G4. Asintoti e continuità

Un asintoto è una retta a cui la funzione si avvicina sempre di più senza mai toccarla.
Non è la definizione formale, ma sicuramente serve per capire il concetto di asintoto.
Nei primi 3 paragrafi di questo capitolo si vedranno i procedimenti per determinare gli asintoti di una funzione e come tracciarli nel grafico.

G4.1 Asintoti verticali

Gli asintoti verticali, se ci sono, sono in corrispondenza dei punti che non fanno parte del dominio o in corrispondenza degli estremi del dominio. Per prima cosa è dunque necessario calcolare il dominio della funzione. In questo modo si determinano i valori in corrispondenza dei quali è possibile trovare gli asintoti verticali. Solo successivamente si verifica se tali valori sono effettivamente asintoti verticali.
Per le ragioni appena esposte si utilizza il seguente **procedimento**:

- Si calcola il dominio della funzione.
- Si calcolano i $\lim_{x\to c} f(x)$, dove al posto di c si sostituiscono tutti i valori agli estremi del dominio.
- Se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$, in cui ℓ è un numero, allora non c'è nessun asintoto della funzione per x= ℓ.
- Se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ allora c'è un asintoto della funzione per x= ℓ.

Esempio G4.1:

Determinare gli asintoti verticali della funzione $y = \frac{x-1}{x^2-1}$.

Per iniziare si calcola il dominio della funzione. Si pone per questo il denominatore della funzione diverso da zero.
$x^2-1\neq 0$.
$(x-1)(x+1)\neq 0$.
$x\neq -1$ e $x\neq 1$.
$D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$. I valori agli estremi del dominio sono quindi –1 e 1.
Si devono calcolare i due limiti $\lim_{x\to -1} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$ da destra e da sinistra.

- $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{-1-1}{(-1)^2-1} = \frac{-2}{1-1} = \frac{-2}{0} = \infty$

Poiché il risultato è ∞ c'è l'asintoto verticale ed è la retta **x=-1**.
Per tracciare i rami della funzione vicini a tale asintoto si devono calcolare i limiti destro e sinistro.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1^+ +1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1^- +1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ forma indeterminata. Si scompone e si semplifica.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Essendo il risultato un numero, per x=1 non c'è alcun asintoto verticale.

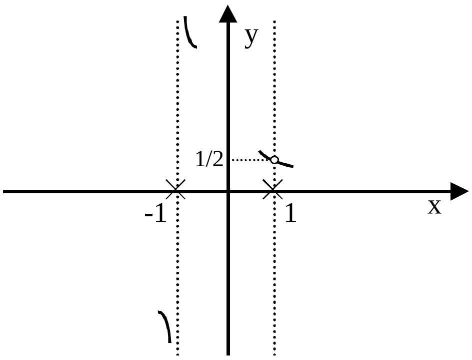


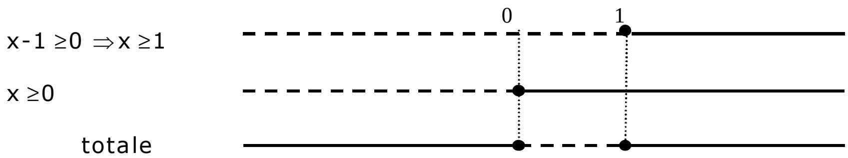
Fig. G4.1

Asintoti verticali della funzione $y = \frac{x-1}{x^2-1}$.

Esempio G4.2:

Determinare gli asintoti verticali della funzione $y = \ln\left(x^2 - x\right)$.

Per prima cosa si calcola il dominio della funzione, ponendo l'argomento del logaritmo maggiore di zero.
$x^2 - x > 0$.
$x(x-1) > 0$.



