# G5. Derivate

## G5.1 Significato geometrico di derivata

La derivata di una funzione in un suo punto è il coefficiente angolare della sua retta tangente.

Esempio G5.1:
La funzione $y=x^2$ e la sua retta tangente per il punto (1;1).

La funzione $y=x^2$ passa per il punto (1;1), come si è visto quando si è studiata la parabola.
Con strumenti che si vedranno nel seguito di questo capitolo si trova che la retta tangente alla parabola passante per il punto (1;1) ha equazione $y=2x-1$.
Il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto è 2, quindi la derivata prima della funzione nel punto considerato è 2.

Ciò si indica con $y'(1)=2$; ciò significa che la derivata della funzione nel punto $x=1$ ha valore 2.

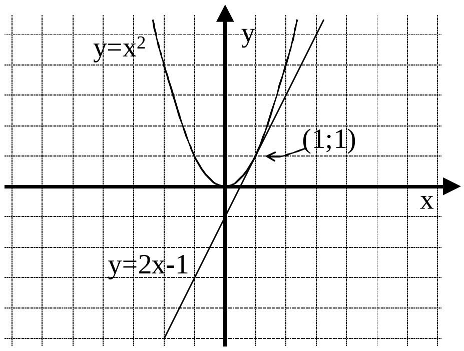



Fig. G5.1
Retta tangente a $y=x^2$ nel suo punto (1;1).

## G5.2 Definizione di derivata

Definizione:
Si definisce **rapporto incrementale** il coefficiente angolare della retta passante per 2 punti della funzione $y=f(x)$.

Si considerino i punti $A(x_0, f(x_0))$ e $B(x_0+h, f(x_0+h))$.

Il coefficiente angolare è il rapporto tra la variazione sull'asse y e la variazione sull'asse x, ossia: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

La variazione sull'asse y è: $\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$.
La variazione sull'asse x è: $\Delta x=x_0+h-x_0=h$.

Il **rapporto incrementale** è quindi: $m=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

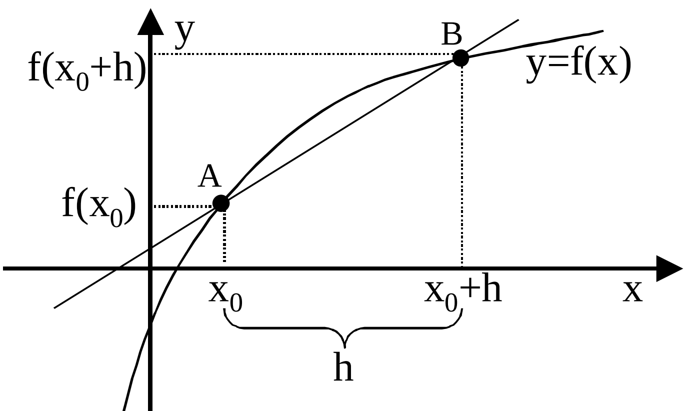



Fig. G5.2
Definizione di derivata.

Se si fa tendere h a zero allora il punto B si avvicina sempre più al punto A, e di conseguenza la retta passante per A e B si avvicina sempre di più alla retta tangente alla funzione passante per il punto A. Si può quindi dare la seguente definizione:

Definizione:
La **derivata** di y=f(x) nel punto $x_0$ è il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$.

Si può quindi scrivere $y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ .

**CONTINUITA' E DERIVABILITA':**

Se la funzione y=f(x) non è continua in un punto $x_0$, allora di sicuro non ci sarà la retta tangente alla funzione.
Quindi nei punti in cui la funzione non è continua non è neanche derivabile.
Un altro modo di dire la stessa cosa è che se la funzione ammette derivata in un punto $x_0$ allora è continua in quel punto.
Valgono dunque le seguenti implicazioni:

- NON CONTINUA $\to$NON DERIVABILE.
- DERIVABILE $\to$ CONTINUA.

Non è detto il viceversa, quindi è possibile che una funzione sia continua in un punto ma non sia derivabile.
Infatti non è detto che il limite del rapporto incrementale esista. Nel caso questo limite non esista oppure valga infinito si dice che la funzione è non derivabile in quel punto. Ci sono 3 possibili casi di punti in cui la funzione non è derivabile. Tali punti sono detti **punti di non derivabilità**.

1) Il limite del rapporto incrementale vale infinito.
In questo caso la retta tangente è verticale.
Si è in presenza di una **cuspide** o di un **flesso a tangente verticale**.
Si verifica uno dei casi rappresentati nelle figure G5.3 e G5.4.

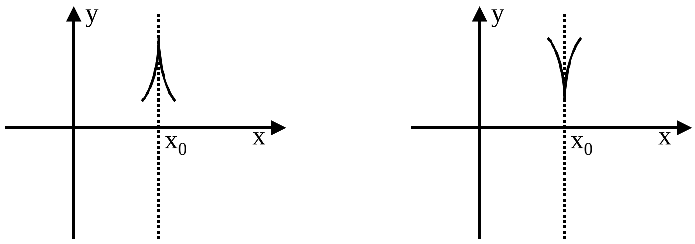



Fig. G5.3
Punti a tangente verticale: cuspidi.

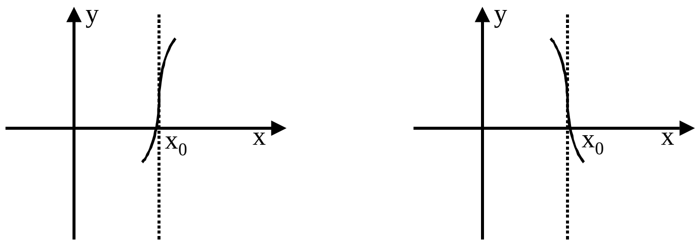



Fig. G5.4
Punti a tangente verticale: flessi a tangente verticale.

2) Il limite destro del rapporto incrementale è diverso dal limite sinistro.
In questo caso la retta tangente da destra è diversa dalla retta tangente da sinistra.
Si è in presenza di **punti angolosi**. I punti angolosi sono rappresentati in figura G5.5.

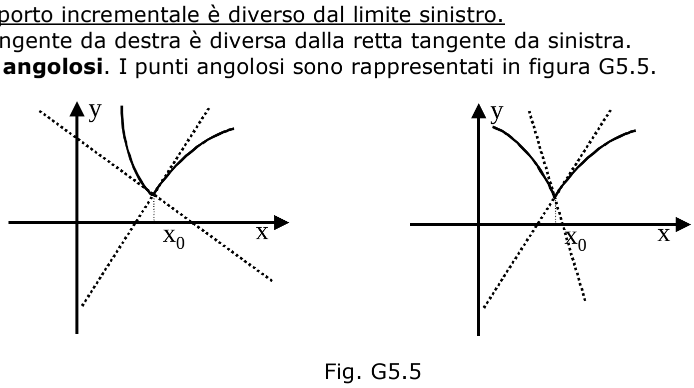



Fig. G5.5
Punti angolosi.

Nel grafico G5.5 la retta tangente da sinistra è discendente mentre la retta tangente da destra è ascendente. I coefficienti angolari sono quindi diversi (uno è negativo e l'altro è positivo).
Punti con queste caratteristiche sono detti punti angolosi.
Un esempio è il punto(1;0) per la funzione y=|ln(x)|, come visto nel paragrafo G1.12.

3) Il limite del rapporto incrementale non esiste
In questo caso la funzione, nonostante sia continua, non ha retta tangente.

