F1. Goniometria

F1.1 Misura degli angoli

GRADI

Si è abituati a misurare gli angoli in gradi. Il grado si indica con il simbolo °.
Esistono due modi differenti per indicare i sottomultipli del grado: la notazione decimale e la notazione con i gradi primi e secondi, detta notazione sessagesimale.

GRADI IN NOTAZIONE DECIMALE.
Si può scrivere un angolo come 13,75°, oppure 28,355°.

GRADI IN NOTAZIONE SESSAGESIMALE.
Un grado si divide in sessanta gradi primi. Il grado primo si indica con il simbolo ′.
Un primo si divide in sessanta gradi secondi. Il grado secondo si indica con il simbolo ″.
Si può scrivere un angolo come 103°34′12″, oppure 54°24′.

E′ importante saper trasformare un angolo con sottomultipli in notazione decimale in un angolo con sottomultipli indicati con primi e secondi e viceversa.

PASSAGGIO DA NOTAZIONE DECIMALE A NOTAZIONE SESSAGESIMALE.

Per passare da notazione decimale a notazione sessagesimale si utilizza la seguente proporzione:

(parte decimale) : (1 seguito da tanti zeri quanti i numeri della parte decimale) =(gradi secondi) : 3600.

per ottenere i gradi secondi e poi si deve scrivere il risultato in gradi primi e secondi.

Esempio F1.1:
Scrivere 13,75° in gradi primi e secondi.

Si scrive la proporzione indicata precedentemente:
75:100=x:3600.
x=(3600·75)/100=2700 secondi.
Per scrivere 2700 secondi in primi e secondi si divide per 60. Il quoziente della divisione indica i primi e il resto indica i gradi secondi.
2700:60=45 con il resto di 0.
Quindi 13,75°=13°45′.

Esempio F1.2:
Scrivere 28,355° in gradi primi e secondi.

Si scrive la proporzione indicata precedentemente:
355:1000=x:3600.
x=(3600·355)/1000=1278 secondi.
Per scrivere 1278 secondi in primi e secondi si divide per 60. Il quoziente della divisione indica i primi e il resto indica i gradi secondi.
1278:60=21 con il resto di 18.
Quindi 28,355°=28°21′18″.

PASSAGGIO DA NOTAZIONE SESSAGESIMALE A NOTAZIONE DECIMALE

Per trasformare gli angoli dalla notazione sessagesimale alla notazione decimale si determinano i gradi secondi e poi si utilizza la seguente formula:

parte decimale=gradi secondi/3600.

Esempio F1.3:
Scrivere 103°34′12″ in notazione decimale.

34′12″ sono 34·60+12=2052 secondi.
Utilizzando la formula precedente si ha:
x=2052/3600=0,57.
Quindi 103°34′12″=103,57°.

Esempio F1.4:
Scrivere 54°24′ in notazione decimale.

24′ sono 24·60=1440 secondi.
Utilizzando la formula precedente si ha:
x=1440/3600=0,4.
Quindi 54°24′=54,4°.

RADIANTI

Il radiante è una unità di misura degli angoli alternativa ai gradi. Un radiante vale poco meno di 60°.
Si consideri il raggio di una circonferenza e si riporti la misura del raggio sull'arco di circonferenza.
L'angolo che ne risulta ha la misura di un radiante.

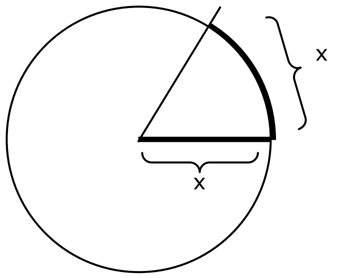


Fig. F1.1
Definizione di radiante.

Si ricorda che π (pi greco) vale circa 3,14.
Il perimetro di una circonferenza è $2\pi r$. Per ricoprire l'intera circonferenza serve 2π volte la lunghezza del raggio. Per ricoprire metà circonferenza serve quindi esattamente π volte la lunghezza del raggio. Un angolo di 180° è dunque equivalente a π radianti.

