G2. Limiti

G2.1 Introduzione

Si è visto, calcolando il dominio delle funzioni, che per certi valori della x non è possibile calcolare il valore della y.
Cò che ci si propone in questo capitolo è capire come si comporta la y assegnando alla x valori molto vicini a quelli non facenti parte del dominio.
L'esempio seguente mostra come è possibile rispondere a questa domanda utilizzando il puro calcolo algebrico, senza l'utilizzo di strumenti matematici nuovi.

Esempio G2.1:

Si prenda la funzione $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$. Il dominio della funzione è D=$\mathbb{R}$-{2}.

Non è possibile calcolare il valore della funzione per x=2. Ciò che ci si chiede è: se alla x si danno dei valori sempre più vicini al 2, cosa succede ai valori della y? Per rispondere a questa domanda si prova a dare alla x dei valori sempre più vicini al 2, sia per difetto che per eccesso, e si vede come si comporta la y.

x	y
1	2
1,5	2,5
1,6	2,6
1,7	2,7
1,8	2,8
1,9	2,9
1,95	2,95
1,98	2,98
1,99	2,99

x	y
3	4
2,5	3,5
2,4	3,4
2,3	3,3
2,2	3,2
2,1	3,1
2,05	3,05
2,02	3,02
2,01	3,01

Fig. G2.1
Valori della y approssimando la x a 2 per difetto e per eccesso.

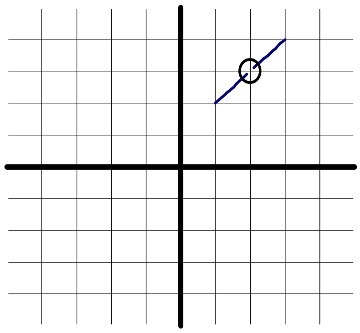

Fig. G2.2
Andamento della funzione $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ nei pressi di x=2.

Se la x si avvicina al valore 2 si nota che la y si avvicina sempre di più al valore 3. Sembra intuitivo che se mettessimo al posto della x valori ancora più vicini al 2 otterremmo dei valori della y sempre più vicini al 3.

Ciò si può esprimere con la seguente notazione: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$.

Ciò si legge "**il limite per x che tende a due di $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ è uguale a tre**".

Ogni altro modo di leggere tale notazione è errato.
Il grafico della funzione si avvicina sempre di più al punto (2;3), dove 2 è il valore a cui si avvicina sempre di più la x, e 3 è il valore a cui si avvicina sempre di più la y. Si è calcolato solamente ciò che accade se la x si avvicina a 2. Nulla si può quindi dire della funzione per x=2, il limite mi dice solo cosa accade "nei pressi" del 2.

G2.2 Definizione di limite

In matematica non è permesso definire le cose in maniera imprecisa. Per questa ragione non si può definire il limite dicendo "se la x si avvicina ad un numero, allora la y si avvicina ad un altro numero…", in quanto "si avvicina" presuppone un movimento che non c'è. La funzione è lì dov'è, e i punti non si muovono nel tempo e nello spazio. Il concetto intuitivo mostrato precedentemente nell'esempio G2.1 va quindi formalizzato.

Le definizioni da dare sono in realtà molte, ossia:

- Definizione di limite finito di una funzione in un punto, ossia: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
- Definizione di limite infinito di una funzione in un punto, ossia: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
- Definizione di limite finito di una funzione all'infinito, ossia: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$.
- Definizione di limite infinito di una funzione all'infinito, ossia: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Questi quattro casi verranno trattati solamente per capirne il significato grafico, e servirà la loro interpretazione grafica per tracciare correttamente una funzione data.

In particolare serviranno per tracciare asintoti e punti di discontinuità di una funzione.
In questo paragrafo si darà solo la definizione del primo dei quattro casi, gli altri si definiscono in maniera analoga.

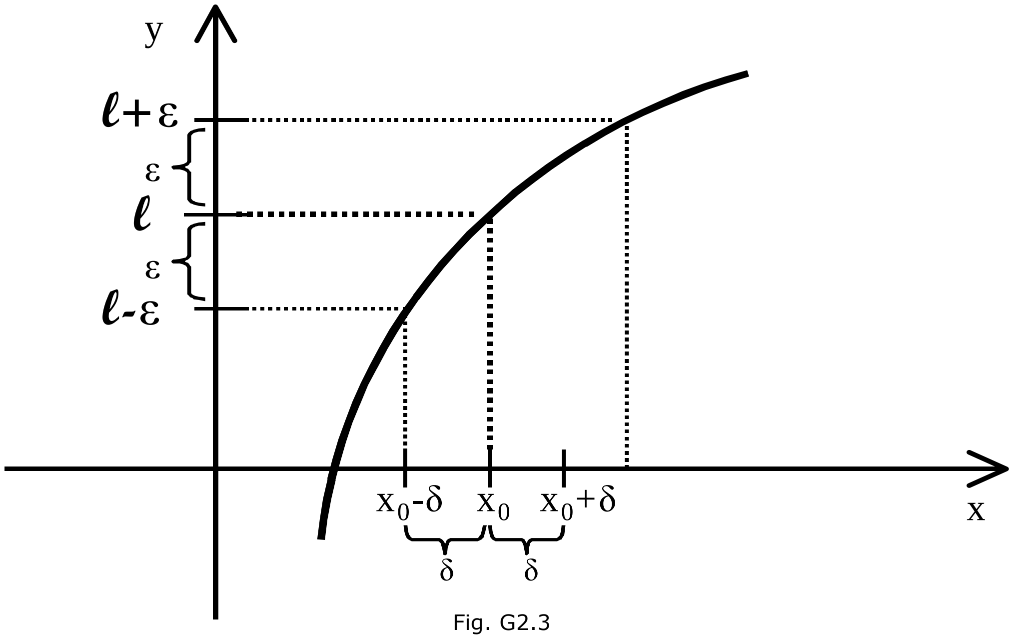

Fig. G2.3
Definizione di limite finito di
una funzione in un punto.