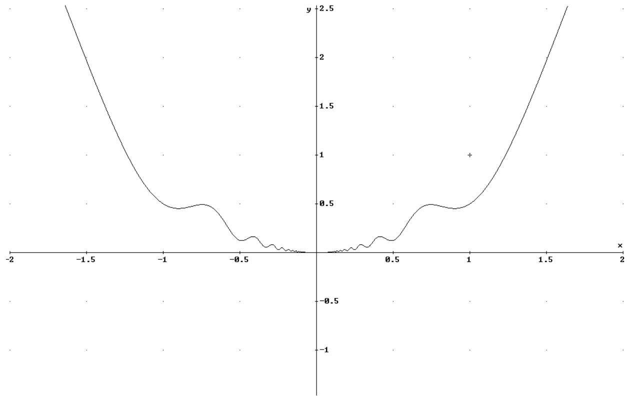


Fig. G5.6
Funzione continua in x=0 ma senza retta tangente.

Avvicinandosi da destra e da sinistra al punto x=0 della funzione rappresentata in figura G5.6 le oscillazioni diventano sempre più fitte.
Non è possibile calcolare il limite del rapporto incrementale, ossia dire quale è il coefficiente angolare della retta tangente.
In questo punto la funzione, pur continua, è non derivabile.

La derivata di una funzione f(x) in un punto $x_0$ si può indicare indifferentemente come $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ o $Df(x_0)$.
Con il procedimento appena visto si è in grado, svolgendo il limite, di calcolare il coefficiente angolare della retta tangente ad una funzione in un suo punto.

Esempio G5.2:
Data la funzione $y=x^2-1$ si calcoli la sua derivata nel suo punto $x_0=1$.

Si calcola la $y_0$ relativa: $y=f(x_0)=(x_0)^2-1=(1)^2-1=0$.
Sapendo che $x_0+h=1+h$, si calcola $f(x_0+h)=(1+h)^2-1$.
Si calcola il rapporto incrementale: $m=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$.
Si calcola la derivata come limite per h che tende a zero del rapporto incrementale.

$$y'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

Quindi il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $y=x^2-1$ nel suo punto di coordinate (1;0) è 2.

Sarebbe decisamente più comodo calcolare una funzione f'(x), detta funzione derivata, che ci permetta di trovare TUTTI i coefficienti angolari delle rette tangenti ad una funzione, senza dover calcolare ogni volta il limite.
Nel prossimo paragrafo si vedrà come calcolare tale funzione, e nei successivi 4 paragrafi si vedranno alcune delle possibili applicazioni della funzione derivata.

La **funzione derivata** si indica con **f'(x)**, **y'** oppure **Df(x)**. Le tre notazioni sono equivalenti.

## G5.3 Calcolo di derivate

Per quanto possa all'inizio sembrare inutile e pesante è assolutamente indispensabile imparare a memoria TUTTE le regole di derivazione. In questa prima tabella ci sono alcune regole di derivazione.
Nella seconda tabella ce ne saranno altre, ed anche quelle saranno da imparare a memoria.
Per k o n si intende un qualunque numero. Per f(x) e g(x) si intende qualunque funzione, ossia qualunque espressione contenente la x.

| | funzione | derivata |
|---|---|---|
| 1 | $y=k$ | $y'=0$ |
| 2 | $y=x$ | $y'=1$ |
| 3 | $y=x^n$ | $y'=n\cdot x^{n-1}$ |
| 4 | $y=\sqrt{x}$ | $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 5 | $y=k\cdot f(x)$ | $y'=k\cdot f'(x)$ |
| 6 | $y=sen(x)$ | $y'=cos(x)$ |
| 7 | $y=cos(x)$ | $y'=-sen(x)$ |
| 8 | $y=a^x$ | $y'=a^x\cdot ln(a)$ |
| 9 | $y=e^x$ | $y'=e^x$ |
| 10 | $y=log_a(x)$ | $y'=\frac{1}{x}\cdot log_a e$ |
| 11 | $y=ln(x)$ | $y'=\frac{1}{x}$ |
| 12 | $y=f(x)+g(x)$ | $y'=f'(x)+g'(x)$ |
| 13 | $y=f(x)\cdot g(x)$ | $y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ |
| 14 | $y=\frac{1}{f(x)}$ | $y'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ |
| 15 | $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ | $y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ |
| 16 | $y=tg(x)$ | $y'=1+tg^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$ |

<u>Esempio G5.3:</u>
Calcolare la derivata di $y=2$.

$y'=0$ (regola 1).

<u>Esempio G5.4:</u>
Calcolare la derivata di $y=x$.

$y'=1$ (regola 2).

<u>Esempio G5.5:</u>
Calcolare la derivata di $y=2x$.

$y'=2$ (regole 2 e 5).

<u>Esempio G5.6:</u>
Calcolare la derivata di $y=3^x$.

$y'=3^x\cdot ln3$ (regola 8).

<u>Esempio G5.7:</u>
Calcolare la derivata di $y=-7\cdot senx$.

$y'=-7\cdot cosx$ (regole 5 e 6).

<u>Esempio G5.8:</u>
Calcolare la derivata di $y=x^3$.
$y'=3x^2$ (regola 3)

<u>Esempio G5.9:</u>
Calcolare la derivata di $y=5x^4$.

$y'=20x^3$ (regole 3 e 5).

Esempio G5.10:
Calcolare la derivata di $y=\cos x+3x$.

$y'=-\operatorname{sen}x+3$ (regole 7, 2, 5 e 12).

Esempio G5.11:

Calcolare la derivata di $y=\frac{1}{\ln(x)}$

$$y'=-\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=-\frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}$$ (regole 11 e 14)

Esempio G5.12:
Calcolare la derivata di $y=2x^3\cdot\cos x$.

$y'=6x^2\cdot\cos x+2x^3\cdot(-\operatorname{sen}x)= x^2\cdot\cos x-2x^3\cdot\operatorname{sen}x$ (regole 13, 5, 3, 7).

Esempio G5.13:
Calcolare la derivata di $y=\sqrt{x}$.

Si deve trasformare la radice in esponente razionale prima di calcolare la derivata, e poi si utilizza la regola 3.
Si ricorda che $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ e che $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $\rightarrow$ $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ (La regola 4 è un caso particolare della regola 3).

Esempio G5.14:

Calcolare la derivata di $y=\frac{e^x}{x^2+3x}$.

$$y'=\frac{e^x(x^2+3x)-e^x(2x+3)}{(x^2+3x)^2}=\frac{e^x(x^2+3x-2x-3)}{(x^2+3x)^2}=\frac{e^x(x^2+x-3)}{(x^2+3x)^2}$$ (regole 15 ,12, 9 ,5, 3, 2).

Esempio G5.15:
Calcolare la derivata di $y=tg(x)$.

Si deve trasformare $tg\,x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ e poi si usa la regola 15.

$$y'=\frac{\cos x\cdot\cos x+\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}x}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=\mathbf{\frac{1}{\cos^2x}}$$

oppure $$y'=\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=\frac{\cos^2x}{\cos^2x}+\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}=\mathbf{1+tg^2x}$$

(regole 15, 6, 7).

(La regola 16 è quindi un caso particolare della regola 15).