Il dominio è $D =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
Si calcolano i limiti agli estremi del dominio (0^+ e 1^-): $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

- $\lim_{x \to 0^-} \ln\left(x^2 - x\right) = \ln\left[x\left(x-1\right)\right] = \ln\left[0^-\left(0^- - 1\right)\right] = \ln\left[0^-\left(-1\right)\right] = \ln\left(0^+\right) = -\infty$.
- $\lim_{x \to 1^+} \ln\left(x^2 - x\right) = \ln\left[x\left(x-1\right)\right] = \ln\left[1^+\left(1^+ - 1\right)\right] = \ln\left(0^+\right) = -\infty$.

Ci sono due asintoti verticali e sono le rette x=0 (da sinistra) e x=1 (da destra).

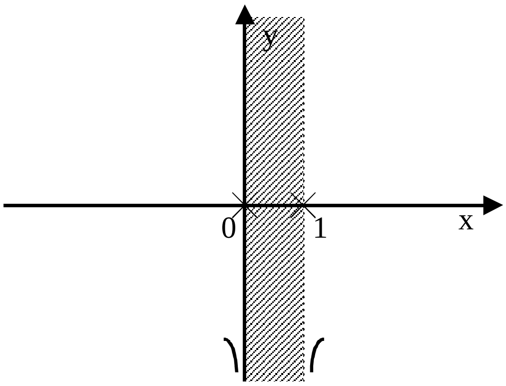


Fig. G4.2
Asintoti verticali della funzione $y = \ln\left(x^2 - x\right)$.

G4.2 Asintoti orizzontali

Per determinare gli asintoti orizzontali ci si basa sulla rappresentazione grafica dei limiti, in particolare ci si riferisce al caso di limite finito di una funzione all'infinito.
Si utilizza il seguente **procedimento:**

- Si calcola il $\lim_{x \to \infty} f(x)$.
- Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$, in cui ℓ è un numero, allora la retta y= ℓ è asintoto orizzontale.
- Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ allora non c'è l'asintoto orizzontale.

In alcuni casi è necessario risolvere sia $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ che $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, perché potrebbero essere diversi.

Esempio G4.3:

Determinare gli asintoti orizzontali della funzione $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Si risolve il seguente limite:

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata. Per eliminare la forma indeterminata si raccoglie la x di grado massimo. (o si usano gli ordini di ∞).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1 - 0} = 1 .$$

La retta y=1 è asintoto orizzontale e si rappresenta come nella figura G4.3. Non si può dire se l'avvicinamento all'asintoto avviene da sopra o da sotto. Per scoprirlo si dovranno utilizzare le derivate nel capitolo successivo.

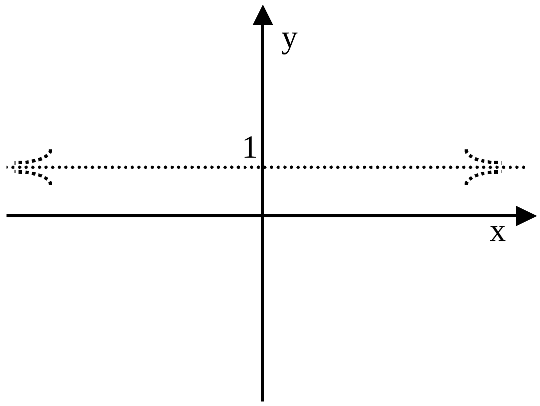


Fig. G4.3

Asintoti orizzontali della funzione $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Esempio G4.4:

Determinare gli asintoti orizzontali della funzione $y = \frac{1}{2^x + 1}$.

Si risolve il seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x + 1} = \frac{1}{2^\infty + 1}$$ e si deve quindi distinguere tra $+\infty$ e $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x + 1} = \frac{1}{2^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2^x + 1} = \frac{1}{2^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(Si ricorda che $2^{-\infty}=0$)
Ci sono quindi due asintoti orizzontali, y=0 ed y=1, uno per $x\to+\infty$ e uno per $x\to-\infty$.
Mentre per $x\to+\infty$ ci si avvicina all'asintoto orizzontale sicuramentedall'alto (0^+), per $x\to-\infty$ non si può al momento determinare se ci si avvicina all'asintoto orizzontale dall'alto o dal basso. Per saperlo si dovranno trattare le derivate nel prossimo capitolo.