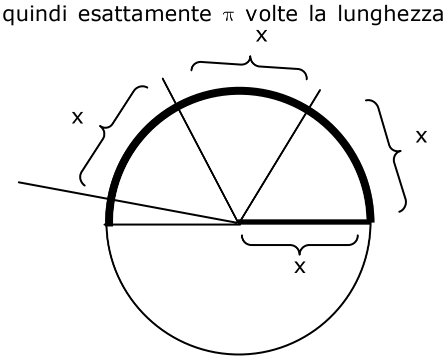


Fig. F1.2
Relazione tra gradi e radianti.

Da questo si ricava la seguente relazione:

$$180° = \pi \text{ rad}$$

Ossia ci vogliono circa 3,14 radianti per ottenere 180°.
Per trasformare un angolo da gradi (con la virgola) a radianti, o viceversa, si usa la seguente proporzione:

$$\boxed{\text{gradi} : 180° = \text{radianti} : \pi}$$

COME PASSARE DA GRADI A RADIANTI

Esempio F1.5:
Trasformare 120° in radianti.

Si utilizza la proporzione gradi : 180° = radianti : π.
120°:180°=radianti: π.

$$\text{radianti} = \frac{120 \cdot \pi}{180} = \frac{2}{3}\pi \,.$$

Esempio F1.6:
Trasformare 67,5° in radianti.

Si utilizza la proporzione gradi : 180° = radianti : π.
67,5°:180°=radianti: π.

$\text{radianti} = \frac{67,5 \cdot \pi}{180} = \frac{3}{8}\pi$.

COME PASSARE DA RADIANTI A GRADI

Esempio F1.7:

Trasformare $\frac{3}{2}\pi$ in gradi.

Si utilizza la proporzione gradi : 180° = radianti : π.

$\text{gradi} : 180° = \frac{3}{2}\pi : \pi$.

$\text{gradi} = \left(180° \cdot \frac{3}{2}\pi\right) : \pi = 270°$.

Esempio F1.8:

Trasformare $\frac{1}{4}\pi$ in gradi.

Si utilizza la proporzione gradi : 180° = radianti : π.

$\text{gradi} : 180° = \frac{1}{4}\pi : \pi$.

$\text{gradi} = \left(180° \cdot \frac{1}{4}\pi\right) : \pi = 45°$.

F1.2 Definizione delle funzioni goniometriche

SENO e COSENO

Si prende la circonferenza che ha centro l'origine degli assi e raggio 1. Tale circonferenza viene indicata con il nome di **circonferenza goniometrica**, ed ha equazione $x^2+y^2=1$
Si traccia una semiretta che forma con l'asse delle x un angolo α.
Dal punto in cui tale semiretta incontra la circonferenza si traccia un segmento verticale fino a toccare l'asse x e un segmento orizzontale fino a toccare l'asse y.
Il **seno** è la lunghezza del segmento verticale, il **coseno** è la lunghezza del segmento orizzontale.

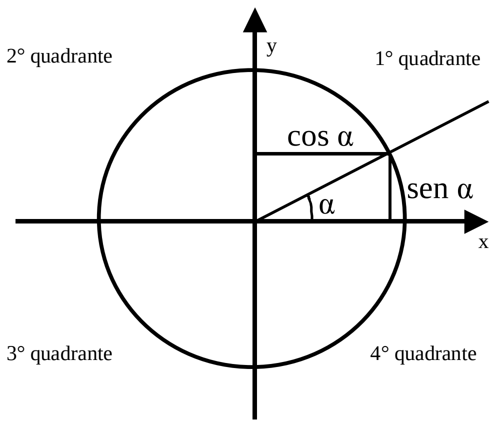


Fig. F1.3
Definizione di seno e coseno.

Al variare dell'angolo varia anche la lunghezza di questi segmenti. Per ogni angolo compreso tra 0° e 360° è possibile trovare la lunghezza del seno e del coseno.
Per comprendere il significato di seno e coseno vengono adesso presentati alcuni esempi per il calcolo di seno e coseno per gli angoli 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 240°.

α=0°

Se α=0° il segmento verticale ha lunghezza 0, il segmento orizzontale è lungo come il raggio, ossia 1.
Quindi sen(0°)=0 e cos(0°)=1.

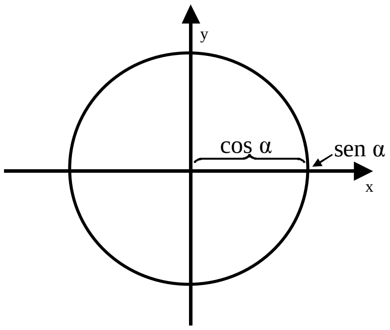


Fig. F1.4
Seno e coseno per α=0°.