Il ragionamento seguente serve per dare la definizione formale di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Come detto nel paragrafo precedente il significato di tale notazione è che se la x si avvicina a x_0 allora la funzione (ossia la y) si avvicina a ℓ.

Per dire questo "si avvicina" in termini matematici si prendono degli intervalli di ampiezza δ e ε, e li si definisce di dimensione piccola a piacere, così che possiamo immaginare tali intervalli che si rimpicciioliscano fino a che la funzione si avvicini al punto (x_0, ℓ).

In particolare si prenda un intervallo di ampiezza ε e si fissi sull'asse delle y i punti $\ell+\varepsilon$ ed $\ell-\varepsilon$. Da questi punti si tracciano delle linee orizzontali fino ad incontrare la funzione, e poi dai punti di'ntersezione si tracciano delle linee verticali. Una di queste cadrà a destra ed una a sinistra di x_0. La più vicina delle due a x_0 si dirà che ha una distanza δ, per cui si riesce a trovare un intervallo sull'asse x $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Se adesso si prende un punto qualunque in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ il suo corrispondente sull'asse delle y sarà senz'altro tra $\ell-\varepsilon$ ed $\ell+\varepsilon$. Se si immagina ε sempre più piccolo e si effettua nuovamente il procedimento appena visto si nota che la funzione si avvicina al punto (x_0, ℓ).

In breve: si prende un ε e si trova un δ tale che qualsiasi valore delle x appartenente a $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ il corrispondente valore delle y, ossia f(x), appartiene a $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

DEFINIZIONE DI LIMITE: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ **t.c.** $\forall x\in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[$ **allora** $f(x)\in\,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

$\forall\ \varepsilon>0$	Si prende un ε.
$\exists\ \delta>0$	Si trova un δ
t.c. $\forall x\in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[$,	tale che qualsiasi valore delle x appartenente a $]x_0-\delta, x_0+\delta[$
allora $f(x)\in\,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$	allora il corrispondente valore delle y, ossia f(x), appartiene a $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

G2.3 Significato grafico dei limiti

Ora si studierà come un limite può essere rappresentato graficamente, mettendo in relazione ogni limite con una rappresentazione grafica. Tale relazione vale anche al contrario, ossia dal grafico si è in grado di ricavare il limite.

CASO 1:
LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

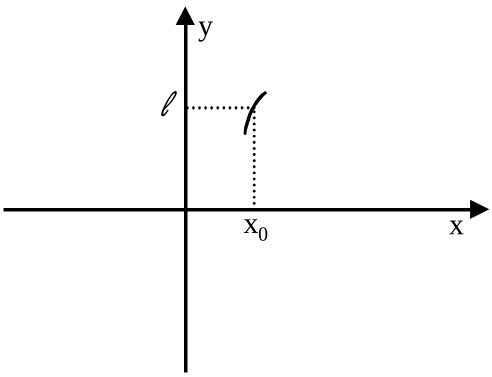

Fig. G2.4
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

In questo caso la x si avvicina a x_0, mentre la y si avvicina a ℓ.

La funzione si avvicinerà sempre di più al punto (x_0, ℓ).

Non si può dire se la funzione passa per il punto in questione o se c'è un "buco", ossia un punto di discontinuità, argomento che verrà approfondito nel prossimo capitolo.

Un caso particolare può essere $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, nel quale la funzione si avvicina sempre di più al punto (2;3).

La notazione $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ indica che ci si avvicina a x_0 da destra. Il + non ha il significato di "positivo" ma di "ci si avvicina da destra". In tal caso il grafico è mostrato in figura G2.5.

Analogamente la notazione $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ indica che ci si avvicina a x_0 da sinistra. Il - non ha il significato di "negativo" ma di "ci si avvicina da sinistra". In tal caso il grafico è mostrato in figura G2.6.

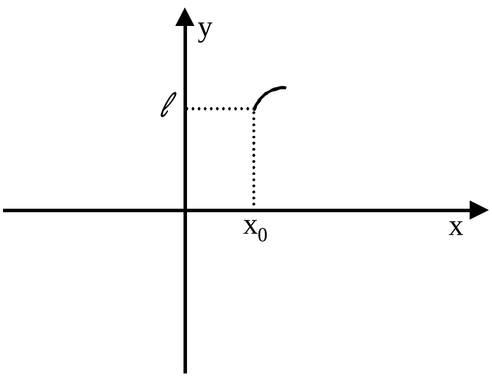

Fig. G2.5
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

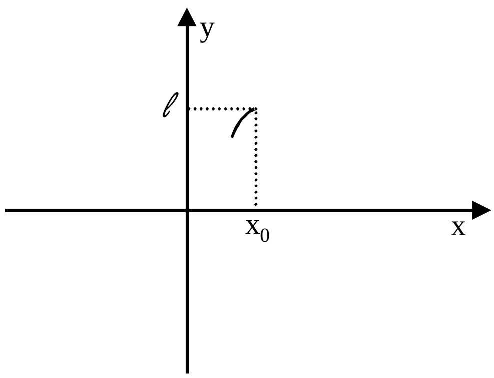

Fig. G2.6
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

I limiti $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ sono detti rispettivamente LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO.

E' ovvio che se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ allora anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e viceversa.