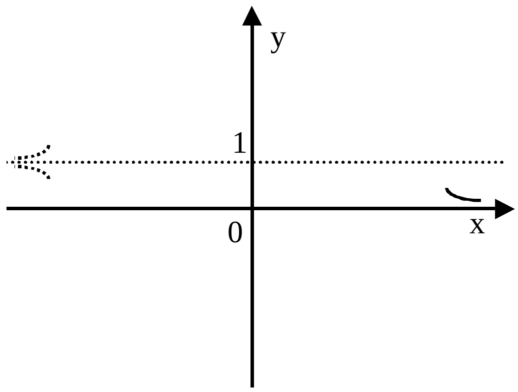


Fig. G4.4

Asintoti orizzontali della funzione $y = \frac{1}{2^x + 1}$.

Esempio G4.5:

Determinare gli asintoti orizzontali della funzione $y = \frac{x^2}{x - 2}$.

Si deve risolvere il limite seguente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$ forma indeterminata. Per eliminare la forma indeterminata si raccoglie la x di grado massimo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{\infty}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{\infty}{1 - 0} = \infty.$$

In questo caso il risultato non è un numero, quindi non ci sono asintoti orizzontali. Se x→+∞ allora f(x)→+∞, se x→-∞ allora f(x)→-∞. Si rappresenta come nella figura G4.5, anche se non si sa se la concavità è rivolta verso l'alto o verso il basso. Per saperlo occorrerà usare le derivate nel prossimo capitolo.
In questo esempio essendo il grado del numeratore superiore di uno al grado del denominatore si sa che non c'è l'asintoto orizzontale ma c'è l'asintoto obliquo ed m è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo, ossia 1.

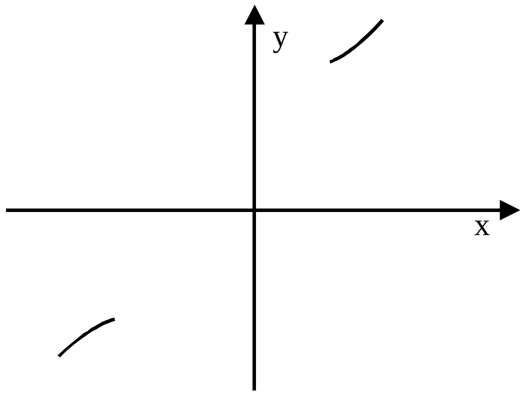


Fig. G4.5

La funzione $y = \frac{x^2}{x-2}$ non ha asintoti orizzontali.

Quando non c'è l'asintoto orizzontale può esserci quello obliquo**. La ricerca dell'asintoto obliquo va quindi effettuata solo se non c'è l'asintoto orizzontale.**

G4.3 Asintoti obliqui

Come appena detto la ricerca dell'asintoto obliquo va effettuata solo se non c'è l'asintoto orizzontale.
L'asintoto obliquo è una retta obliqua, e pertanto ha la forma y=mx+q.
Il problema è quindi quello di trovare m e q. Pe trovarli si effettua il seguente ragionamento.

Se la funzione f(x) si avvicina sempre di più alla retta y=mx+q vuol dire che la loro distanza tende a zero per x che tende a infinito. La distanza tra f(x) e mx+q è (f(x)-mx+q). Si può dunque scrivere:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0 .$$

Si divide tutto per x, e si ottiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\left(m\frac{x}{x}+\frac{q}{x}\right)\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\left(m+\frac{q}{x}\right)\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(m+\frac{q}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\left(m+\frac{q}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=(m+0)$$

Per cui $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, oppure (equivalente) $m=\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\frac{1}{x}$.

Per determinare q si riparte da $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0$, e si ottiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx-q]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=q$$

Per cui $q=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$.