α=90°

Se l'angolo è 90° il segmento verticale è lungo come il raggio, ossia 1 e il segmento orizzontale ha lunghezza 0. Quindi sen(90°)=1 e cos(90°)=0.

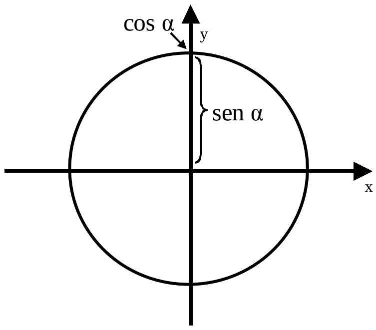


Fig. F1.5
Seno e coseno per α=90°.

α=30°

Se l'angolo è 30° allora il triangolo OPP' in figura F1.6 è equilatero, in quanto ha tutti gli angoli di 60°. Anche i lati sono tutti uguali, ed essendo lunghi come il raggio hanno lunghezza 1. Il seno è la metà del lato del triangolo equilatero, ossia la metà di 1. Da ciò segue che sen(30°)= $\frac{1}{2}$. Per trovare il coseno si può applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPA.

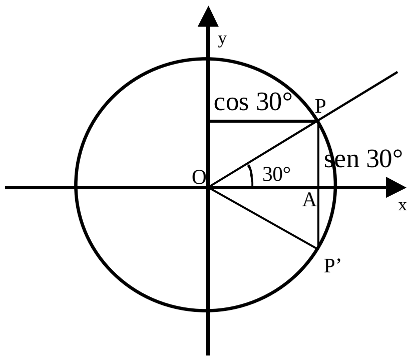


Fig. F1.6
Seno e coseno per α=30°.

$$\cos 30° = OA = \sqrt{OP^2 - PA^2} = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Pertanto si ha:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α=45°

Se l'angolo è 45° allora PA=PB=OA=OB. Ossia sen(45°)=cos(45°).
Si indica con x=PA=PB=OA=OB. Si sa che OP=raggio=1. Si applichi il teorema di Pitagora al triangolo OPA.

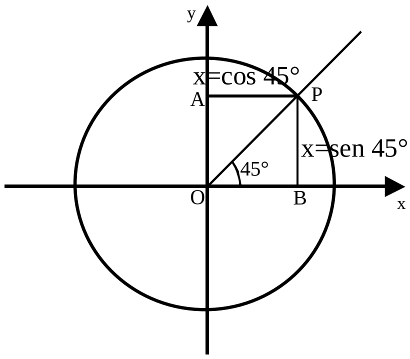


Fig. F1.7
Seno e coseno per α=45°.

$x^2 + x^2 = 1$
$2x^2 = 1$
$x^2 = \frac{1}{2}$
$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pertanto si ha:
$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

α=60°

Se l'angolo è 60° allora il triangolo tracciato OPP' è equilatero, in quanto ha tutti gli angoli uguali di 60°. Anche i lati sono tutti uguali, ed essendo lunghi come il raggio hanno lunghezza 1. Il coseno è la metà del lato del triangolo equilatero, ossia la metà di 1. Da ciò segue che cos(60°)= $\frac{1}{2}$. Per trovare il seno si può applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPA.

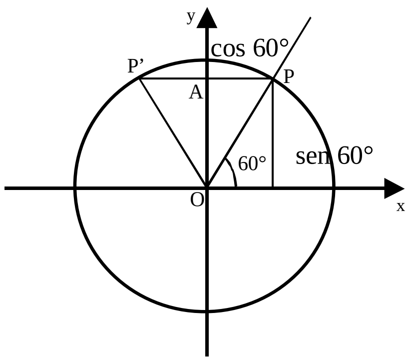


Fig. F1.8
Seno e coseno per α=60°.

$\text{sen}60° = OA = \sqrt{OP^2 - PA^2} = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pertanto si ha:
$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 60° = \frac{1}{2}$

PER MOLTI ALTRI ANGOLI BASTA RIFERIRSI AGLI ESEMPI APPENA VISTI. A titolo esemplificativo si calcolano seno e coseno di 240°, ma i ragionamenti appena visti permettono di calcolare seno e coseno per tutti gli angoli multipli di 30° e 45°.