Ciò vuol dire che se si conoscono i due limiti destro e sinistro e se essi sono uguali, allora si conosce anche il limite della funzione. Viceversa, se si conosce il limite della funzione, allora si conoscono i due limiti destro e sinistro che avranno lo stesso valore del limite di partenza.

Nel caso esaminato in questo paragrafo i due limiti destro e sinistro sono sempre uguali a ℓ, ma potrebbero anche essere diversi, ed si vedrà questo caso nel prossimo capitolo.

CASO 2:
LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO.

Si dice limite infinito di una funzione in un punto il caso in cui la x tende a un numero e la y tende a infinito. Si indica con $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Si hanno 4 casi a seconda che la x tenda a x_0 da destra o da sinistra e a seconda che ci si avvicini a più infinito o a meno infinito.

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$. In questo caso la x si avvicina a x_0 da destra e la funzione (ossia la y) si avvicina a $+\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.7.
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$. In questo caso la x si avvicina a x_0 da sinistra e la funzione (ossia la y) si avvicina a $+\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.8.
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$. In questo caso la x si avvicina a x_0 da destra e la funzione (ossia la y) si avvicina a $-\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.9.
- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$. In questo caso la x si avvicina a x_0 da sinistra e la funzione (ossia la y) si avvicina a $-\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.10.

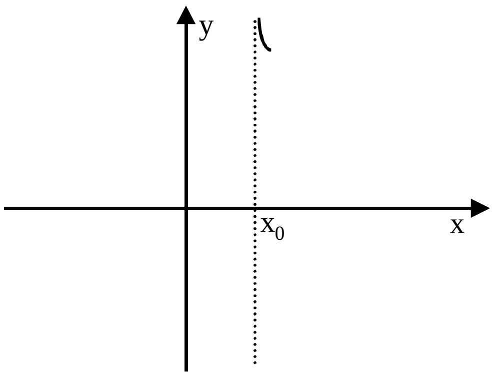

Fig. G2.7
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

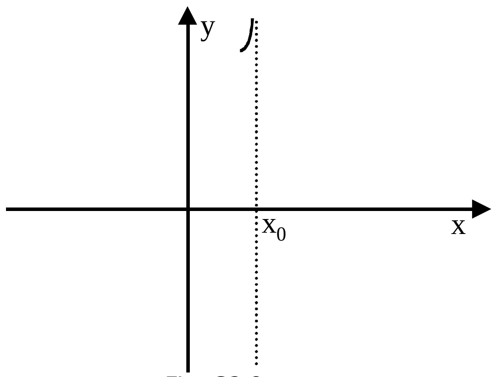

Fig. G2.8
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

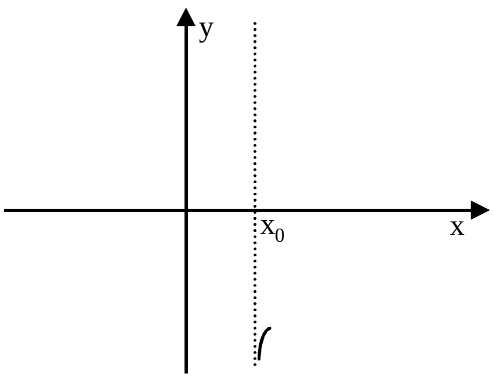

Fig. G2.9
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

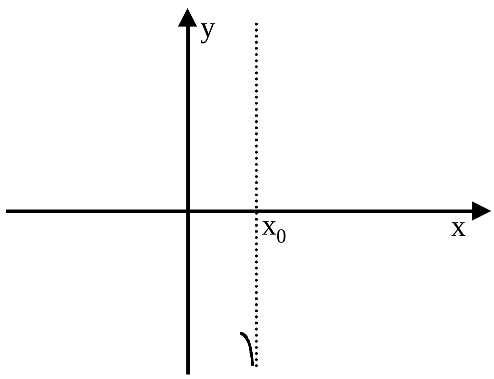

Fig. G2.10
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Se si verificano comtemporaneamente i casi $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ è possibile indicarli sinteticamente con $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. In questo caso la x si avvicina a x_0 da destra e da sinistra e la funzione (ossia la y) si avvicina a $+\infty$. Tale caso è rappresentato in figura G2.11.

Se si verificano comtemporaneamente i casi $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ è possibile indicarli sinteticamente con $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. In questo caso la x si avvicina a x_0 da destra e da sinistra e la funzione (ossia la y) si avvicina a $-\infty$. Tale caso è rappresentato in figura G2.12.

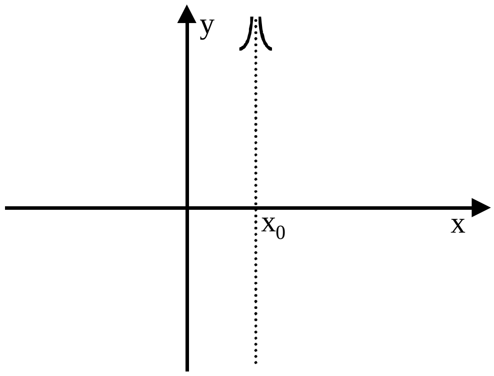

Fig. G2.11
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

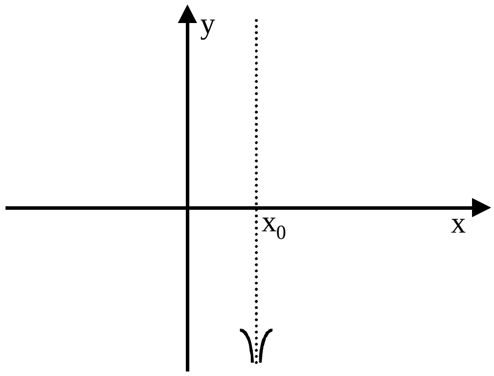

Fig. G2.12
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Nel caso in cui $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$, non si capisce se si deve tracciare il grafico della funzione verso l'alto (se il risultato è $+\infty$) o verso il basso (se il risultato è $-\infty$). E' necessario conoscere il segno dell'infinito per poter tracciare il grafico.