Si sono dunque trovate le formule per determinare m e q:

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\frac{1}{x} \qquad q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx .$$

Se tutti e due questi limiti danno come risultato dei numeri c'è l'asintoto obliquo, se anche solo uno dei due viene infinito o non esiste allora non c'è l'asintoto obliquo.

SCORCIATOIA PER LE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE:
Nelle funzioni razionali fratte per determinare gli asintoti orizzontali e obliqui basta guardare i gradi del numeratore e del denominatore. Con deg(N) e deg(D) si indicano in questo contesto i gradi di numeratore e denominatore rispettivamente.

- Se deg(N)< deg(D) allora c'è l'asintoto orizzontale ed è la retta y=0 (asse delle x)
- Se deg(N) = deg(D) allora c'è l'asintoto orizzontale ed è la retta y=k, dove k è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo.
- Se deg(N) = deg(D)+1 allora c'è l'asintoto obliquo, ed m è il rapporto tra i coefficienti di grado massimo.
- Se deg(N) > deg(D)+1 allora non ci sono asintoti orizzontali né obliqui.

Questa scorciatoia permette di determinare facilmente gli asintoti orizzontali e il coefficiente m degli asintoti obliqui. Per determinare il coefficiente q è necessario utilizzare la formula vista precedentemente.

Esempio G4.6:

Determinare gli asintoti obliqui della funzione $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Si riprende l'esempio l'esempio G4.5, nel quale si è mostrato che la funzione $y = \frac{x^2}{x-2}$ non ha asintoti orizzontali.

Poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore di uno allora c'è l'asintoto obliquo, ed m è il rapporto tra i coefficienti di grado massimo, ossia 1.

E' possibile anche calcolare m con la formula $m = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \frac{1}{x}$.

Invece per trovare q si deve usare la formula $q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-\frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-2} - 1 \cdot x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{\left(1-\frac{2}{\infty}\right)} \frac{2}{1-0} = 2$$

Poiché m=1 e q=2 l'asintoto obliquo è la retta y=x+2. Per sapere se ci si avvicina all'asintoto obliquo dall'alto o dal basso bisognerà utilizzare le derivate. Si può rappresentare l'asintoto obliquo come nella figura G4.6, anche se non si sa se la concavità è rivolta verso l'alto o verso il basso. Per saperlo occorrerà usare le derivate nel prossimo capitolo.

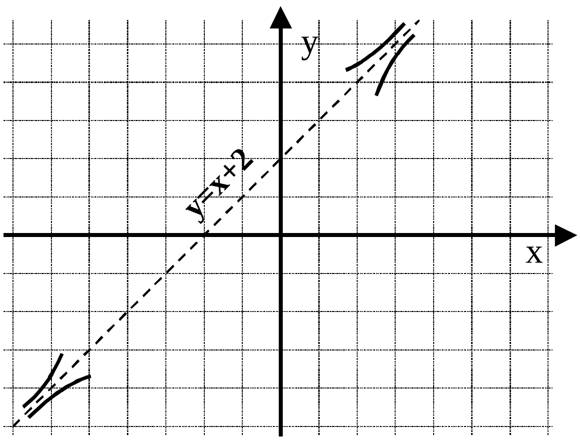


Fig. G4.6

Asintoti obliqui della funzione $y = \frac{x^2}{x-2}$.

G4.4 Funzioni continue

Si può dire, in maniera assolutamente non formale, che una funzione è continua se la si può disegnare senza alzare la penna dal foglio. E' ovvio che tale frase, pur se serve a capire il concetto, non può essere presa come definizione matematica perché molto imprecisa.
Per essere più formali si può dire che una funzione è continua in un punto x_0 se il limite della funzione per x che tende a x_0 (cioè ciò che accade nei pressi del punto x_0) è uguale al valore della funzione nel punto (cioè ciò che accade esattamente in x_0.
Da questa osservazione nasce la definizione di funzione continua in un punto x_0.

