F2. Trigonometria

F2.1 Risoluzione dei triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo rettangolo significa trovare tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli.
Un angolo lo si conosce già ed è l'angolo retto. Le incognite sono i tre lati e i due angoli acuti.
E' necessario conoscere due di questi cinque oggetti (tra cui almeno un lato) per trovare tutto il resto.

I lati e gli angoli sono legati dalle seguenti relazioni:

1. Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto.
2. Un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.
3. Un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.
4. Un cateto è uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente.

A seconda del problema si deve scegliere la regola opportuna tra quelle sopra elencate
Per angolo opposto e adiacente, rifrendosi alla figura F2.1, si intende

- a è opposto ad α ed adiacente a β
- b è opposto ad β ed adiacente a α

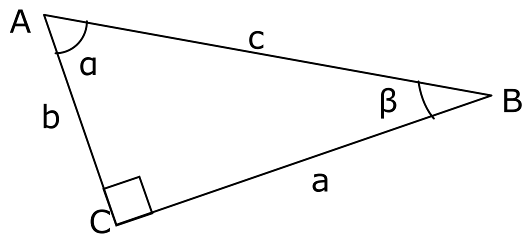

Figura F2.1
Angoli e lati in un triangolo rettangolo.

Con le notazioni della figura F2.1 si possono scrivere le relazioni 1, 2, 3 e 4 come formule.

1. Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto.
$a = c \cdot \text{sen}(\alpha)$ $\qquad$ $b = c \cdot \text{sen}(\beta)$

2. Un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.
$a = c \cdot \cos(\beta)$ $\qquad$ $b = c \cdot \cos(\alpha)$

3. Un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.
$a = b \cdot \text{tg}(\alpha)$ $\qquad$ $b = a \cdot \text{tg}(\beta)$

4. Un cateto è uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente.
$a = b \cdot \text{cotg}(\beta)$ $\qquad$ $b = a \cdot \text{cotg}(\alpha)$

Per la risoluzione dei prossimi esercizi si considererà sempre la figura F2.1 , con cateti a e b, ipotenusa c, a opposto ad α e adiacente a β, b opposto a β e adiacente ad α. Ci sono vari modi di risolvere gli esercizi.

<u>Esempio F2.1:</u>
Risolvere il triangolo rettangolo con a=2 e α=30°.

Per differenza si trova β=90°-30°=60°
Usando la prima regola si ha a = c · sen(α), ossia 2 = c · sen(30°), da cui $c = \frac{2}{\text{sen}(30^\circ)} = \frac{2}{1/2} = 2 \cdot 2 = 4$.

Usando la seconda regola si ha b = c · cos(α), ossia b = 4 · cos(30°), da cui $b = 4 \cdot \cos(30^\circ) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

<u>Esempio F2.2:</u>
Risolvere il triangolo rettangolo con c=5 e α=45°.

Per differenza si trova β=90°-45°=45°, quindi il triangolo è isoscele.
Usando la prima regola si ha a = c · sen(α), ossia a = 5 · sen(45°), da cui $a = 5 \cdot \text{sen}(45^\circ) = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Anche $b = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ perchè il triangolo è isoscele.

Esempio F2.3:
Risolvere il triangolo rettangolo con $b = 6\sqrt{3}$ e a=6.

Dalla terza regola si ha a = b · tg(α), ossia 6 = $6\sqrt{3}$ · tg(α), da cui $tg\alpha = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e quindi α=30°.

Per differenza β=90°-30°=60°.

Si trova c con la prima formula a = c · sen(α), ossia 6 = c · sen(30°), da cui $c = \frac{6}{sen(30°)} = \frac{6}{1/2} = 6 \cdot 2 = 12$.

Anche con il teorema di Pitagora si ottiene $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 36 \cdot 3} = \sqrt{36 + 108} = \sqrt{144} = 12$.

Esempio F2.4:
Risolvere il triangolo rettangolo con a=4, c=5.

Dalla prima regola si ha a = c · sen(α), ossia 4 = 5 · sen(α), da cui $sen\alpha = \frac{4}{5} = 0.8$.

Il valore non è nella tabella, quindi si usa la calcolatrice e si ha $\alpha = sen^{-1}(0.8) = 53{,}13°$.

Per differenza si ha β=90°-53,13°=36,87°.

Con il teorema di Pitagora si trova $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$.

