sistema e si trovano A e B.

$$\begin{cases}A+B=2\\2A-4B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\2(2-B)-4B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\4-2B-4B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\-6B=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\B=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\B=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Si può procedere a integrare sostituendo al posto della funzione razionale fratta la somma di funzioni equivalenti di primo grado al numeratore: $\frac{\frac{3}{2}}{x-4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}$.

$$\int\frac{2x+1}{x^2-2x-8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}}{x-4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}dx=\int\frac{\frac{3}{2}}{x-4}dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{x+2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{3}{2}\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+c$$

IIB - IL DENOMINATORE HA GRADO DUE e $\Delta=0$.

In questo caso c'è una sola radice dell'equazione ax^2+bx+c, quindi il denominatore è scomponibile come un quadrato di un binomio.

Se il numeratore è di grado zero si deve portare il denominatore al numeratore cambiando il segno dell'esponente, e poi utilizzare la regola 8.

Se il numeratore ha grado uno si deve spezzarlo in due parti con la proprietà distributiva della divisione. La parte con al numeratore il termine di primo grado si risolve con la regola 9, la parte con al numeratore il termine di grado zero si risolve, come detto precedentemente, portando il denominatore al numeratore cambiando il segno dell'esponente, e utilizzando la regola 8.

Si svolgono due esempi per chiarire il procedimento.

ESEMPIO G7.27:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{x^2-4x+4}dx$.

L'equazione $x^2-4x+4=0$ ha una sola soluzione $x=2$, pertanto il denominatore si scompone $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+4}dx=\int \frac{1}{(x-2)^2}dx=\int (x-2)^{-2}dx=\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{(x-2)}+c$$

ESEMPIO G7.28:

Calcolare l'integrale $\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+1}dx$.

L'equazione $9x^2+6x+1=0$ ha una sola soluzione $x=-1/3$, pertanto il denominatore si scompone $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$.

$$\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+1}dx=\frac{1}{9}\int \frac{9\cdot(2x+3)}{9x^2+6x+1}dx=\frac{1}{9}\int \frac{18x+27-21+21}{9x^2+6x+1}dx=\frac{1}{9}\left(\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+1}dx+\int \frac{21}{9x^2+6x+1}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\ln\left|9x^2+6x+1\right|+\int \frac{21}{(3x+1)^2}dx\right)=\frac{1}{9}\left(\ln(3x+1)^2+\int 21(3x+1)^{-2}dx\right)=\frac{1}{9}\left(\ln(3x+1)^2+7\int 3(3x+1)^{-2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\ln(3x+1)^2+7\frac{(3x+1)^{-1}}{-1}\right)+c=\frac{1}{9}\left(\ln(3x+1)^2-7\frac{1}{3x+1}\right)+c=\frac{1}{9}\ln(3x+1)^2-\frac{7}{9(3x+1)}+c$$

IIC - IL DENOMINATORE HA GRADO DUE e $\Delta<0$.

In questo caso non si può scomporre il denominatore.
Se al numeratore c'è un polinomio di grado uno si devono utilizzare le tecniche viste nell'esempio precedente per scomporre l'esercizio in due integrali, uno integrabile con la regola 9 e l'altro con un termine di grado zero al numeratore.
Il termine con grado zero al numeratore si integra, dopo opportuni accorgimenti, con la regola 24.

ESEMPIO G7.29:

Calcolare l'integrale $\int \frac{1}{2x^2-x+1}dx$.

L'equazione $2x^2-x+1=0$ non ha soluzioni, pertanto il denominatore non è scomponibile.
Per risolvere l'integrale bisogna ricondursi alla regola 24. I primi passaggi servono a ricondursi a tale regola.

$$\int \frac{1}{2x^2-x+1}dx=\int \frac{1}{2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}dx=$$

Il denominatore deve essere scritto nella forma $(x+k)^2+m^2$.