SI NOTI CHE il simbolo ∞ NON SIGNIFICA né $+\infty$ né $-\infty$, ma entrambi. Con il simbolo ∞ si intende sia $+\infty$ che $-\infty$. Si deve quindi conoscere il segno di ∞ per tracciare il grafico di questi limiti.

CASO 3:
LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE ALL'INFINITO.

Si dice limite finito di una funzione all'infinito il caso in cui all'aumentare del valore della x la y si avvicina sempre di più ad un valore ℓ. Si indica con la notazione $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

Si possono verificare i due casi seguenti:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. In questo caso la x si avvicina a più infinito e la funzione (ossia la y) si avvicina al valore ℓ.

  Non è possibile per ora determinare se si avvicina a ℓ dall'alto o dal basso. Per saperlo è necessario utilizzare le derivate, argomento trattato in uno dei prossimi capitoli. Solo uno dei due segni grafici rappresentati graficamente in figura G2.13 è corretto. Quale dei due lo si capirà più avanti.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$. In questo caso la x si avvicina a meno infinito e la funzione (ossia la y) si avvicina al valore ℓ.

  Non è possibile per ora determinare se si avvicina a ℓ dall'alto o dal basso. Per saperlo è necessario utilizzare le derivate, argomento trattato in uno dei prossimi capitoli. Solo uno dei due segni grafici rappresentati graficamente in figura G2.14 è corretto. Quale dei due lo si capirà più avanti.

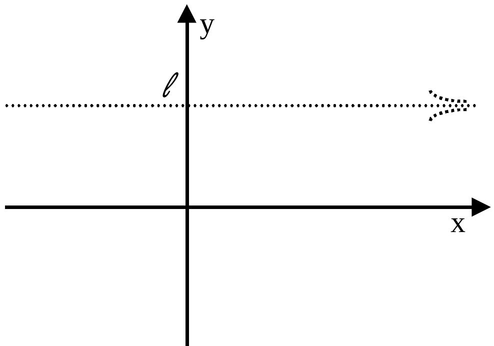

Fig. G2.13
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

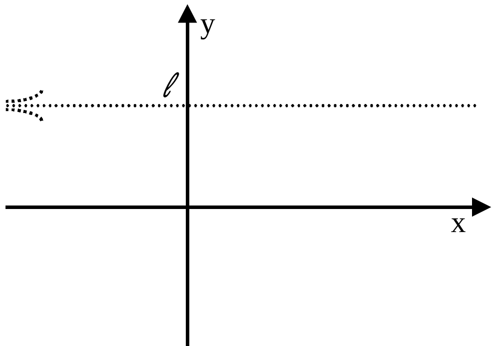

Fig. G2.14
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Se si verificano i due casi precedenti contemporaneamente, ossia se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, allora ciò può essere scritto più sinteticamente come $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$. Ciò è rappresentato graficamente in figura G2.15.

In quest'ultimo caso la x si avvicina a ∞ (ossia sia a $+\infty$ che a $-\infty$), e la funzione (ossia la y) sia avvicina a ℓ.

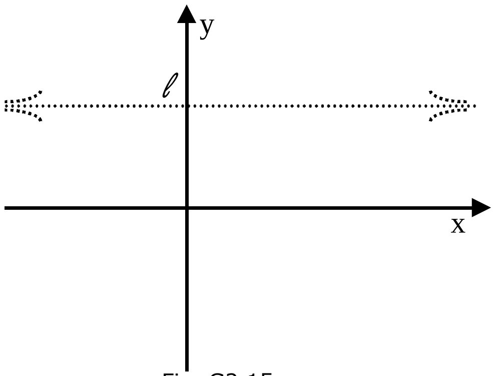

Fig. G2.15
Rappresentazione grafica di
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$.

Si noti che nel disegno precedente è possibile che si avvicini a ℓ dall'alto verso più infinito e dal basso verso meno infinito, oppure dall'alto in entrambi i casi, oppure dal basso in entrambi i casi, oppure dal basso verso più infinito e dall'alto verso meno infinito. Saranno le derivate a chiarire tali casi.
E' inoltre possibile che verso più infinito la funzione tenda ad un valore ℓ_1 e verso meno infinito tenda ad un differente valore ℓ_2. E' ovvio che se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ allora valgono anche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ e viceversa.

CASO 4:
LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE ALL'INFINITO.

Si dice limite infinito di una funzione all'infinito il caso in cui la x tenda a infinito e anche la y tenda a infinito. Si indica con $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Ci sono quattro possibili casi:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. In questo caso la x si avvicina a $+\infty$ e la funzione (ossia la y) si avvicina a $+\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.16.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. In questo caso la x si avvicina a $-\infty$ e la funzione (ossia la y) si avvicina a $+\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.17.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. In questo caso la x si avvicina a $+\infty$ e la funzione (ossia la y) si avvicina a $-\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.18.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. In questo caso la x si avvicina a $-\infty$ e la funzione (ossia la y) si avvicina a $-\infty$.
  E' rappresentato graficamente in figura G2.19.

Se non si conosce il segno degli infiniti non è possibile rappresentare il limite graficamente.