F2.2 Risoluzione dei triangoli qualunque

In un triangolo qualunque non vale il teorema di Pitagora.
Tenendo presente comunque la figura F2.2, in cui a è opposto ad α, b è opposto a β e c opposto a γ, valgono le seguenti formule:

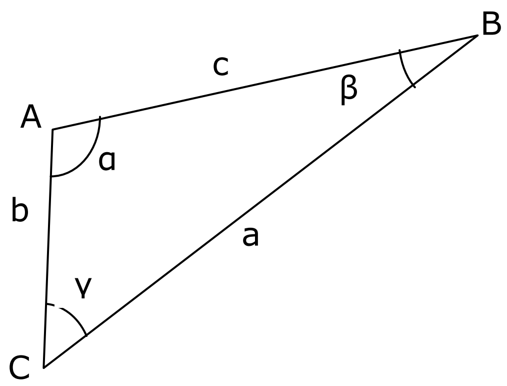

Figura F2.2
Angoli e lati in un triangolo qualunque.

Teorema dei seni:

$$\boxed{\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}\ ;\ \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}\ ;\ \frac{c}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\alpha}}$$

Teorema dei coseni (o di Carnot)

$a^2=b^2+c^2-2bc \cdot cos\alpha$
$b^2=a^2+c^2-2ac \cdot cos\beta$
$c^2=a^2+b^2-2ab \cdot cos\gamma$

In questa sede si scrivono anche altre formule relative ai triangoli che, chissà, potrebbero prima o poi essere utili…
Con p si indica il semiperimetro del triangolo.

Teorema delle tangenti (o di Nepero)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}};\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{tg\frac{\beta-\gamma}{2}}{tg\frac{\beta+\gamma}{2}};\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{tg\frac{\gamma-\alpha}{2}}{tg\frac{\gamma+\alpha}{2}}$$

Formule di Briggs
(si danno solo quelle relative ad α, le altre si ricavano)

$$sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ;$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Teorema delle proiezioni

$a=b\cdot\cos\gamma+c\cdot\cos\beta$
$b=c\cdot\cos\alpha+a\cdot\cos\gamma$
$c=a\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\alpha$

Area del triangolo

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ **(Formula di Erone)**

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot sen\gamma=\frac{1}{2}bc\cdot sen\alpha=\frac{1}{2}ca\cdot sen\beta$$

$$S=\frac{a^2 sen\beta sen\gamma}{2sen\alpha}=\frac{b^2 sen\alpha sen\gamma}{2sen\beta}=\frac{c^2 sen\beta sen\alpha}{2sen\gamma}$$

Per completezza ecco altre formule relative a figure geometriche:

TRIANGOLI RETTANGOLI
Chiamando x e y le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e h l'altezza relativa all'ipotenusa si ha:
I teorema di Euclide: $a^2=x\cdot c$, $b^2=y\cdot c$
II teorema di Euclide: $h^2=x\cdot y$
Teorema di Pitagora: $a^2+b^2=c^2$
e infine vale anche: $a\cdot b=c\cdot h$

PARALLELOGRAMMA
L'area di un parallelogramma è il prodotto dei suoi lati per il seno dell'angolo compreso.

QUADRILATERO
- L'area di un quadrilatero è la metà del prodotto delle diagonali per il seno dell'angolo compreso tra esse
- Chiamando a, b, c e d i lati di un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza e p il semiperimetro l'area è $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (FORMULA DI BRAHMAGUPTA)
- Chiamando a, b, c e d i lati di un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza, e x e y le diagonali si ha: $xy=ac+bd$

CIRCONFERENZE

Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è $r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\frac{S}{p}$

Il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo è $r=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Teorema della corda: In una circonferenza la lunghezza di una corda è $BC=2r\cdot sen\alpha$, dove r è il raggio e $\alpha=\widehat{BAC}$ è un qualunque angolo che insiste sulla corda con vertice A sulla circonferenza.

RISOLUZIONE DI TRIANGOLI QUALUNQUE - ESEMPI:

Risolvere un triangolo vuol dire trovare tutti i lati e tutti gli angoli. Serve avere, come dati, tre oggetti su 6, **di cui uno deve essere un lato**. Negli esercizi su questa parte si utilizzeranno solo il teorema dei seni e quello dei coseni.

IMPORTANTE: Se si conosce un angolo e il lato opposto si usa il teorema dei seni, altrimenti si usa il teorema dei coseni. Non sempre basta usare la tabella, qualche volta è necessaria la calcolatrice.

Si mostreranno 4 esempi:

- Nel primo saranno dati due lati e un angolo non compreso tra essi
- Nel secondo saranno dati due angoli e un lato
- Nel terzo saranno dati due lati e l'angolo compreso tra essi
- Nel quarto saranno dati tre lati

Esempio F2.5:
Risolvere il triangolo qualunque conoscendo a= $2\sqrt{6}$, b=4, β=45°.