α=240°

Se l'angolo è 240° allora la lunghezza del seno è uguale a quella del seno di 60°, e anche la lunghezza del coseno è uguale a quella del coseno di 60°, però il segmento verticale è SOTTO l'asse x, quindi va considerato negativo. Il segmento orizzontale è A SINISTRA dell'asse y, quindi è considerato negativo.

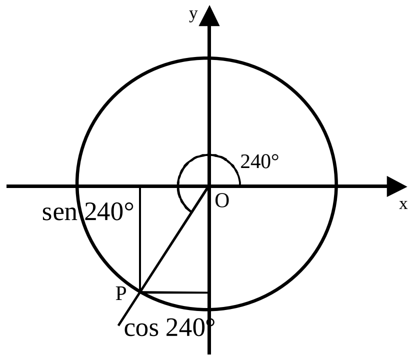


Fig. F1.9
Seno e coseno per α=240°.

$\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $\text{sen}\,240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos 240° = -\frac{1}{2}$

SI CONCLUDE CON LE SEGUENTI IMPORTANTI OSSERVAZIONI:

OSSERVAZIONE 1: Il triangolo formato da seno, coseno e raggio è un triangolo rettangolo, quindi si può applicare ad esso il teorema di Pitagora. I cateti sono il seno e il coseno. L'ipotenusa è il raggio della circonferenza che ha lunghezza 1. Da ciò si ottiene la PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA.

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

OSSERVAZIONE 2: Il segno del seno è positivo se il segmento si trova sopra l'asse x, negativo se si trova sotto l'asse x. Il segno del coseno è positivo se il segmento si trova a destra dell'asse y, negativo se si trova a sinistra dell'asse y.

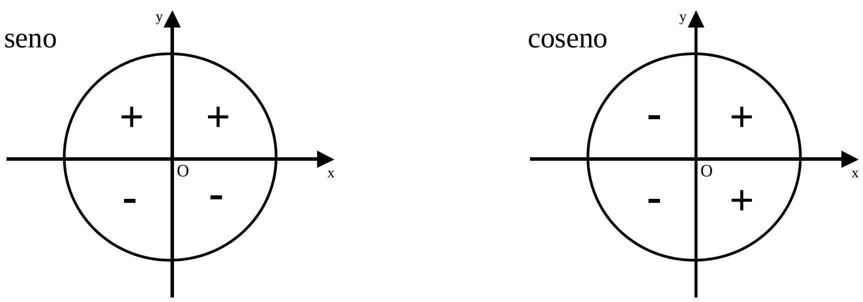


Fig. F1.10
Segno di seno e coseno.

TANGENTE e COTANGENTE

Ci si riferisce sempre alla circonferenza di centro l'origine degli assi e raggio 1.
Si tracciano la retta verticale x=1 e la retta orizzontale y=1.
La semiretta che delimita l'angolo incontra queste due rette rispettivamente in due punti P e P'.
Il segmento AP è la tangente. Il segmento BP' è la cotangente.

N.B.: LA TANGENTE è SEMPRE SULLA RETTA VERTICALE **x=1**.
LA COTANGENTE è SEMPRE SULLA RETTA ORIZZONTALE **y=1**.
NON SONO MAI SULLA RETTA x=-1 o y=-1!!

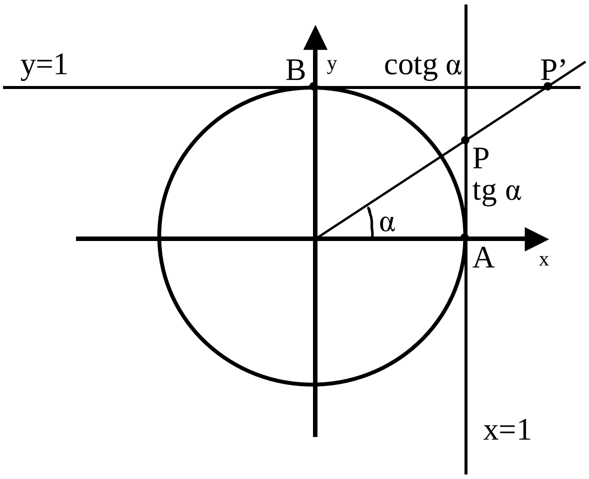


Fig. F1.11
Definizione di tangente e cotangente.