Questa seconda tabella serve in realtà solo a capire bene la regola più complessa, quella della derivata delle funzioni composte, già trattate al paragrafo G1.9.

| | funzione | derivata |
|---|---|---|
| 17 | $y=f(g(x))$ | $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ |

Questa regola serve ogni volta che una funzione si trova dentro un'altra, come ad esempio $y=\sqrt{x^2-3x}$.
In questo caso g(x) è la funzione dentro, ossia $g(x)=x^2-3x$, e f(x) è la funzione fuori, ossia $f(x)=\sqrt{x}$.
Per trovare la derivata di questa funzione si calcola la derivata della funzione esterna e la si moltiplica per la derivata della funzione interna: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}}\cdot(2x-3)$.
Tale regola è applicabile alle regole già viste, dove al posto di x c'è però f(x).
Valgono tutte le regole precedenti, ma **<u>bisogna ricordarsi di moltiplicare per la derivata della funzione interna</u>**.

| | funzione | derivata |
|---|---|---|
| 18 | $y=f^n(x)$ | $y'=n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$ |
| 19 | $y=\sqrt{f(x)}$ | $y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$ |
| 20 | $y=sen(f(x))$ | $y'=\cos(f(x))\cdot f'(x)$ |
| 21 | $y=\cos(f(x))$ | $y'=-sen(f(x))\cdot f'(x)$ |
| 22 | $y=a^{f(x)}$ | $y'=a^{f(x)}\cdot \ln(a)\cdot f'(x)$ |
| 23 | $y=e^{f(x)}$ | $y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ |
| 24 | $y=\log_a(f(x))$ | $y'=\frac{1}{f(x)}\cdot \log_a e\cdot f'(x)$ |
| 25 | $y=\ln(f(x))$ | $y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$ |
| 26 | $y=tg(f(x))$ | $y'=\left[1+tg^2\ (f(x))\right]\cdot f'(x)= =\frac{1}{\cos^2\ (f(x))}\cdot f'(x)$ |

<u>Esempio G5.16:</u>
Calcolare la derivata di $y=sen^3x$.

$y'=3sen^2x\cdot cosx$. (Dire $y=sen^3x$ è la stessa cosa di $y=(senx)^3$, quindi si deve usare la regola 18.)

<u>Esempio G5.17:</u>
Calcolare la derivata di $y=senx^3$.

$y'=cosx^3\cdot 3x^2$. (In $senx^3$ la funzione interna è $f(x)=x^3$ e quella interna è $g(x)=senx$. Si usa la regola 20).

<u>Esempio G5.18:</u>
Calcolare la derivata di $y=\sqrt{x^2+2x}$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}\cdot(2x+2)=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$ (regola 19)

<u>Esempio G5.19:</u>
Calcolare la derivata di $y=(x^3-2x)^4$.

$y'=4\cdot(x^3-2x)^3\cdot(3x^2-2)$ (regola 18).

<u>Esempio G5.20:</u>
Calcolare la derivata di $y=\ln(senx)$.

$y'=\frac{1}{senx}\cdot cosx=cotgx$ (regola 25).

<u>Esempio G5.21:</u>
Calcolare la derivata di $y=sen\left(\sqrt{3x}\right)$.

In questo caso le funzioni sono 3, il seno, la radice e 3x.

$y'=\cos\sqrt{3x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3$.

Si calcola la derivata del seno, per la derivata della radice, per la derivata di 3x.

<u>Esempio G5.22:</u>
Calcolare la derivata di $y=x^x$.

Si deve trasformare $x^x$. Ricordando che $e^{\ln x}=x$, sostituiamo $e^{\ln x}$ al posto di x, e poi si usa la regola 23.
Si ottiene $y=e^{x\cdot\ln x}$.

$y'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)$.

Esempio G5.23:

Calcolare la derivata di $y=\frac{x^3}{(x^2-1)^2}$.

Si utilizza la regola 15, e per calcolare g′(x) al numeratore si utilizza la regola 18.

$$y'=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)^2-x^3\cdot D(x^2-1)^2}{(x^2-1)^4}=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)^2-x^3\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$ (si raccoglie $x^2\cdot(x^2-1)$).

$$=\frac{x^2\cdot(x^2-1)\left[3\cdot(x^2-1)-4x^2\right]}{(x^2-1)^4}=\frac{x^2\cdot(3x^2-3-4x^2)}{(x^2-1)^3}=\frac{x^2\cdot(-x^2-3)}{(x^2-1)^3}.$$

## G5.4 Teorema De L'Hôpital

Molte forme indeterminate del tipo 0/0 o ∞/∞ non sono risolvibili con i metodi trattati nel capitolo 2. Il teorema De L'Hôpital fornisce un diverso e veloce metodo risolutivo.

**TEOREMA di De L'Hôpital.**

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in $[a,b]-\{x_0\}$ e $x_0\in[a,b]$ e il $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma $\frac{0}{0}$ allora, se esiste il $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste anche il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta $\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Sotto opportune ipotesi il teorema il teorema vale anche per le forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Questo teorema può essere utilizzato per risolvere limiti altrimenti difficilmente risolvibili.
Bisogna derivare numeratore e denominatore, anche più volte, fino a che la forma indeterminata non scompare.

Esempio G5.24:

Risolvere il limite $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-e^x}{1-\ln x}$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-e^x}{1-\ln x}=\frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata. Si calcola la derivata del numeratore e del denominatore.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+e^x}{1-\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+e^x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(4x^3+e^x)\cdot x=\infty.$$

Esempio G5.25:

Risolvere il limite $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^4-4x^3+4x^2}$.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^4-4x^3+4x^2}=\frac{0}{0}$ forma indeterminata. Si calcola la derivata del numeratore e del denominatore.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^4-4x^3+4x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-12x^2+12x-8}{4x^3-12x^2+8x}=\frac{32-48+24-8}{32-48+16}=\frac{0}{0}.$$

Anche con la derivata prima non è stata eliminata la forma indeterminata. Si calcolano allora le derivate seconde.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^4-4x^3+4x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3-12x^2+12x-8}{4x^3-12x^2+8x}=\lim_{x\to 2}\frac{12x^2-24x+12}{12x^2-24x+8}=\frac{48-48+12}{48-48+8}=\frac{3}{2}.$$

## G5.5 Ricerca della retta tangente

Si può ora riprendere l'esempio G5.1 per determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $y=x^2-1$.
La derivata di tale funzione è $y'=2x$. Tale formula ci permette di calcolare il coefficiente angolare della retta tangente per tutte le x.
Se in tale formula si sostituiscono alcuni valori al posto della x si trovano i corrispondenti coefficienti angolari delle rette tangenti.
Ad esempio:

x=-1 $y'(-1)=2\cdot-1=-2$
x=0 $y'(0)=2\cdot 0=0$
x=1 $y'(1)=2\cdot 1=2$

In effetti i coefficienti angolari delle rette tangenti nei punti –1,0 e 1 sono proprio –2, 0 e 2 rispettivamente.

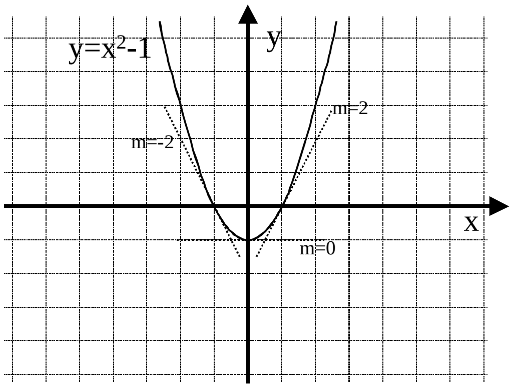



Fig. G5.7
Coefficienti angolari delle rette tangenti a $y=x^2$ per x=1, 2, 3.

