G6. Studio di funzione

G6.1 Come tracciare il grafico di una funzione data

Nei capitoli precedenti si sono svolti tutti gli argomenti necessari per tracciare il grafico di una funzione.
In questo capitolo si vuole solamente mettere ordine negli argomenti fin qui trattati e mostrare come utilizzare gli strumenti appresi fino ad ora. Prima si darà un procedimento, poi saranno svolti alcuni esempi.

PROCEDIMENTO

1. **Calcolare il dominio della funzione.**
   Si calcola il dominio e si traccia il risultato trovato sul piano cartesiano (paragrafo G1.3).

2. **Determinare eventuali simmetrie.**
   Si deve trovare se la funzione è pari, dispari o periodica (paragrafi G1.7 e G1.11).
   - Se è pari è simmetrica rispetto all'asse y.
   - Se è dispari è simmetrica rispetto all'origine.
   - Se è periodica basta studiarla in un intervallo.

   Non si traccia nulla sul piano cartesiano ma il risultato servirà per verificare i successivi passaggi.

3. **Studiare il segno della funzione.**
   Si deve risolvere la disequazione $f(x)\geq 0$.
   Poi si traccia il risultato sul piano cartesiano (paragrafo G1.4).

4. **Trovare asintoti e punti di discontinuità.**
   Si devono trovare gli asintoti verticali, orizzontali e obliqui (paragrafi G3.1, G3.2 e G3.3).
   Poi si tracciano i risultati sul piano cartesiano.
   Si devono trovare i punti di discontinuità (paragrafo G3.5).
   Poi si tracciano i risultati sul piano cartesiano.

5. **Studiare la derivata prima.**
   Si calcola la derivata prima.
   Si risolve la disequazione $f'(x)\geq 0$ (paragrafo G4.5).
   Si trovano massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale, intervalli di crescenza e decrescenza ed eventuali punti singolari, e si traccia il risultato sul piano cartesiano.

6. **Studiare la derivata seconda.**
   Si calcola la derivata seconda.
   Si risolve la disequazione $f''(x)\geq 0$ (paragrafo G4.6).
   Si trovano i flessi e gli intervalli di concavità verso l'alto e verso il basso, se è il caso la tg inflessionale e si traccia il risultato sul piano cartesiano.

7. **Trovare alcuni punti della funzione.**
   Questo passo si effettua per essere più precisi nel tracciare la funzione. Si possono trovare le coordinate dei punti assegnando dei valori alla x e trovando il corrispondente valore della y.

Per chiarire meglio il procedimento appena visto ecco alcuni esempi.

<u>Esempio G6.1:</u>
Tracciare il grafico della funzione $y=2x^3-3x^2$.

1. DOMINIO.

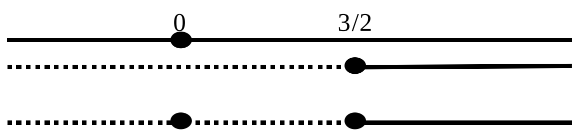
La funzione è polinomiale pertanto il dominio è $D=\mathbb{R}$.
Non bisogna quindi cancellare nessun intervallo sul piano cartesiano.

2. RICERCA DI EVENTUALI SIMMETRIE.

$f(-x) = 2(-x)^3-3(-x)^2 = -2x^3-3x^2$ quindi la funzione non è pari.
$-f(-x) = -(-2x^3-3x^2) = 2x^3+3x^2$ quindi la funzione non è dispari.
Non essendoci funzioni goniometriche la funzione non è periodica.

3. SEGNO.

Si risolve la disequazione $2x^3-3x^2 \geq 0$.
Si raccoglie x^2.
$x^2\cdot(2x-3) \geq 0$
$x^2 \geq 0$ sempre tranne in 0 (pallino)
$2x-3 \geq 0$ $\quad x \geq \frac{3}{2}$
totale



Si traccia il segno sugli assi cartesiani.

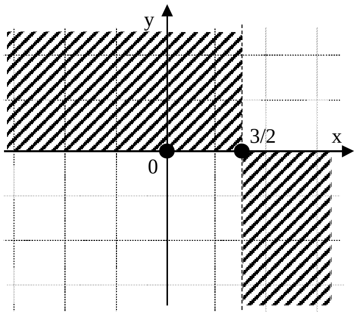


Fig. G6.1
Grafico del segno di $y=2x^3-3x^2$.