Si sviluppa tale denominatore: $(x+k)^2+m^2=x^2+2kx+k^2+m^2$. Per il principio di identità dei polinomi $2k=-\frac{1}{2}$ e $k^2+m^2=\frac{1}{2}$. Si ricava $k=-\frac{1}{4}$ dalla prima e si sostituisce nella seconda; $\frac{1}{16}+m^2=\frac{1}{2} \Rightarrow m^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16} \Rightarrow m=\pm\sqrt{\frac{7}{16}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{7}}{4}}+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+c$$

ESEMPIO G7.30:

Calcolare l'integrale $\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$.

L'equazione $x^2+x+1=0$ non ha soluzioni, pertanto il denominatore non è scomponibile.

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+4-3+3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{3}{x^2+x+1}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+x+1\right|+\int \frac{3}{x^2+x+1}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+x+1\right|+3\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+x+1\right|+3\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c=\frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+x+1\right|+3\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

III - IL DENOMINATORE HA GRADO 3 O PIU'

Si deve cercare di ricondursi ai casi in cui il denominatore è di primo secondo grado. Si presenta un esempio svolto.

<u>ESEMPIO G7.31:</u>

Calcolare l'integrale $\int \frac{2x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx$.

Considerando che $x^3-2x^2+x-2=\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)$ si pone:

$$\frac{2x-1}{\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-2\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)}=\frac{x^2\left(A+B\right)+x\left(-2B+C\right)+A-2C}{\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ha:

$$\begin{cases}A+B=0\\-2B+C=2\\A-2C=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\-2B+C=2\\-B-2C=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\C=2+2B\\-B-2\left(2+2B\right)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\C=2+2B\\-B-4-4B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\C=2+2B\\5B=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{-3}{5}=\frac{3}{5}\\C=2+2\cdot\frac{-3}{5}=2+-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}\\B=\frac{-3}{5}\end{cases}$$

L'integrale si trasforma dunque in:

$$\int \frac{2x-1}{\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)}dx=\frac{3}{5}\int \frac{1}{x-2}dx+\frac{1}{5}\int \frac{-3x+4}{x^2+1}dx=\frac{3}{5}\ln\left|x-2\right|+\frac{1}{5}\left[-\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx+4\int \frac{1}{x^2+1}dx\right]=$$

$$=\frac{3}{5}\ln\left|x-2\right|+\frac{1}{5}\left[-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)+4\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)\right]+c$$

<u>G7.5 Integrazione per parti</u>

Si ricorda la regola per il calcolo della derivata del prodotto:
y=f(x)·g(x) => y'=f'(x)·g(x)+ f(x)·g'(x)

Si indichi l'integrale di f(x) con $F(x)=\int f(x)dx$. Con dei semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x)\cdot g(x)=y'-f(x)\cdot g'(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x)\cdot g(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'-f(x)\cdot g'(x)$$

E' possibile integrare ambo i membri, ricavando così la regola di integrazione per parti.

$$\int f'(x)\cdot g(x)=\int\left(f(x)\cdot g(x)\right)'-\int f(x)\cdot g'(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int f'(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int f(x)\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\Rightarrow$$

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI - $\boxed{\int f(x)\cdot g(x)=F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)}$

<u>ESEMPIO G7.32:</u>

Calcolare l'integrale $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Si utilizza la regola di integrazione per parti ponendo f(x)=sen x e g(x)=x:

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x - \int \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \cos x + c\,.$$

ESEMPIO G7.33:

Calcolare l'integrale $\int x\, e^x\, dx$.