Definizione:
Una funzione **y=f(x) è continua in un suo punto x_0** se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Si legge "il limite destro ed il limite sinistro della funzione, per x che tende a x con zero, devono essere uguali tra loro e devono essere uguali al valore della funzione nel punto x con zero".

Si cerca ora di chiarire la definizione.

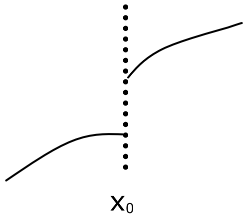


Fig. G4.7
Funzione discontinua in un punto x_0. I limiti destro e sinistro sono diversi.

Il limite destro deve essere uguale al limite sinistro. Ciò vuol dire che se ci si avvicina con la x a x_0 i due rami destro e sinistro della funzione tendono ad avvicinarsi. Se i limiti destro e sinistro fossero diversi saremmo nella situazione della figura G4.7, e la funzione non sarebbe continua nel punto x_0.

Fig. G4.8
Funzione discontinua in un punto x_0. I limiti destro e sinistro sono uguali, ma diversi dal valore della funzione nel punto.

Non basta però che il limite destro sia uguale al limite sinistro, in quanto nel punto dove i due rami dovrebbero toccarsi potrebbe esserci un "buco", e la funzione in quel punto potrebbe assumere un altro valore o nessun valore, come nella figura G4.8.
E' quindi necessario che i due limiti siano uguali non solo tra loro, ma anche al valore della funzione nel punto x_0, ossia devono essere uguali a $f(x_0)$, come nella figura G4.9.

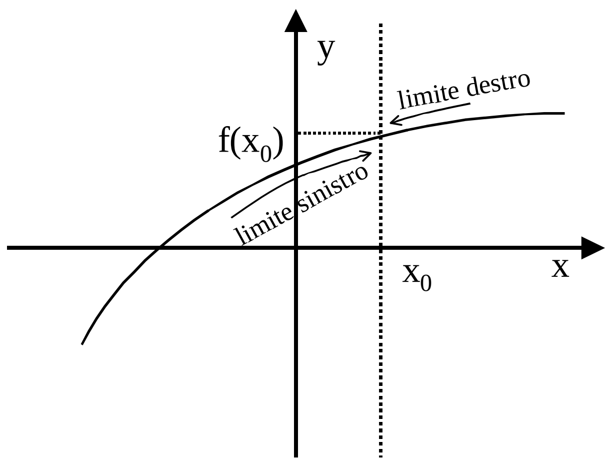


Fig. G4.9
Funzione continua in un punto x_0.

Definizione:
Una funzione è **continua in un intervallo** se è continua in tutti i punti dell'intervallo.

Sono funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$ le funzioni polinomiali, le funzioni esponenziali, il seno ed il coseno.
Sono funzioni continue nel loro dominio le funzioni logaritmiche, le funzioni irrazionali, le funzioni razionali fratte e la tangente. Nei punti non facenti parte del dominio queste funzioni possono avere dei punti di discontinuità.
E' un buon esercizio rivedere i grafici del capitolo G1 e determinare se le funzioni rappresentate sono continue o meno.

G4.5 Punti di discontinuità

Nei punti agli estremi del dominio è possibile che siano presenti delle discontinuità.
Le discontinuità che si possono presentare sono di 3 specie.

PUNTO DI DISCONTINUITA' DI PRIMA SPECIE:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$$

Si ha un punto di discontinuità di prima specie quando il limite destro della funzione per x che tende a x_0 è diverso dal limite sinistro.

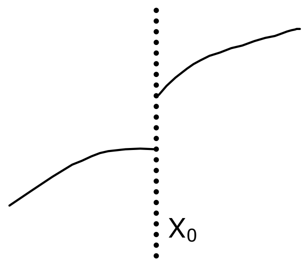


Fig. G4.10
Punto di discontinuità di prima specie.