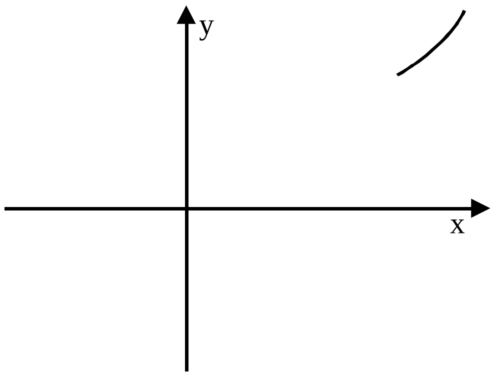

Fig. G2.16
Rappresentazione grafica di
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

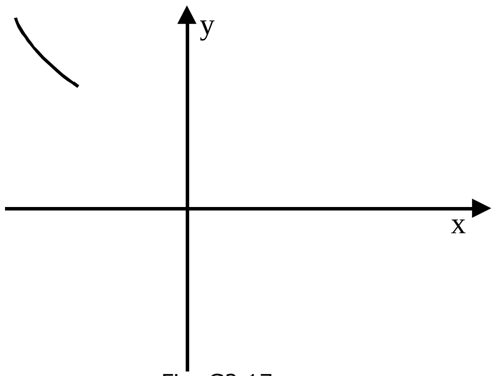

Fig. G2.17
Rappresentazione grafica di
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

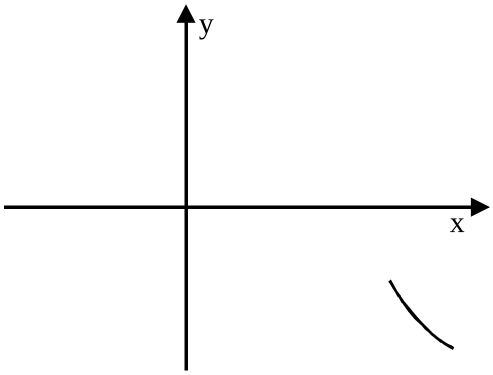

Fig. G2.18
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

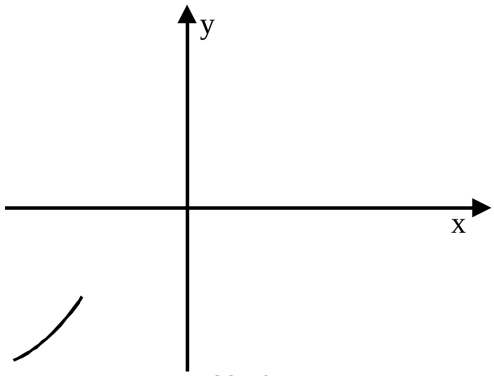

Fig. G2.19
Rappresentazione grafica di
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

G2.4 Calcolo di limiti

Il problema che ci si pone in questo paragrafo è il calcolo del risultato di un limite dal punto di vista algebrico. Data una funzione si vuole dunque determinare a cosa tenda la y sapendo che la x tende a qualcosa di stabilito.
Ciò è già stato visto nell'esempio G2.1, ma si trattava di un procedimento scomodo e impreciso. Si vuole quindi trovare un procedimento più comodo e preciso rispetto a quello per approssimazioni successive.

PROCEDIMENTO: si sostituisce al posto della x il valore a cui essa si avvicina.

Esempio G2.2:
Calcolare il $\lim_{x\to3} x^2 - 2x + 5$.

Si sostituisce al posto della x il valore 3 a cui essa tende e si svolgono normalmente i calcoli per semplificare l'espressione. $\lim_{x\to3} x^2 - 2x + 5 = 3^2 - 2\cdot3 + 5 = 9 - 6 + 5 = 8$
Quindi il $\lim_{x\to3} x^2 - 2x + 5$ può essere facilmente calcolato ed il suo valore è 8.

Potrebbe sembrare tutto molto semplice, ma spesso nella semplificazione delle espressioni ci si trova talvolta di fronte a forme non usuali.
Tali forme sono di due tipi: FORME DETERMINATE, che verranno affrontate in questo paragrafo e si risolvono senza grossi problemi, e FORME INDETERMINATE, la cui eliminazione prevede l'utilizzo di procedimenti che saranno trattati nel paragrafo successivo.

Le forme determinate permettono di trovare il risultato del limite: basta ricordare tutti i casi elencati di seguito.

FORME DETERMINATE:

1) $\frac{1}{\infty} \to 0$ (si legge "1 su infinito TENDE a zero") in particolare $\frac{1}{+\infty} \to 0^+$ e $\frac{1}{-\infty} \to 0^-$

2) $\frac{1}{0} \to \infty$ (si legge "1 su zero TENDE a infinito") in particolare $\frac{1}{0^+} \to +\infty$ e $\frac{1}{0^-} \to -\infty$

Se risolvendo un limite appare l'espressione $\frac{1}{\infty}$ oppure $\frac{1}{0}$ si può sostituire tale espressione con 0 oppure con $+\infty$. Ciò non vuol dire che $\frac{1}{\infty}$ sia uguale a zero, né che $\frac{1}{0}$ sia uguale a ∞, ma che tali espressioni "si avvicinano sempre di più" al valore ∞ oppure al valore 0.
Sia dunque ben chiaro che NON E' VERO CHE $\frac{1}{\infty} = 0$. La notazione $\frac{1}{\infty} \to 0$ indica solo che all'aumentare del valore del denominatore la frazione assume un valore sempre più vicino allo 0.

3) $\infty \cdot \infty \to \infty$ (si legge "infinito per infinito TENDE a infinito")
in particolare vale la regola dei segni, per cui
$+\infty \cdot +\infty \to +\infty$, $-\infty \cdot -\infty \to +\infty$, $+\infty \cdot -\infty \to -\infty$.