Poiché si conosce il lato, b, e l'angolo opposto, β, si può usare il teorema dei seni, e si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{4}{\operatorname{sen}(45^\circ)} \rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_1=60^\circ,\ \alpha_2=120^\circ$$

Ci sono quindi due possibilità. Si esamina la prima con α_1=60°. Per differenza si ha: γ_1=180°-45°-60°=75°.
Di nuovo con il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c_1}{\operatorname{sen}\gamma} \rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\operatorname{sen}(60^\circ)}=\frac{c_1}{\operatorname{sen}(75^\circ)} \rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c_1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow c_1=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot 2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{36}+\sqrt{12}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+6}{3}=\frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{3}=2\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Si esamina la seconda con α_2=120°. Per differenza si ha: γ_2=180°-45°-120°=15°.
Di nuovo con il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c_2}{\operatorname{sen}\gamma} \rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\operatorname{sen}(60^\circ)}=\frac{c_2}{\operatorname{sen}(15^\circ)} \rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c_2}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow c_2=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot 2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{36}-\sqrt{12}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}-6}{3}=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}=2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Quindi ci sono due soluzioni possibili

1) α_1=60°, β_1=45°, γ_1=75°, a_1= $2\sqrt{6}$, b_1=4, c_1= $2\left(\sqrt{3}+1\right)$

2) α_2=120°, β_2=45°, γ_2=15°, a_2= $2\sqrt{6}$, b_2=4, c_2= $2\left(\sqrt{3}-1\right)$

Esempio F2.6:
Risolvere il triangolo qualunque conoscendone gli angoli α=105°, β=45° e il lato c=10.

In questo caso si conoscono due angoli, e per differenza troviamo il terzo: γ=180°-45°-105°=30°.
Ora si conosce un lato, c, e il suo angolo opposto, γ, e quindi si può usare il teorema dei seni.

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}(45^\circ)}=\frac{10}{\operatorname{sen}(30^\circ)} \rightarrow \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{10}{\frac{1}{2}} \rightarrow b=\frac{10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{1}=10\sqrt{2}$$

e considerando che il seno di 105° è uguale al seno di 75° si ha, di nuovo con il teorema dei seni…

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(105^\circ)}=\frac{10}{\operatorname{sen}(30^\circ)} \rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{10}{\frac{1}{2}} \rightarrow a=\frac{10\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=10\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2}{1}=5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

Esempio F2.7:
Risolvere il triangolo qualunque conoscendo i lati a=6, b=4 e l'angolo γ=60°.

In questo caso non si conosce un lato e il suo angolo opposto per cui si deve usare il teorema dei coseni.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \rightarrow c^2=(6)^2+(4)^2-2(6)(4)\cos(60^\circ)$$

$$c^2=36+16-2(6)(4)\frac{1}{2}=28 \rightarrow c_{1,2}=\pm\sqrt{28}=\pm 2\sqrt{7}$$

Un lato non può essere negativo, quindi c= $2\sqrt{7}$
Adesso si ha un lato, c e il suo angolo opposto, γ.

Con il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{6}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{7}}{\text{sen}(60^\circ)} \quad \rightarrow \quad \frac{6}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \rightarrow \quad \text{sen}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

Nessun angolo che si trova nella tabella ha questo valore del seno, quindi si deve usare la calcolatrice.
senα≈0.98198 e quindi α≈sen^{-1}(0.98198)≈79,11°.
Per differenza si trova β≈180°-60°-79,11°≈40,89°.

<u>Esempio F2.8:</u>
Risolvere il triangolo di cui siano noti i tre lati a=12, b=6, c=$6\sqrt{3}$.

Non conoscendo neanche un angolo si deve utilizzare per forza il teorema dei coseni.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \rightarrow \quad (12)^2 = (6)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 2(6)\left(6\sqrt{3}\right)\cos\alpha$$

$$144 = 36 + 36\cdot 3 - 72\sqrt{3}\cos\alpha \quad \rightarrow \quad 72\sqrt{3}\cos\alpha = 144 - 144 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Una volta trovato un angolo si può utilizzare indifferentemente il teorema dei seni o dei coseni.
In quest'ultimo esercizio, per cambiare, utilizziamo il teorema dei coseni. Il teorema dei seni comunque funzionerebbe.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \rightarrow \quad \left(6\sqrt{3}\right)^2 = (12)^2 + (6)^2 - 2(12)(6)\cos\gamma \quad \rightarrow \quad 36\cdot 3 = 144 + 36 - 144\cos\gamma$$

$$\rightarrow \quad 144\cos\gamma = 144 + 36 - 108 \quad \rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{72}{144} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \gamma = 60^\circ$$

E per differenza si trova β=180°-90°-60°=30°

Tutti questi teoremi possono essere utilizzati in casi concreti per determinare misure di angoli e distanze nel mondo reale. Nella sezione dedicata agli esercizi se ne presenteranno numerosi casi.