Si utilizza la regola di integrazione per parti ponendo $f(x)=e^x$ e g(x)=x:

$$\int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + c\,.$$

ESEMPIO G7.34:

Calcolare l'integrale $\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx$

Si utilizza la regola di integrazione per parti ponendo f(x)=1 e g(x)=lnx:

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - x + c\,.$$

ESEMPIO G7.35:

Calcolare l'integrale $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$

Si utilizza la regola di integrazione per parti ponendo f(x)=senx e g(x)=senx:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x)\, dx = \operatorname{sen} x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int 1\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

Si considerano il primo e l'ultimo termine dell'espressione come primo e secondo membro di un'equazione.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \cos x + x}{2} + c$$

G7.6 Integrazione per sostituzione

In alcuni casi è utile effettuare una sostituzione di variabile per semplificare il calcolo dell'integrale riconducendosi a casi già noti. La sostituzione non è, come visto nella risoluzione delle equazioni trinomie, una semplice sostituzione senza alcuna conseguenza; se ne spiega di seguito il motivo.

Data la funzione $y=f(x)$, di cui si vuole calcolare l'integrale $\int f(x)\, dx$, si vuole sostituire la variabile x con una certa variabile t. La x è dunque espressa in funzione di t; si pone $x=g(t)$, per cui $t=g^{-1}(x)$.

Se si deriva $x=g(t)$ ambo i membri si ottiene $dx=g'(t)\, dt$.

Sostituendo nell'integrale di partenza si ha:

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt\,.$$

Se questo integrale è più semplice da calcolare allora si utilizza tale regola, detta di integrazione per sostituzione. Al termine dell'integrazione basta sostituire nuovamente la t con $g^{-1}(x)$.

La scelta della corretta sostituzione non è sempre facilmente intuibile. Dapprima si mostrano alcuni esempi e successivamente si suggeriscono dei metodi per scegliere la giusta sostituzione.

ESEMPIO G7.36:

Calcolare l'integrale $\int \sqrt{2x-3}\, dx$.

La sostituzione da effettuare è t=2x-3. Da ciò segue $x=\frac{t+3}{2}=\frac{t}{2}+\frac{3}{2}$. Derivando si ottiene $dx=\frac{1}{2}\, dt$.

Sostituendo si risolve l'integrale:

$$\int \sqrt{2x-3}\, dx = \int \sqrt{t}\, \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{\frac{1}{2}\, t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt[2]{t^3} + c = \frac{1}{3}\, t\sqrt[2]{t} + c = \frac{1}{3}(2x-3)\sqrt[2]{2x-3} + c\,.$$

ESEMPIO G7.37:

Calcolare l'integrale $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

La sostituzione da effettuare è $t=\sqrt{x}$. Da ciò segue $x=t^2$. Derivando si ottiene $dx=2tdt$.
Sostituendo si risolve l'integrale:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,2t\,dt=\int 2\operatorname{sen} t\,dt=-2\cos t+c=-2\cos\sqrt{x}+c\ .$$

ESEMPIO G7.36:

Calcolare l'integrale $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, con $a\in\mathcal{R}$, $a>0$.

La sostituzione da effettuare è $x=a\cdot \operatorname{sen}t$. Da ciò segue $t=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$. Derivando si ottiene $dx=a\cdot\cos t\,dt$.

Si consideri inoltre che:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}=\cos t=\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}.$$

Sostituendo si risolve l'integrale:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2t}\cdot a\cdot\cos t\,dt=\int\sqrt{a^2\left(1-\operatorname{sen}^2t\right)}\cdot a\cdot\cos t\,dt=\int a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}\cdot a\cdot\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}\cdot\cos t\,dt=a^2\int\sqrt{\cos^2t}\cdot\cos t\,dt=a^2\int\cos^2t\,dt=a^2\left(\frac{t+\operatorname{sen}t\cdot\cos t}{2}\right)+c=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\cdot\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\right)+c=\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}\right)+c=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)+c=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

Tale esempio è servito a ricavare la seguente regola:

$$\boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+c.}$$

Si suggeriscono alcune sostituzioni che possono essere utili:

- Se la funzione contiene un termine del tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a>0$ si può sostituire: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x$.
- Se la funzione contiene un termine del tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ con $a<0$ si può sostituire $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-\alpha\right)$, in cui α è una radice del trinomio ax^2+bx+c .