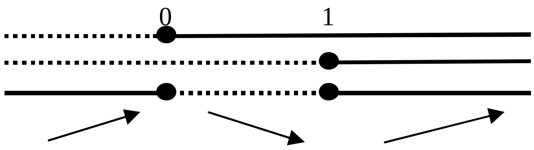
4. ASINTOTI e PUNTI DI DISCONTINUITA'.

Poiché il dominio è $\mathbb{R}$ non ci sono asintoti verticali.
Per calcolare gli eventuali asintoti orizzontali e obliqui si dovrebbero calcolare due limiti: il limite della funzione per x che tende a infinito e il limite di $f(x)\cdot\frac{1}{x}$ per x che tende a infinito; le funzioni polinomiali non hanno asintoti quindi non serve risolvere tali limiti.
Poiché il dominio è $\mathbb{R}$ non ci sono neanche punti di discontinuità.

5. STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si calcola la derivata prima $y'=6x^2-6x$.
Si pone $6x^2-6x$ maggiore o uguale a zero e si risolve la disequazione.

$6x^2-6x \geq 0$
$6x\cdot(x-1) \geq 0$
$x \geq 0$
$x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$
totale

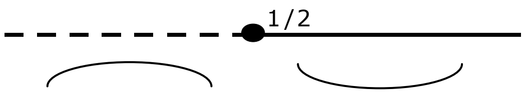


La funzione ha un massimo per x=0. $y=2(0)^3-3(0)^2=0$ quindi il massimo è il punto (0;0).
Si ha un minimo per x=1. $y=2(1)^3-3(1)^2=-1$ quindi il minimo è (1;-1).
Si tracciano massimi e minimi sugli assi cartesiani.

6. STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA.

Si calcola la derivata seconda $y''=12x-6$.
Si pone $12x-6\geq 0$ e si risolve la disequazione.

$12x-6 \geq 0 \quad x\geq\frac{1}{2}$



La funzione ha un flesso per $x=\frac{1}{2}$.

$y\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1-3}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$.

Il flesso è quindi $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Si traccia anche questo punto nel grafico.

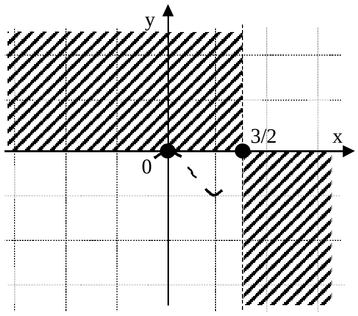


Fig. G6.2
Massimi, minimi e flessi di $y=2x^3-3x^2$.

7. TROVARE ALCUNI PUNTI.

Si assegnano alla x alcuni valori per trovare alcuni punti della funzione. A questo punto si può tracciare il grafico.

x	y	
-1	-5	
$-\frac{1}{2}$	-1	
0	0	Massimo
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	Flesso
1	-1	Minimo
$\frac{3}{2}$	0	
2	4	

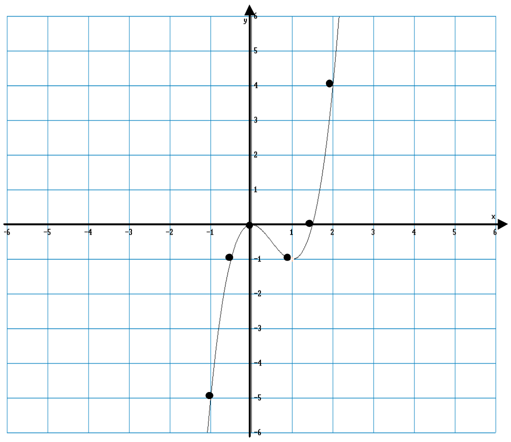


Fig. G6.3
Grafico della funzione $y=2x^3-3x^2$.

Esempio G6.2:

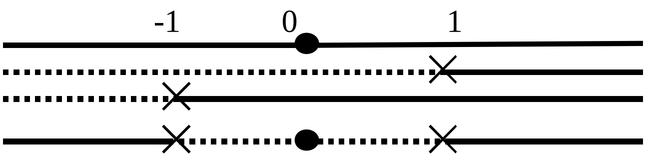
Tracciare il grafico della funzione $y=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. DOMINIO.