4) $2^{+\infty} \to +\infty$ (si legge "due alla più infinito TENDE a più infinito")

5) $2^{-\infty} \to 0$ (infatti $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} \to \frac{1}{+\infty} \to 0$)

6) $\frac{0}{\infty} \to 0$ $\qquad$ $\frac{0}{1} \to 0$

7) $\frac{\infty}{0} \to \infty$ $\qquad$ $\frac{\infty}{1} \to \infty$

8) $+\infty^{+\ell} \to +\infty$

9) $+\infty^{-\ell} \to 0$ (infatti $(+\infty)^{-\ell} = \frac{1}{(+\infty)^{+\ell}} \to \frac{1}{+\infty} \to 0$)

In tutti questi casi se al posto di 1 (o del 2) si mette un numero positivo le formule restano valide. In caso si metta un numero negativo si deve fare attenzione al segno, che potrebbe essere diverso.

Esempio G2.3:

Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ e rappresentare graficamente il risultato ottenuto.

Per calcolare tale limite si sostituisce al posto della x il valore a cui tende, ossia ∞, si incontra quindi l'espressione $\frac{1}{+\infty}$ che tende a zero. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$. Ora si deve rappresentare tale limite graficamente.

Si è in uno dei casi del paragrafo precedente, quello del limite finito di una funzione all'infinito, in cui ℓ vale zero.

Si ottiene il grafico in figura G2.20. Poiché il risultato è 0^+, allora ci si sta avvicinando all'asse x da sopra e non da sotto.

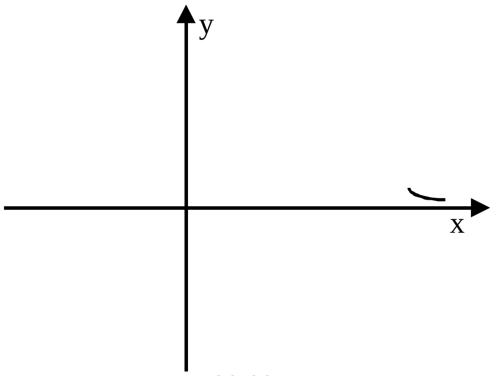

Fig. G2.20

Rappresentazione grafica di $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$.

Esempio G2.4:

Calcolare il $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ e rappresentare graficamente il risultato ottenuto.

Per calcolare tale limite si sostituisce al posto della x il valore a cui tende, ossia 0^+, si incontra quindi l'espressione $\frac{1}{0^+}$ che tende a $+\infty$. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Ora si deve rappresentare tale limite graficamente.

Si è in uno dei casi del paragrafo precedente, quello del limite infinito di una funzione in un punto, e in questo caso il punto è $x_0=0$. Poiché ci si avvicina a 0^+ si deve tracciare il limite destro. Si ottiene il grafico in figura G2.21.

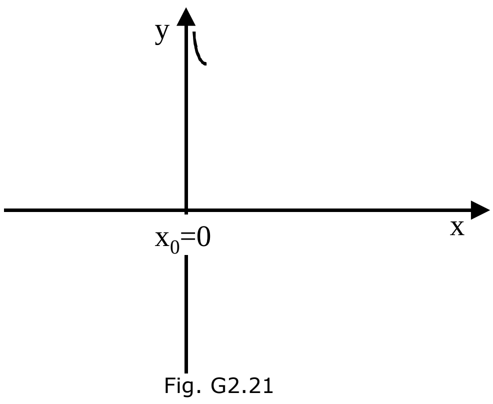

Fig. G2.21

Rappresentazione grafica di $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Nel caso in sui si incontri una forma determinata basta ricordarsi la regola da usare per risolvere il limite.
Nel caso in cui si incontri una forma indeterminata si dovranno usare i procedimenti del prossimo paragrafo per risolvere il limite.
Quando si incontra una forma indeterminata l'esercizio non è finito, ma deve ancora iniziare.

TABELLA RIASSUNTIVA FORME DETERMINATE ED INDETERMINATE

FORME DETERMINATE		FORME INDETERMINATE
$\frac{1}{\infty} \to 0$	$\frac{1}{0} \to \infty$	$+\infty-\infty \to ?$
$\infty \cdot \infty \to \infty$		$\frac{0}{0} \to ?$
$2^{+\infty} \to +\infty$	$2^{-\infty} \to 0$	$\frac{\infty}{\infty} \to ?$
$\frac{0}{\infty} \to 0$	$\frac{0}{1} \to 0$	$0 \cdot \infty \to ?$
$\frac{\infty}{0} \to \infty$	$\frac{\infty}{1} \to \infty$	$0^0 \to ?$
$+\infty^{+\ell} \to +\infty$	$+\infty^{-\ell} \to 0$	$\infty^0 \to ?$
		$1^\infty \to ?$

Nel prossimo paragrafo si tratterà la risoluzione solamente dei primi 3 tipi di forma indeterminata, ossia $+\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Gli altri casi sono di solito riconducibili ai primi 3 tipi.

G2.5 Risoluzione delle forme indeterminate

CASO 1: $\frac{\infty}{\infty}$

Se nella risoluzione del limite si incontra la forma $\frac{\infty}{\infty}$ (infinito su infinito) si deve usare il seguente procedimento:

PROCEDIMENTO:

1 – Si raccoglie la x di grado più alto al numeratore e al denominatore.
2 – Si semplifica la x raccolta.
3 – Si sostituisce al posto della x il valore a cui essa tende.

Esempio G2.5:
Risolvere il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3-2x^2-x+2}$

Sostituendo al posto della x $+\infty$ si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{\infty}{\infty}$, che è una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si usa il procedimento appena visto.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3-2x^2-x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} =$$

Si raccoglie la x di grado massimo (x^2 al numeratore e x^3 al denominatore).