Per determinare la retta tangente si può utilizzare la formula <u>RETTA PER UN PUNTO</u>, già vista quando si è studiata la retta in geometria analitica, ossia:

$$\boxed{\mathbf{y-y_0=m(x-x_0)}}$$

Per utilizzare questa formula non basta conoscere il coefficiente angolare m, ma serve anche un punto $(x_0, y_0)$.
$x_0$ è un dato del problema, $y_0$ si trova sostituendo $x_0$ nell'equazione della funzione.

Si ha quindi il seguente **procedimento**:

- Si calcola $y_0=f(x_0)$ sostituendo il valore di $x_0$ al posto della x nella funzione.
- Si calcola $y'=f'(x)$ derivata della funzione $y=f(x)$.
- Si calcola $m=f'(x_0)$ sostituendo il valore di $x_0$ nell'espressione della derivata.
- Si sostituiscono i valori di $x_0$, $y_0$ e m nella formula di retta per un punto $y-y_0=m(x-x_0)$.

<u>Esempio G5.26:</u>
Trovare l'equazione della retta tangente alla funzione $y=x^3-x^2+3x$ nel suo punto di ascissa $x_0=1$.

$\mathbf{x_0=1}$ è un dato del problema.
Per trovare $y_0$ si sostituisce 1 al posto della x nell'equazione della funzione.

$\mathbf{y_0}=1^3-1^2+3\cdot 1=\mathbf{3.}$

Per trovare m prima si calcola la derivata della funzione

$f'(x)=3x^2-2x+3.$

e poi si sostituisce in essa $x_0=1$ al posto della x.

$\mathbf{m}=y'(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+3=\mathbf{4.}$

Ora si sostituiscono tali valori nella formula $y-y_0=m(x-x_0)$

$y_0=3$ $\quad$ $m=4$ $\quad$ $x_0=1$

$y-3=4(x-1)$

$y-3=4x-4 \quad \rightarrow \quad y=4x-4+3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{y=4x-1}}$

Questa è quindi l'equazione della retta tangente alla funzione $y=x^3-x^2+3x$ nel suo punto di ascissa $x_0=1$.

## <u>G5.6 Studio della derivata prima</u>

Si possono utilizzare i coefficienti angolari per determinare se la funzione in alcuni punti è crescente o decrescente.
Se il coeff. angolare della retta tangente (ossia la derivata) è positivo, allora la funzione è crescente.
Se il coeff. angolare della retta tangente (ossia la derivata) è negativo, allora la funzione è decrescente.

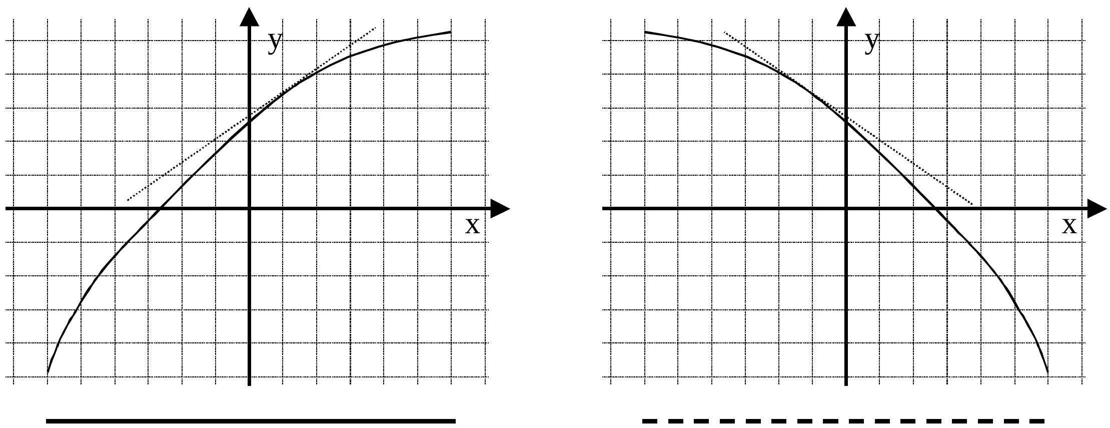



Fig. G5.8
Funzione crescente ⇔ derivata positiva.
Funzione decrescente ⇔ derivata negativa.

Se il coeff. angolare della retta tangente (ossia la derivata) è zero, allora la funzione non è né crescente né decrescente, e siamo in presenza di un massimo, di un minimo o di un flesso a tangente orizzontale.

In particolare:

- se prima di un punto la funzione è crescente, e dopo è decrescente si è in presenza di un **massimo**.
- se prima di un punto la funzione è decrescente, e dopo è crescente si è in presenza di un **minimo**.
- se prima di un punto la funzione è crescente, e dopo è crescente si è in presenza di un **flesso ascendente a tangente orizzontale**.
- se prima di un punto la funzione è decrescente, e dopo è decrescente si è in presenza di un **flesso discendente a tangente orizzontale**.

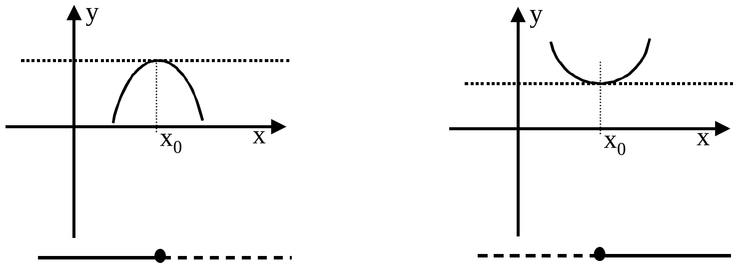



Fig. G5.9
Massimo e minimo.

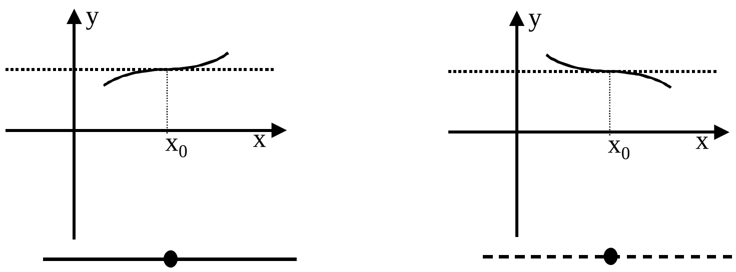



Fig. G5.10
Flesso ascendente a tangente orizzontale e
flesso discendente a tangente orizzontale.

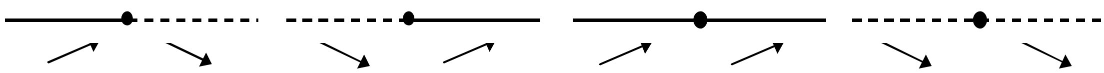
Se la funzione non è derivabile ci può essere un punto di discontinuità oppure uno dei casi visti al paragrafo G5.2, ossia cuspidi, flessi a tangente verticale, punti angolosi o punti generici di non derivabilità.

Lo studio del segno della derivata prima permette di trovare gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e permette di trovare l'ascissa (la x) dei punti di massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale. Per trovare la y e tracciare il punto si deve sostituire la x trovata nell'equazione della funzione y=f(x).

**STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA – PROCEDIMENTO.**

- Calcolare la derivata prima.
- Porre la derivata prima maggiore o uguale a zero e ricavare la linea del totale.
- Negli intervalli in cui y'>0 (linea continua) la funzione è crescente.
- Negli intervalli in cui y'<0 (linea tratteggiata) la funzione è decrescente.

I pallini sono massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale.



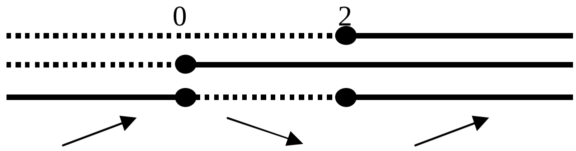
massimo minimo flesso asc. a tg orizz. flesso disc. a tg orizz.

Se nella linea del totale ci sono crocette esse rappresentano punti di discontinuità, cuspidi, flessi a tangente verticale, punti angolosi, o altri punti di non derivabilità.

Esempio G5.27:
Studiare la derivata prima della funzione $y=x^3-3x^2$.

Si calcola la derivata prima e la si pone maggiore o uguale a zero.
$y'=3x^2-6x \geq 0 \qquad 3x(x-2) \geq 0$.

$3x \geq 0 \quad x \geq 0$
$x-2 \geq 0 \quad x \geq 2$
totale




La funzione è crescente per $x<0$ e per $x>2$.
La funzione è decrescente per $0<x<2$.
$x=0$ è punto di massimo, in quanto la funzione prima di zero sale e dopo scende.
Per trovare la y si sostituisce 0 nella funzione di partenza $y=0^3-3\cdot 0^2=0$.
Il massimo è quindi il punto $(0;0)$.
$x=2$ è punto di minimo, in quanto la funzione prima di due scende e poi sale.
Per trovare la y si sostituisce 2 nella funzione di partenza $y=2^3-3\cdot 2^2=8-12=-4$.
Il minimo è quindi il punto $(2;-4)$.

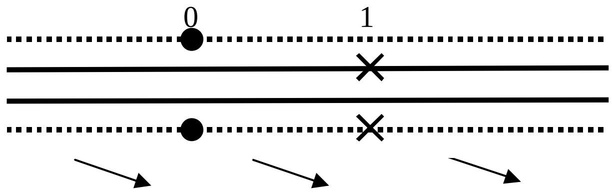
Esempio G5.28:

Studiare la derivata prima della funzione $y = \dfrac{1}{x^3-1}$.

Si calcola la derivata prima e la si pone maggiore o uguale a zero.

$$y' = \frac{-1 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} \qquad \frac{-3x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} \geq 0 \,.$$

$-3x^2 \geq 0$ sempre negativa, pallino nello zero
$(x-1)^2 > 0$ sempre positiva, crocetta sull'uno
$(x^2+x+1)^2 > 0$ sempre positiva
totale




La funzione non è mai crescente.
La funzione è decrescente su tutto $\mathbb{R}$ esclusi $x=0$ e $x=1$.
$x=0$ è un flesso discendente a tangente orizzontale, in quanto sia prima di zero che dopo lo zero la funzione scende.

Per trovare la y si sostituisce 0 nella funzione di partenza $y = \dfrac{1}{0^3-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Il flesso discendente a tangente orizzontale è quindi il punto $(0;-1)$. $x=1$ è un punto in cui la funzione è non derivabile. Utilizzando i procedimenti per lo studio dei punti di discontinuità si trova che $x=1$ è un punto di discontinuità di seconda specie, ed in particolare è un asintoto verticale, in quanto $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3-1} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3-1} = +\infty$.

## G5.7 Studio della derivata seconda

La derivata seconda serve per trovare le concavità della funzione e i suoi flessi a tangente orizzontale e obliqua.
Se la derivata seconda è positiva la concavità è rivolta verso l'alto.
Se la derivata seconda è negativa la concavità è rivolta verso il basso.

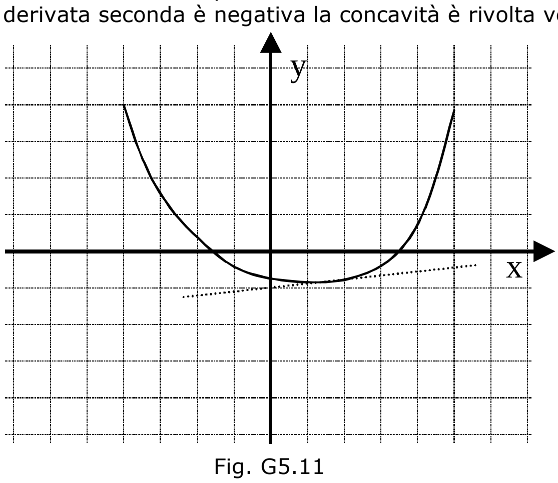



Fig. G5.11
CONCAVITA' VERSO L'ALTO.
derivata seconda positiva.
(La funzione è sopra la retta tangente).

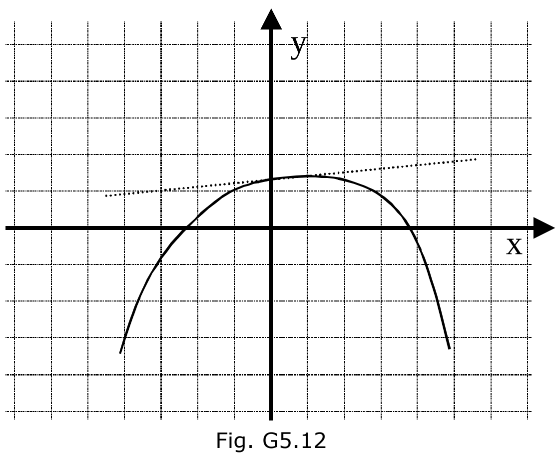


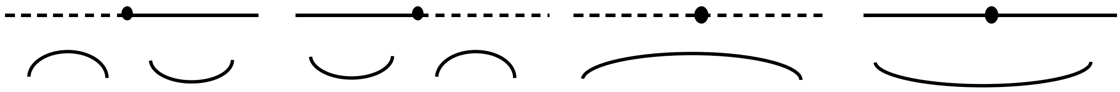

Fig. G5.12
CONCAVITA' VERSO IL BASSO.
derivata seconda negativa.
(La funzione è sotto la retta tangente).

Se la derivata seconda è zero potremmo essere in presenza di un flesso a tangente orizzontale o obliqua.
Se è un flesso a tangente orizzontale lo si è già ricavato studiando la derivata prima.
Se è un flesso a tangente obliqua può essere utile trovare anche il coefficiente angolare della retta tangente in esso (detta **tangente inflessionale**), sostituendo la x del flesso nella derivata prima.

**STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA – PROCEDIMENTO.**

- Calcolare la derivata seconda.
- Porre la derivata seconda maggiore o uguale a zero e ricavare la linea del totale.
- Negli intervalli in cui y''>0 (linea continua) la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto.
- Negli intervalli in cui y''<0 (linea tratteggiata) la funzione ha la concavità rivolta verso il basso.

I pallini sono flessi a tangente orizzontale o obliqua, oppure punti qualunque.



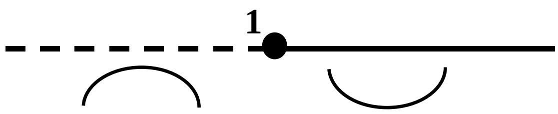
flesso | flesso | punto qualunque | punto qualunque

Le crocette sono punti di discontinuità, cuspidi, flessi a tangente verticale, punti angolosi, o altri punti di non derivabilità.