Si pone il radicando maggiore o uguale a zero e quindi si deve risolvere la disequazione $\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} \geq 0$.

$x^2 \geq 0$
x-1 > 0 x > 1
x+1 > 0 x > -1

totale



Il dominio è dato dai valori per cui il radicando è maggiore o uguale a zero, ossia x<-1, x=0, x>1.
Si traccia tale risultato sul grafico.

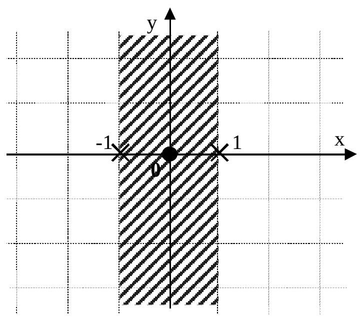


Fig. G6.4
Dominio della funzione $y=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

2. RICERCA DI EVENTUALI SIMMETRIE.

$$f(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = f(x).$$

La funzione è pari quindi è simmetrica rispetto all'asse y.

3. SEGNO DELLA FUNZIONE.

Le radici sono sempre positive, quindi il grafico si trova ovunque sopra l'asse delle x.

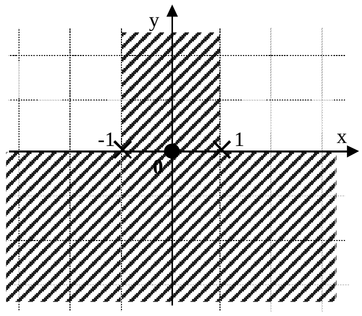


Fig. G6.5

Segno della funzione $y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$.

4. ASINTOTI E PUNTI DI DISCONTINUITA'.

Asintoti verticali.
Si calcolano i limiti per x che tende a 1 e –1, che sono i valori agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to1^+} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{0}} = +\infty .$$

$$\lim_{x\to-1^-} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{0}} = +\infty .$$

Ci sono quindi due asintoti verticali, x=1 per $x\to1^+$ e x=-1 per $x\to-1^-$.
Questi due punti sono anche punti di disc. di seconda specie.

Asintoti orizzontali.

Si calcola il $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$.

Lo si può risolvere con gli ordini di infinito o raccogliendo la x di grado massimo. Il risultato è comunque $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = 1$, pertanto y=1 è asintoto orizzontale. Essendoci l'asintoto orizzontale non ci sono asintoti obliqui.

Il risultato del calcolo dei punti di discontinuità è simmetrico rispetto all'asse y e questa è una conferma che la funzione è pari.

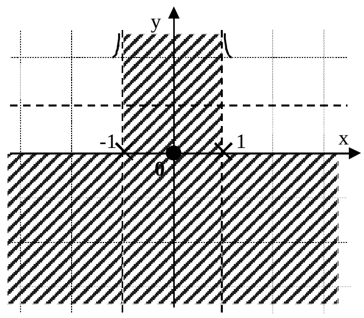


Fig. G6.6

Asintoti della funzione $y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$.

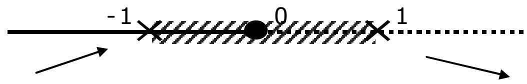
5. STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si calcola la derivata prima. Tralasciando i passaggi il risultato è:

$$y' = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \cdot \frac{-x}{(x^2 - 1)^2} .$$

Tutti i termini sono positivi tranne –x. Serve risolvere solo $-x \geq 0$, ossia $x \leq 0$.

Ci si deve ricordare di cancellare l'intervallo da –1 a 1 (zero escluso) in quanto non fa parte del dominio.



Non ci sono massimi né minimi.
Si è però in grado di capire se la funzione si avvicina all'asintoto orizzontale da sopra o da sotto.
Il risultato è simmetrico rispetto all'asse y e questa è una ulteriore conferma che la funzione è pari.