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} =$$

Si semplificano le x raccolte.

$$= \frac{1-\frac{1}{+\infty}}{+\infty\left(1-\frac{2}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}+\frac{2}{+\infty}\right)} =$$

Si sostituisce $+\infty$ al posto della x.

$$= \frac{1-0}{+\infty(1-0-0+0)} =$$

Le forme determinate del tipo $1/\infty$ tendono a zero.

$$= \frac{1}{+\infty(1)} = 0^+$$

Quindi il risultato è zero.

OSSERVAZIONI:

1 – Si continua a scrivere $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots}$ davanti alla funzione fino a che non si sostituisce al posto della x il valore a cui tende.

2 – Il fatto che il risultato dell'esempio G2.5 sia 0^+ non vuol dire che tutte le volte che si risolve un limite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ verrà sempre questo risultato. Potrebbe venire qualunque risultato: $\frac{1}{3}$, -2, ∞, eccetera.

3 – La rappresentazione grafica del risultato ottenuto si svolge in maniera analoga agli esempi già svolti nel paragrafo precedente.

4 – Non è detto che risolvendo un limite si trovi sempre un risultato numerico. Talvolta il risultato potrebbe essere "non esiste il limite"; ciò vuol dire che se la x si avvicina sempre di più al valore dato o a infinito, la y non si avvicina ad alcun valore né ad infinito.

ORDINI DI INFINITO:

Ci sono molte funzioni che tendono ad infinito se la x tende a infinito.
Ecco alcuni esempi:

- $y=x$ $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$
- $y=x^3$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$
- $y=\log(x)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$
- $y=e^x$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

Alcune di queste funzioni si avvicinano a +∞ più velocemente di altre, ed altre meno velocemente.
L'ordine di infinito esprime la velocità di avvicinamento all'infinito. Se l'ordine di infinito di una funzione f è più alto di quello di un'altra funzione g, allora la funzione f si avvicina all'infinito più velocemente della funzione g.
Ecco l'ordine di infinito dal minore al maggiore:

$$\ldots\ldots<\log_3 x<\ln x<\log_2 x<\ldots\ldots<\sqrt[3]{x}<\sqrt{x}<\ldots\ldots<x<x^2<x^3<\ldots\ldots<2^x<e^x<3^x<\ldots\ldots\ldots<x^x<\ldots\ldots$$

Nella risoluzione dei limiti del tipo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ basta vedere l'ordine di infinito del num. e del denominatore.

Ci sono 4 casi:

N(x)>D(x)	Il risultato è ∞.
N(x)=D(x)	Il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo.
N(x)<D(x)	Il risultato è 0.
N(x)=D(x)+1	Il risultato è ∞, e c'è l'asintoto obliquo; m è il rapporto tra i coefficienti di grado massimo.

Il quarto caso verrà trattato nel prossimo capitolo.

<u>Esempio G2.6:</u>
Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^2}{3x^3-2\ln(x)}$.

Sostituendo +∞ al posto della x si ottiene $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^2}{3x^3-2\ln(x)}=\frac{\infty}{\infty}$, che è forma indeterminata.

Si può risolvere con gli ordini di infinito: si è nel caso in cui l'ordine di N(x) è maggiore dell'ordine di D(x), quindi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^2}{3x^3-2\ln(x)}=+\infty$.

<u>Esempio G2.7:</u>
Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-2x^2-x+5}$.

Sostituendo +∞ al posto della x si ottiene $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-2x^2-x+5}=\frac{\infty}{\infty}$ che è forma indeterminata.

Si può risolvere con gli ordini di infinito: si è nel caso in cui N(x)=D(x), quindi il risultato è il rapporto tra i coefficienti delle x di grado massimo: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-2x^2-x+5}=-\frac{3}{2}$.

<u>Esempio G2.8:</u>

Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x+x^2}=\frac{\infty}{\infty}$.

Sostituendo $+\infty$ al posto della x si ottiene $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x+x^2}=\frac{\infty}{\infty}$ che è forma indeterminata.

Si può risolvere con gli ordini di infinito: si è nel caso in cui N(x)<D(x), quindi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x}}{x+x^2}=0$

CASO 2: $\frac{0}{0}$

Se nella risoluzione del limite si incontra la forma $\frac{0}{0}$ (zero su zero) si deve usare il seguente procedimento:

PROCEDIMENTO:
1 – Si scompongono in fattori il numeratore e il denominatore.
2 – Si semplifica.
3 – Si sostituisce al posto della x il valore a cui essa tende.

Esempio G2.9:
Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Sostituendo il 2 al posto della x si ha : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{4-4}{4-2-2}=\frac{0}{0}$. Si deve quindi utilizzare il procedimento appena visto.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=$ Si scompongono in fattori il numeratore ed il denominatore.

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=$ Si semplifica (x-2) al numeratore con (x-2) al denominatore.

$=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$ Si sostituisce 2 al posto della x e si ottiene il risultato $\frac{4}{3}$.

OSSERVAZIONI:

1 – Si continua a scrivere $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots}$ davanti alla funzione fino a che non si sostituisce al posto della x il valore a cui tende.

2 – Il fatto che il risultato di questo limite sia $\frac{4}{3}$ non vuol dire che tutte le volte che risolvo un limite del tipo $\frac{0}{0}$ verrà sempre questo risultato. Potrebbe venire qualunque risultato: $\frac{1}{3}$, -2, ∞, eccetera.

3 – La rappresentazione grafica del risultato ottenuto si svolge in maniera analoga agli esempi già svolti nel paragrafo precedente.