Esempio G4.7:

Determinare i punti di discontinuità della funzione $y = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$.

Per trovare i punti di discontinuità si deve per prima cosa trovare il dominio della funzione.
Ci sono due denominatori da porre diversi da zero.

1) $2^{\frac{1}{x}} + 1 \neq 0$ sempre positivo.
2) $x \neq 0$

Il dominio della funzione è quindi R-{0}.

Si calcolano quindi i limiti destro e sinistro per x che tende a zero.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{0^+}} + 1} = \frac{1}{2^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty + 1} = 0 .$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{0^-}} + 1} = \frac{1}{2^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1 .$$

(Ricordando che $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$).

I limiti destro e sinistro sono rispettivamente zero e uno, e quindi sono diversi tra loro.
Si dice che x=0 è un punto di discontinuità di prima specie. C'è un "SALTO" tra i due rami della funzione.
Tale situazione può essere rappresentata graficamente come in figura G4.11.

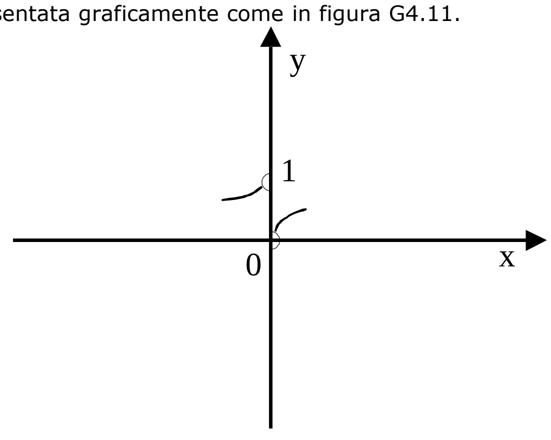


Fig. G4.11
Punto di discontinuità della funzione $y = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$.

PUNTO DI DISCONTINUITA' DI SECONDA SPECIE:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \quad \text{o non esiste oppure} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \quad \text{o non esiste.}}$$

Basta che uno dei due limiti sia infinito oppure che non esista e si ha un punto di discontinuità di seconda specie. In figura G4.12 si mostra un punto di discontinuità di seconda specie nel caso in cui il limite destro e quello sinistro tendano rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$.

I punti di discontinuità di seconda specie con i limiti che tendono ad infinito sono asintoti verticali.
Un caso in cui il limite non esiste è mostrato nell'esempio G4.9.

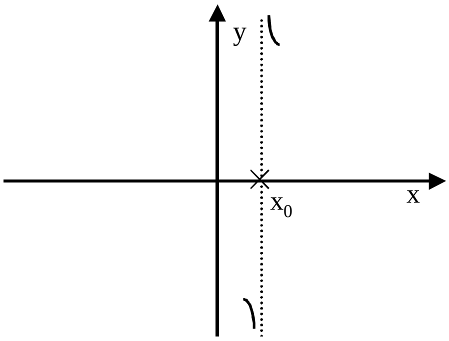


Fig. G4.12
Punto di discontinuità di seconda specie con il risultato dei limiti infinito.

Esempio G4.8:

Determinare i punti di discontinuità della funzione $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Si sono già calcolati gli asintoti della funzione $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ negli esempi G4.5 e G4.6.

Per trovare i punti di discontinuità bisogna per prima cosa calcolare il dominio della funzione.
Il dominio è $x-2\neq 0$ ossia $x\neq 2$. Si devono quindi calcolare i limiti destro e sinistro della funzione per $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x-2}=\frac{2^2}{2^+-2}=\frac{4}{0^+}=+\infty .$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x-2}=\frac{2^2}{2^- -2}=\frac{4}{0^-}=-\infty .$$

$x=2$ è un punto di discontinuità di 2° specie. In figura G4.13 il grafico.