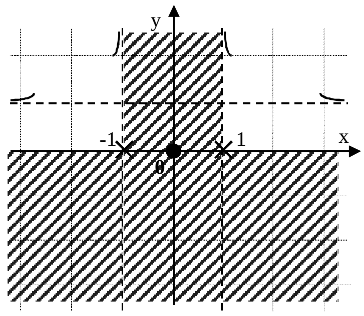


Fig. G6.7

Crescenza e decrescenza della funzione $y=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

6. STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA.

I calcoli sono troppo complessi quindi si tralascia lo studio del segno della derivata seconda.
Il fatto che la derivata seconda sia troppo complessa per studiarne il segno è qualcosa cha può capitare nello studio di funzioni. In questo caso si tralascia questo passaggio, casomai si assegna un numero maggiore di valori alla x nel passo successivo.

7 TROVARE ALCUNI PUNTI
Si assegnano alla x alcuni valori per trovare alcuni punti della funzione. A questo punto si può tracciare il grafico.

x	y
-3	$\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=$(razionalizzazione)$=\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 1{,}05$
-2	$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=$(razionalizzazione)$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}13$
$-\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=$(razionalizzazione)$=\frac{3\sqrt{5}}{5}\approx 1{,}3$
$\frac{3}{2}$	$3\sqrt{5}/5 \simeq 1{,}3$ per simmetria
2	$2\sqrt{3}/3 \simeq 1{,}13$ per simmetria
3	$3\sqrt{2}/4 \simeq 1{,}05$ per simmetria

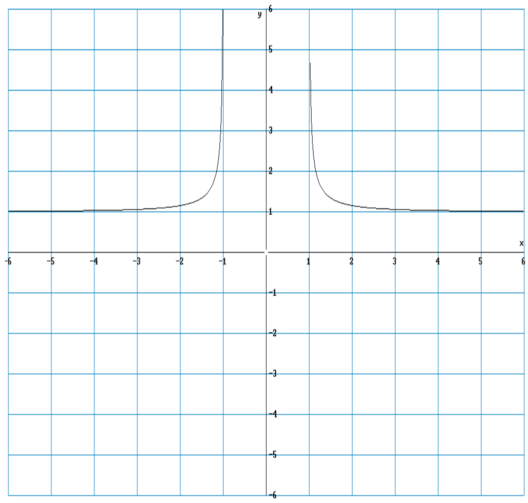


Fig. G6.8

Grafico della funzione $y=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

Un secondo tipo di esercizio è quello di tracciare il grafico di una funzione conoscendone le caratteristiche.
E' come se i calcoli dei 7 passaggi dello studio di funzione fossero già stati svolti e si utilizzano questi risultati per tracciare il grafico della funzione.
Eccone un esempio.

<u>Esempio G6.3</u>:

Tracciare il grafico della funzione y=f(x) conoscendone le seguenti caratteristiche.

DOMINIO $x \neq -1;\ x \neq 0$.

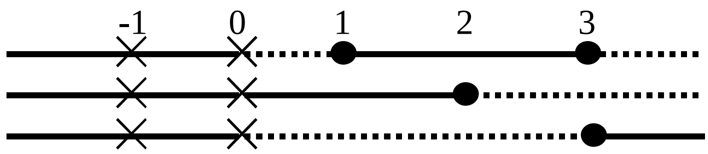
ASINTOTI x=0 asintoto verticale $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

y=-1 asintoto orizzontale $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

y=1 asintoto orizzontale $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

PUNTI DI DISCONTINUITA' x=0 di 2° specie (è un asintoto verticale).

x=-1 di 3° specie. $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$.



SEGNO — int. assi (1;0) e (3;0)
DERIVATA PRIMA — massimo (2;1)
DERIVATA SECONDA — flesso (3;0)

<u>SVOLGIMENTO.</u>

Si utilizzano uno ad uno i dati nel testo per tracciare il grafico della funzione.