<u>Esempio G5.29:</u>
Studiare la derivata seconda della funzione $y=x^3-3x^2$.

$y'=3x^2-6x \geq 0$
$y''=6x-6$
$6x-6 \geq 0$

$6x-6 \geq 0 \quad 6x \geq 6 \qquad x \geq 1$




La funzione ha la concavità rivolta verso il basso per x<1.
La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per x>1.
x=1 è punto di flesso, in quanto la funzione in esso cambia concavità.
Per trovare la y si sostituisce 1 nella funzione di partenza $y=1^3-3\cdot 1^2=1-3=-2$.
Il flesso ha coordinate (1;-2).

<u>Esempio G5.30:</u>

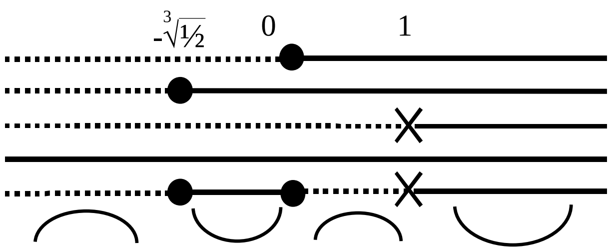
Studiare la derivata seconda della funzione $y=\frac{1}{x^3-1}$ .

La derivata prima si è calcolata nell'esempio G5.28 ed è $y'=\frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}$ .

$$y''=\frac{-6x\cdot(x^3-1)^2-(-3x^2)\cdot 2\cdot(x^3-1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^4}=\frac{\cancel{(x^3-1)}[-6x\cdot(x^3-1)-(-3x^2)\cdot 2\cdot 3x^2]}{(x^3-1)^{\cancel{4}3}}=$$

$$=\frac{-6x^4+6x+18x^4}{(x^3-1)^3}=\frac{12x^4+6x}{(x^3-1)^3}=\frac{6x(2x^3+1)}{(x-1)^3(x^2+x+1)^3}$$

| | |
|---|---|
| $6x \geq 0$ | $x \geq 0$ |
| $2x^3+1 \geq 0$ | $x \geq -\sqrt[3]{1/2}$ |
| $(x-1)^3>0$ | $x>1$ |
| $(x^2+x+1)^3>0$ | sempre positiva |
| totale | |




La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}<x<0$ e per x>1.

La funzione ha la concavità rivolta verso il basso per $x < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ e per 0<x<1.

x=0 è un flesso discendente a tangente orizzontale, come già trovato studiando la derivata prima.

$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ è un flesso. Sostituendo tale valore al posto della x nella funzione di partenza si trova la y.

$$y\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\frac{-1-2}{2}} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Le coordinate del flesso sono dunque $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; -\frac{2}{3}\right)$.

x=1 è, come già visto nello studio della derivata prima, un asintoto verticale.

# G5.8 Il teorema di Lagrange

Come si è già detto nel capitolo sugli asintoti e la continuità, una funzione è continua in $x_0$ se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Una funzione è continua in un intervallo se lo è in ogni punto dell'intervallo.
Allo stesso modo si dice che una funzione è derivabile in un punto $x_0$ se $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$.

Una funzione è derivabile in un intervallo se lo è in ogni punto dell'intervallo.
Si noti che è possibile che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$. In questo caso si è in presenza di un punto di discontinuità di terza specie. Non è invece possibile che $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \neq f'(x_0)$, perché se $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ allora non esiste $f'(x_0)$, mentre se $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ allora, per definizione $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$.

Per le funzioni derivabili in un intervallo valgono alcuni importanti teoremi, che sono trattati in questo e nei successivi paragrafi di questo capitolo. Per tali teoremi non si ritiene così importante conoscere la dimostrazione, che pertanto non viene trattata in questo capitolo, ma si ritiene importante invece comprendere a fondo la loro interpretazione grafica e capire la necessità delle ipotesi.

Teorema di Lagrange
Sia y=f(x) una funzione continua in [a,b] e derivabile in ]a,b[.
Allora esiste un punto c∈]a,b[ tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interpretazione grafica

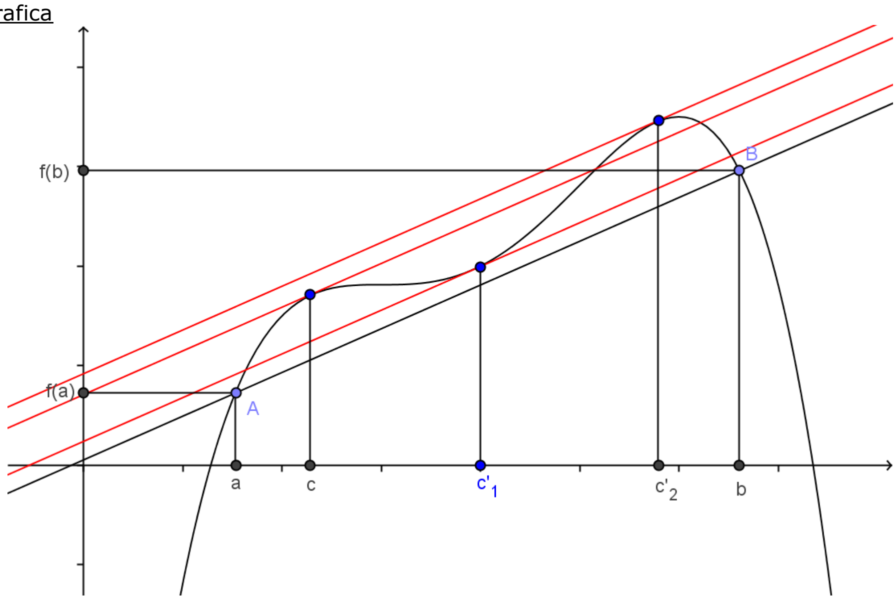



Fig. G5.13
Interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

f'(c) è la derivata della funzione nel punto c, ossia il coefficiente angolare della retta passante per il punto c.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per i punti A e B.

Se i coefficienti angolari di due rette sono uguali allora le rette sono parallele.
Il teorema di Lagrange afferma che, sotto opportune ipotesi, esiste un punto $c\in\,]a,b[$ la cui retta tangente alla funzione è parallela alla retta passante per i punti A(a,f(a)) e B(b,f(b)). In realtà nella figura G5.13 di c ce ne sono addirittura 3.
Le ipotesi di continuità in [a,b] e derivabilità in ]a,b[ sono necessarie. Se infatti cadesse anche solo una delle ipotesi allora il teorema non sarebbe più valido. Non sarebbe dunque possibile affermare con certezza l'esistenza di un punto $c\in\,]a,b[$ tale che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ciò significa che in assenza di anche solo una delle ipotesi il punto c potrebbe esistere oppure no, come mostriamo con gli esempi che seguono.

Esempio G5.31:
Necessità dell'ipotesi di continuità.
Se cadesse l'ipotesi di continuità, ossia la funzione non fosse più continua in [a,b], il teorema non sarebbe più vero. Ciò significa che il punto $c\in\,]a,b[$ tale che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ potrebbe esistere oppure no. Si consideri dunque il caso in cui y=f(x) non è continua in [a,b] perché presenta un punto $x_0\in\,]a,b[$ di discontinuità. I due grafici che seguono mostrano che sotto tali ipotesi il punto c potrebbe esistere oppure no, dunque non si può essere certi della sua esistenza.