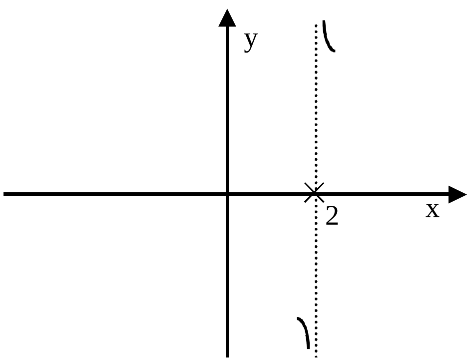


Fig. G4.13

Punto di discontinuità della funzione $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Esempio G4.9:

Determinare i punti di discontinuità della funzione $y=\text{sen}\dfrac{1}{x}$.

Per trovare i punti di discontinuità bisogna per prima cosa calcolare il dominio della funzione.
Il dominio è $x\neq 0$. Si devono quindi calcolare i limiti destro e sinistro della funzione per $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\frac{1}{0^+} = \operatorname{sen}(+\infty)$$ il limite non esiste.

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}\frac{1}{0^-} = \operatorname{sen}(-\infty)$$ il limite non esiste.

Se la $x\to+\infty$ (o se $x\to-\infty$) il seno continua a oscillare tra –1 e 1, quindi y=sen(1/x) non tende a nessun valore.
Il grafico di tale funzione è in figura G4.14.
x=0 è un punto di discontinuità di seconda specie.

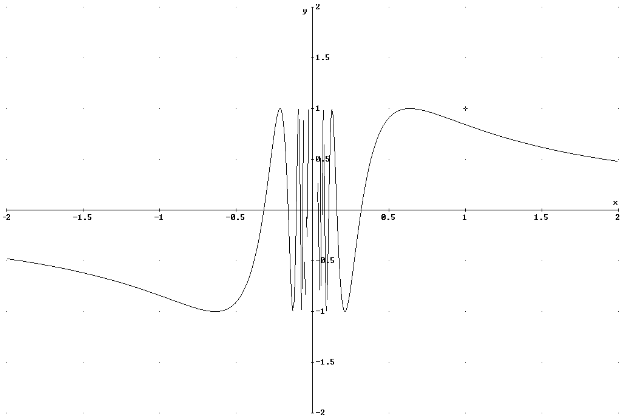


Fig. G4.14

Punto di discontinuità della funzione $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

PUNTO DI DISCONTINUITA' DI TERZA SPECIE:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)}$$

Si ha un punto di discontinuità di terza specie se il limite destro ed il limite sinistro della funzione per $x\to x_0$ coincidono ma non sono uguali al valore della funzione nel punto. Il valore della funzione $f(x_0)$ potrebbe non esistere oppure potrebbe esistere più in alto o più in basso del punto dove i due limiti destro e sinistro tendono ad incontrarsi.

Esempio G4.10:

Determinare i punti di discontinuità della funzione $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Per trovare i punti di discontinuità bisogna per prima cosa calcolare il dominio della funzione.
Il dominio è $x-1\neq0$, ossia $x\neq1$. Si devono quindi calcolare i limiti destro e sinistro della funzione per $x\to1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$ forma indeterminata. Si scompone in fattori e si semplifica.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 1+1 = 2 .$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 1+1 = 2 .$$

Poiché i due limiti sono uguali x=1 è un punto di discontinuità di terza specie.

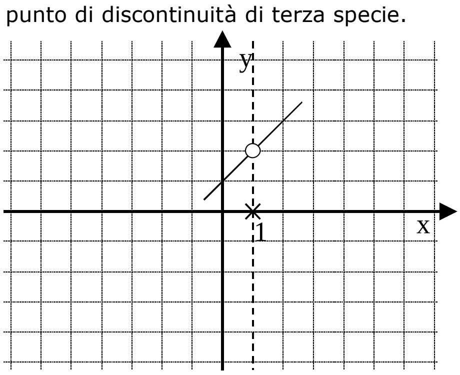


Fig. G4.15

Punto di discontinuità di terza specie della funzione $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$