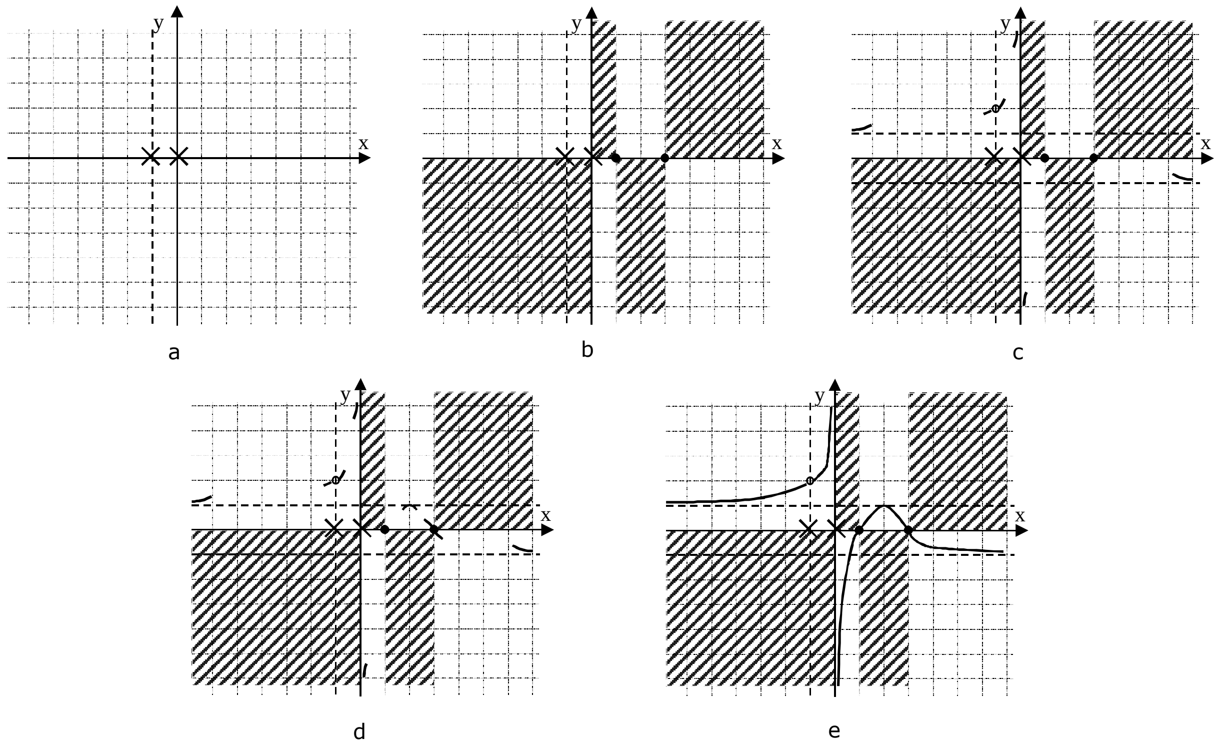


Fig. G6.9
Costruzione del grafico della funzione y=f(x).

a. Dominio.
b. Segno.
c. Asintoti e punti di discontinuità.
d. Massimi, minimi, crescenza e decrescenza.
e. Grafico completo.

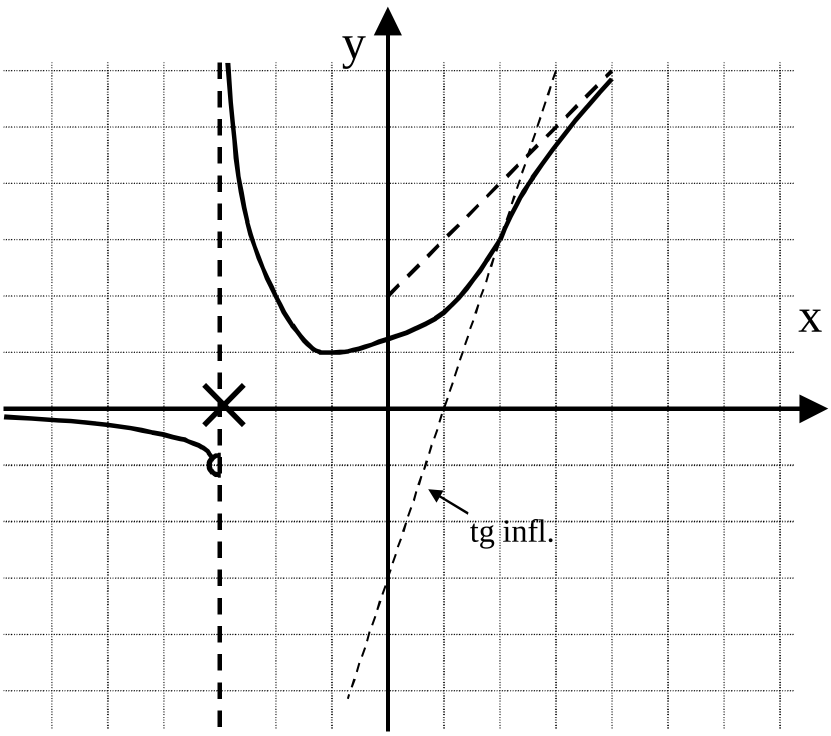
G6.2 Riconoscimento di caratteristiche dal grafico

Il problema che si affronta in questo paragrafo è quello di ricavare dal grafico le caratteristiche della funzione. Nei casi più fortunati è possibile anche ricavare l'equazione della funzione conoscendone il grafico.