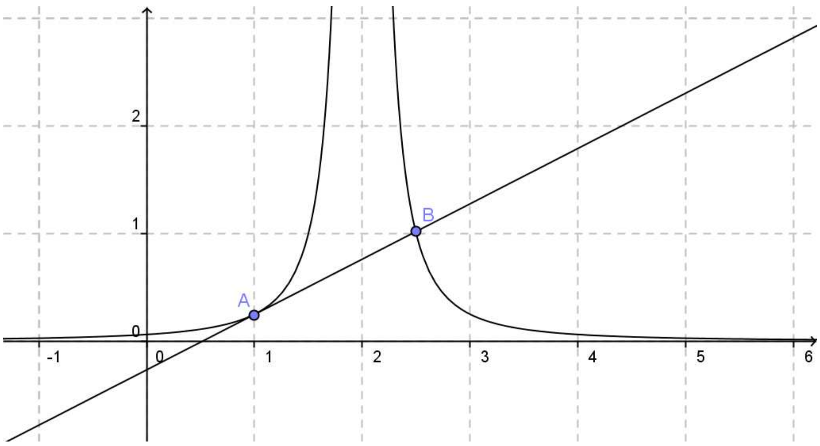



Fig. G5.14
Necessità dell'ipotesi di continuità all'interno dell'intervallo.

La funzione $y=\frac{1}{4(x-2)^2}$ presenta una discontinuità per x=2, $2\in\left]1,\frac{3}{2}\right[$. Non esiste all'interno dell'intervallo $\left]1,\frac{3}{2}\right[$ alcun punto c tale che la sua retta tangente sia parallela alla retta passante per A e B.

Attenzione, ciò non significa che il punto c non possa esistere, ma solo che nulla si può dire riguardo alla sua esistenza, è infatti possibile che la funzione presenti un punto di discontinuità interno all'intervallo ed il punto c con le caratteristiche richieste esista, come si può vedere con il grafico seguente.

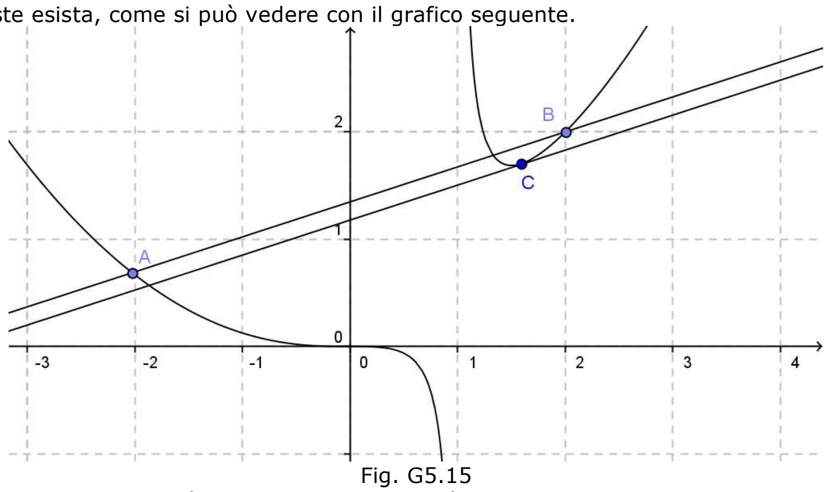



Fig. G5.15
Necessità dell'ipotesi di continuità all'interno dell'intervallo.

La funzione $y=\frac{x^3}{4x-4}$ presenta una discontinuità per x=1, $1\in\left]-2,2\right[$. All'interno dell'intervallo $\left]-2,2\right[$ esiste un punto $c\approx1.6$ tale che la sua retta tangente è parallela alla retta passante per A e B.

Esempio G5.32:
Necessità dell'ipotesi di continuità, seconda parte.
Se cadesse l'ipotesi di continuità, ossia la funzione non fosse più continua in [a,b], il teorema non sarebbe più vero.
Ciò significa che il punto $c \in ]a,b[$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ potrebbe esistere oppure no. Si consideri dunque il caso in cui y=f(x) è continua in [a,b[ e dunque non è continua in b, punto di discontinuità. I due grafici che seguono mostrano che sotto tali ipotesi il punto c potrebbe esistere oppure no, dunque non si può essere certi della sua esistenza.

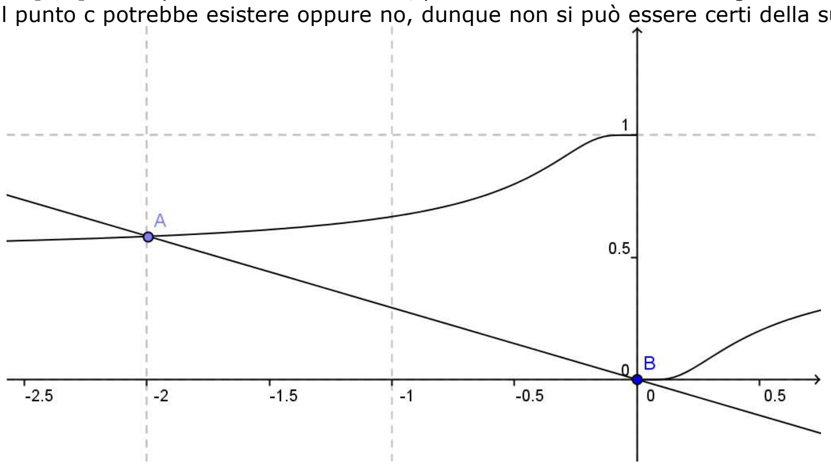



Fig. G5.16
Necessità dell'ipotesi di continuità agli estremi dell'intervallo.

La funzione $y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ presenta una discontinuità per b=0, estremo dell'intervallo $[a,b[\,=[-2,0[$ . Non esiste all'interno dell'intervallo $]-2,0[$ alcun punto c tale che la sua retta tangente sia parallela alla retta passante per A e B.
Attenzione, ciò non significa che il punto c non possa esistere, ma solo che nulla si può dire riguardo alla sua esistenza, è infatti possibile che la funzione presenti un punto di discontinuità agli estremi dell'intervallo ed il punto c con le caratteristiche richieste esista, come si può vedere con il grafico seguente.

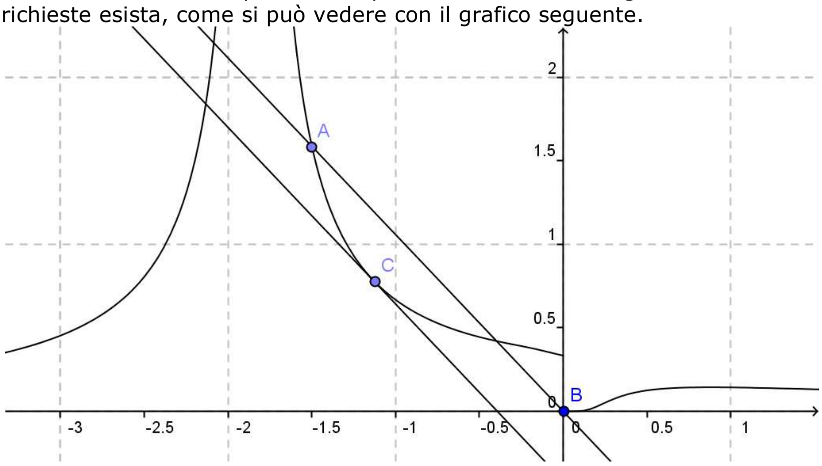



Fig. G5.17
Necessità dell'ipotesi di continuità agli estremi dell'intervallo.