NOTA BENE: Alcuni dei casi che seguono non si risolvono con il procedimento descritto. Essi sono dunque degli esempi classici per risolvere casi particolari della forma $\frac{0}{0}$.

Esempio G2.10:
Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

Sostituendo 2 al posto della x si ottiene $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2}=\frac{0}{0}$ che è forma indeterminata.

Per eliminare la forma indeterminata prima si razionalizza e poi si semplifica.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Esempio G2.11:
Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}$.

Sostituendo zero al posto della x si ha: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}=\frac{\text{sen }0}{0}=\frac{0}{0}$, che è forma indeterminata.

Tale limite non può essere risolto per mezzo di procedimenti già visti. Esiste un teorema che assicura che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}=1$.

Si può utilizzare questo risultato per calcolare altri limiti.

<u>Esempio G2.12:</u>

Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Sostituendo lo zero al posto della x si ottiene $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos 0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$, che è forma indeterminata.

L'idea della risoluzione è la seguente: si razionalizza, si sostituisce sen^2x al posto di $1-\cos^2x$ e infine si considera che $\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$ tende a 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}= \qquad 1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+\cos 0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

<u>Esempio G2.13:</u>

Risolvere il limite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

Si sostituisce il numero 1 al posto della x e si ottiene $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{1-1}{1-2+1}=\frac{0}{0}$ forma indeterminata.

Si utilizza il procedimento standard visto precedentemente. Si scompone in fattori e si semplifica:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2+1}{1-1}=\frac{3}{0}=\infty\,.$$

Quando si trova risultato ∞ non è chiaro se il risultato è $+\infty$ o $-\infty$. Per scoprirlo si devono calcolare il limite destro e il limite sinistro.

Ogni volta che il risultato è ∞ si devono calcolare i limiti destro e sinistro per capire il segno di ∞.

Calcolo del LIMITE DESTRO:

Con 1^+ si intende un numero un po' più grande di 1, ossia 1,000000…00001.

Se da tale numero si toglie 1 si ottiene un numero un po' più grande di zero, ossia 0,00000………00001 che si indica con 0^+.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2+1}{1^+-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty\,.$$

Calcolo del LIMITE SINISTRO:

Con 1^- si intende un numero un po' più piccolo di 1, ossia 0,9999999……

Se da tale numero si toglie 1 si ottiene un numero un po' più piccolo di zero, ossia -0,00000………00001 che si indica con 0^-.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2+1}{1^--1}=\frac{3}{0^-}=-\infty\,.$$

Se non si calcolano i due limiti destro e sinistro non si è in grado di tracciare il grafico come visto precedentemente.

CASO 3: $+\infty-\infty$

E' bene chiarire che $+\infty-\infty$ **non fa zero**. Non è possibile semplificare gli infiniti. Infinito non è un numero, pertanto molte operazioni che si effettuano con i numeri non sono permesse con gli infiniti.

$+\infty-\infty$ è forma indeterminata, e quindi bisogna eliminarla.

Non sono invece forme indeterminate $+\infty+\infty$ che dà risultato $+\infty$ e $-\infty-\infty$ che dà risultato $-\infty$.

FORME DETERMINATE: $+\infty+\infty\to+\infty$ $\quad -\infty-\infty\to-\infty$

FORMA INDETERMINATA: $+\infty-\infty\to ?$

Per eliminare questa forma indeterminata ci sono due metodi a seconda del tipo di funzione di cui andiamo a calcolare il limite.

<u>Esempio G2.14:</u>

Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-2x^2-x+2$.

Sostituendo $+\infty$ al posto della x si ottiene $\lim_{x\to+\infty} x^3-2x^2-x+2=(+\infty)^3-2\cdot(+\infty)^2-(+\infty)+2=+\infty-\infty-\infty+2$, che è una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$.

In questo caso si raccoglie la x di grado massimo e la forma indeterminata scompare.

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-2x^2-x+2=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=(+\infty)^3\left(1-\frac{2}{+\infty}-\frac{1}{(+\infty)^2}-\frac{2}{(+\infty)^3}\right)=+\infty\left(1-0-0+0\right)=+\infty .$$

Esempio G2.15:

Risolvere il limite $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}-\sqrt{x}$.

Sostituendo $+\infty$ al posto della x si ha $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=\sqrt{+\infty-3}-\sqrt{+\infty}=+\infty-\infty$, che è una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$.

In questo caso si razionalizza e la forma indeterminata scompare.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3-x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}=\frac{-3}{\sqrt{+\infty-3}+\sqrt{+\infty}}=\frac{-3}{+\infty}=0.$$

Esempio G2.16:

Risolvere il limite $\lim_{x\to\infty}3x^2-x^3$.

Sostituendo $+\infty$ al posto della x si ha $\lim_{x\to\infty}3x^2-x^3=3(\infty)^2-(\infty)^3=\infty-\infty$, che è una forma indeterminata.

Si risolve raccogliendo la x di grado massimo.

$$\lim_{x\to\infty}3x^2-x^3=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{3}{x}-1\right)=\infty^3\left(\frac{3}{\infty}-1\right)=\infty\left(0-1\right)=\infty .$$

Purtroppo non si capisce se il risultato è $+\infty$ o $-\infty$, quindi non si è in grado di tracciare il grafico.

Ogni volta che il risultato è ∞ si devono calcolare i due limiti per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}3x^2-x^3=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{3}{x}-1\right)=\left(+\infty\right)^3\left(\frac{3}{+\infty}-1\right)=+\infty\left(0-1\right)=-\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty}3x^2-x^3=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{3}{x}-1\right)=\left(-\infty\right)^3\left(\frac{3}{-\infty}-1\right)=-\infty\left(0-1\right)=+\infty .$$