Le caratteristiche richieste sono le seguenti:
1. DOMINIO.
2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI.
3. EVENTUALI SIMMETRIE.
4. ASINTOTI.
5. PUNTI DI DISCONTINUITA' E LORO SPECIE.
6. MASSIMI e MINIMI.
7. FLESSI A TG ORIZZONTALE, VERTICALE E OBLIQUA e RELATIVA RETTA TANGENTE.
8. PUNTI ANGOLOSI e CUSPIDI e RELATIVA RETTA TANGENTE.
9. INTERVALLI IN CUI LA FUNZIONE è POSITIVA o NEGATIVA.
10. INTERVALLI IN CUI LA FUNZIONE e CRESCENTE o DECRESCENTE.
11. INTERVALLi IN CUI LA FUNZIONE è CONCAVA VERSO l'ALTO o VERSO il BASSO.
12. RISOLUZIONE GRAFICA DEI LIMITI PROPOSTI (già trattato: es. 35-40 del cap. G2).

Può capitare che la funzione data non presenti qualcuna delle caratteristiche elencate.

Esempio G6.4:
Dato il seguente grafico ricavare le caratteristiche della funzione e risolvere i limiti elencati a fianco



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ldots$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \ldots$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \ldots$

$\lim_{x \to -2} f(x) = \ldots$

SVOLGIMENTO:

Dal grafico si ricavano le caratteristiche sotto elencate:

DOMINIO.
Sapendo che il dominio è la proiezione della funzione sull'asse x si ricava $x \neq -3$.

INTERSEZIONE CON GLI ASSI.
L'unico punto in cui la funzione interseca gli assi cartesiani è (0;1).

EVENTUALI SIMMETRIE.
Non ci sono simmetrie.

ASINTOTI.
Dal grafico si vede che gli asintoti sono 3.
L'asintoto verticale è la retta x=-3, in quanto il limite $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$.

C'è un asintoto orizzontale per x che tende a $-\infty$, ed è la retta y=0 in quanto $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

C'è un asintoto obliquo ed è la retta $y=x+2$ per x che tende a $+\infty$. Si vede dal grafico infatti che $q=2$ (intersezione dell'asintoto con l'asse y) e che m vale 1 (è il rapporto tra Δx e Δy).

PUNTI DI DISCONTINUITA' e LORO SPECIE.

C'è un solo punto di discontinuità ed è $x=-3$ di 2° specie: $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -1$.

MASSIMI e MINIMI.
C'è solo un minimo ed è il punto (-1;1).

FLESSI.
C'è solo un flesso ed è il punto (2;3), ed è a tg obliqua. La tangente inflessionale è $y=3x-3$. Anche in questo caso $q=-3$ (intersezione con l'asse y) e $m=3$ (è il rapporto tra Δx e Δy).

NON CI SONO PUNTI ANGOLOSI né CUSPIDI.

INTERVALLI IN CUI LA FUNZIONE è POSITIVA o NEGATIVA.

La funzione è positiva negli intervalli in cui si trova sopra l'asse x, ossia per $x>-3$.

La funzione è negativa negli intervalli in cui si trova sotto l'asse x, ossia per $x<-3$.

INTERVALLI IN CUI LA FUNZIONE e CRESCENTE o DECRESCENTE.

La funzione è crescente per $x>-1$, ossia dal minimo in poi.

La funzione è decrescente per $x<-3$ e per $-3<x<-1$.

INTERVALLI IN CUI LA FUNZIONE è CONCAVA VERSO l'ALTO o VERSO il BASSO.

La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $-3<x<2$, ossia dall'asintoto al flesso.

La funzione ha la concavità rivolta verso il basso per $x<-3$ e per $x>2$.

LIMITI.
Basta vedere a cosa si avvicina la y per x che tende al valore specificato, per cui:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -2} f(x) = 2$