La funzione $y=\begin{cases}\dfrac{1}{\left|2x+3+2^{\frac{1}{x}}\right|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ presenta una discontinuità per b=0, estremo dell'intervallo $[a,b[\,=\left[-\frac{3}{2},0\right[$ .

All'interno dell'intervallo $\left]-\frac{3}{2},0\right[$ esiste il punto $c\approx-1.2$ tale che la sua retta tangente è parallela alla retta passante per A e B.

Esempio G5.33:
Necessità dell'ipotesi di derivabilità.
Se cadesse l'ipotesi di derivabilità, ossia la funzione non fosse più derivabile in [a,b], il teorema non sarebbe più vero.
Ciò significa che il punto $c \in ]a,b[$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ potrebbe esistere oppure no. Si consideri dunque il caso in cui y=f(x) è continua in [a,b] ma non è derivabile in ]a,b[ in quanto presenta un punto $x_0 \in ]a,b[$ di non derivabilità. I due grafici che seguono mostrano che sotto tali ipotesi il punto c potrebbe esistere oppure no, dunque non si può essere certi della sua esistenza.

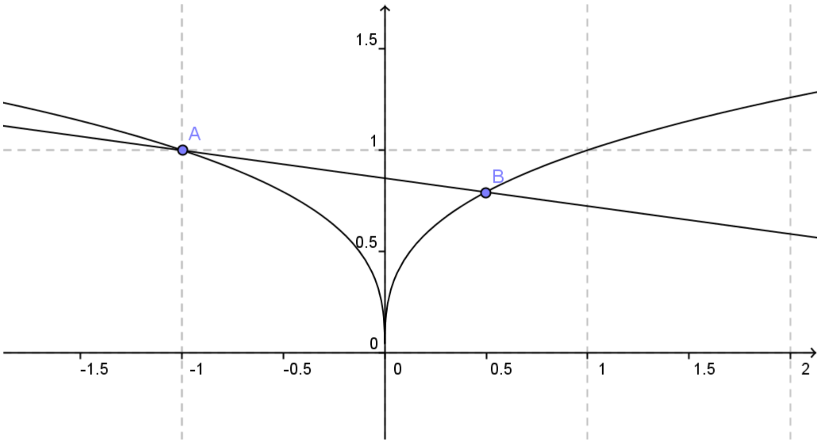



Fig. G5.18
Necessità dell'ipotesi di derivabilità all'interno dell'intervallo.

La funzione $y=\left|\sqrt[3]{x}\right|$ presenta un punto di non derivabilità (cuspide) per $x_0=0$, $0\in\left]a,b\right[=\left]-1,\frac{1}{2}\right[$. Non esiste all'interno dell'intervallo $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ alcun punto c tale che la sua retta tangente sia parallela alla retta passante per A e B.

Attenzione, ciò non significa che il punto c non possa esistere, ma solo che nulla si può dire riguardo alla sua esistenza, è infatti possibile che la funzione presenti un punto di non derivabilità interno all'intervallo ed il punto c con le caratteristiche richieste esista, come si può vedere con il grafico seguente.

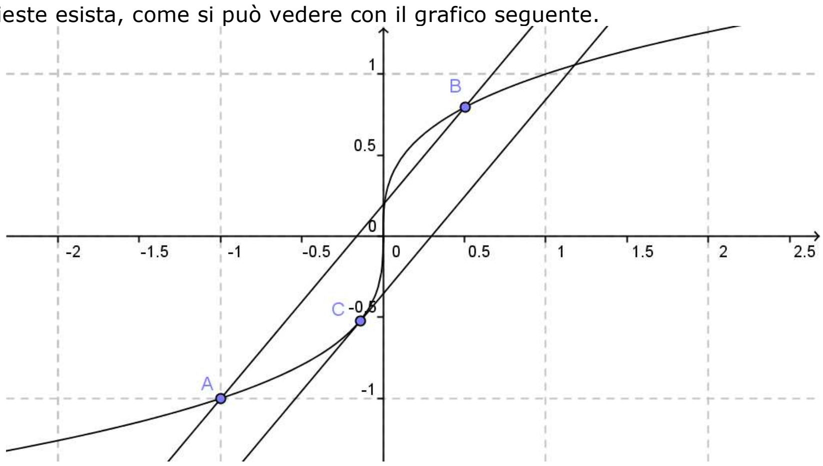



Fig. G5.19
Necessità dell'ipotesi di derivabilità all'interno dell'intervallo.

La funzione $y=\sqrt[3]{x}$ presenta un punto di non derivabilità (flesso a tangente verticale) per $x_0=0$, $0\in\left]a,b\right[=\left]-1,\frac{1}{2}\right[$.

All'interno dell'intervallo $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$ esiste un punto $c\approx-0.15$ tale che la sua retta tangente è parallela alla retta passante per A e B.

## G5.9 Il teorema di Rolle

Teorema di Rolle
Sia y=f(x) una funzione continua in [a,b], derivabile in ]a,b[ e valga inoltre f(a)=f(b).
Allora esiste un punto $c\in]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.

Dimostrazione

Valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, dunque esiste un punto c tale che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dal fatto che f(a)=f(b) si ottiene dunque $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(a)}{b-a}=0$.

Il teorema di Rolle è dunque un semplice corollario del teorema di Lagrange. E' invece interessante la sua interpretazione grafica.

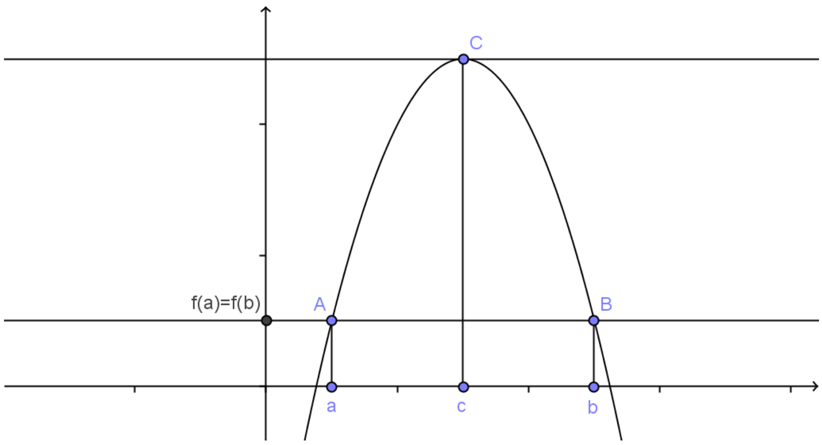



Fig. G5.20
Interpretazione grafica del teorema di Rolle.

f'(c) è la derivata della funzione nel punto c, ossia il coefficiente angolare della retta passante per il punto c. Se f'(c)=0 allora ciò significa che la retta tangente è orizzontale.
Il teorema di Rolle afferma che, sotto opportune ipotesi, esiste un punto $c \in ]a,b[$ la cui retta tangente alla funzione è orizzontale. Ciò equivale ad affermare l'esistenza, all'interno dell'intervallo ]a,b[, di un punto di massimo o di minimo.

Le ipotesi di continuità in [a,b], derivabilità in ]a,b[ e f(a)=f(b) sono necessarie. Se infatti cadesse anche solo una delle ipotesi allora il teorema non sarebbe più valido. Si ritiene che la costruzione dei controesempi sia un importante esercizio e pertanto non viene svolta nella parte di teoria ma viene lasciata come esercizio.