Per calcolare la **tangente** si utilizza il seguente ragionamento:
Siano CO=cosα, DC=senα, PA=tgα, AO=1.
I triangoli ODC e OPA sono simili, quindi hanno i lati in proporzione tra loro.
Quindi PA:AO=DC:CO.
Ossia tgα:1=senα:cosα.

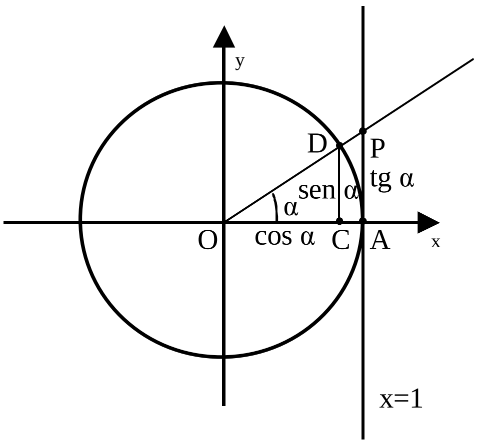


Fig. F1.12
Calcolo della tangente.

Per calcolare la **cotangente** il ragionamento è analogo:
Siano DE=cosα, EO=senα, P'B=tgα, BO=1.
I triangoli ODE e OP'B sono simili, quindi hanno i lati in proporzione tra loro.
Quindi P'B:BO=DE:EO.
Ossia cotgα:1=cosα:senα.

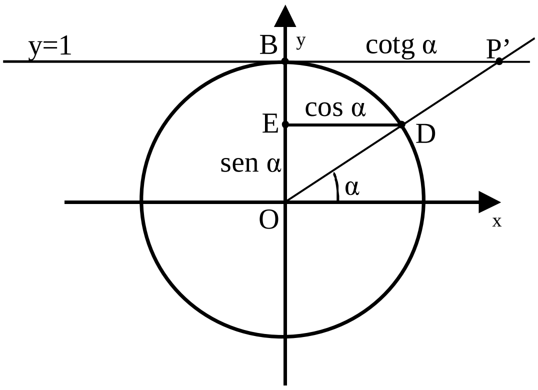


Fig. F1.13
Calcolo della cotangente.

Si è ottenuta lin questo modo la SECONDA RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}} \qquad \boxed{cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}} \qquad \text{da cui si ha} \qquad \boxed{tg\alpha = \frac{1}{cotg\alpha}} \text{ e } \boxed{cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}}$$

I **segni** per tangente e cotangente sono i seguenti:

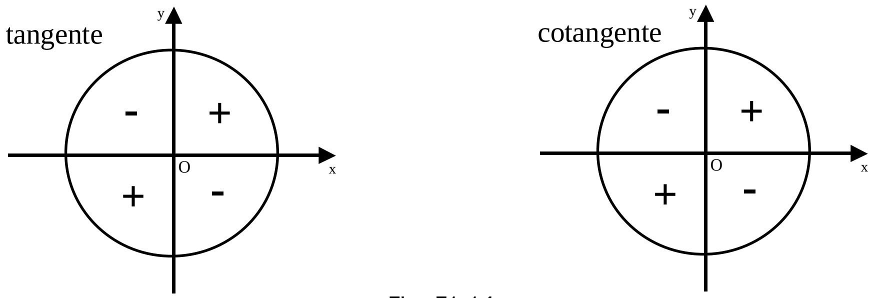


Fig. F1.14
Segni di tangente e cotangente.

Ora si calcolano i valori di tangente e cotangente per gli angoli 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°.

α=0°

Se l'angolo è 0° il segmento verticale ha lunghezza 0. La tangente è quindi 0. La retta dell'angolo è parallela alla retta y=1 e quindi non si riesce a trovare il punto P'. La cotangente quindi non esiste.

Infatti, utilizzando la seconda relazione fondamentale si ha:

$$tg0° = \frac{sen0°}{cos0°} = \frac{0}{1} = 0$$
$$cotg0° = \frac{cos0°}{sen0°} = \frac{1}{0} \text{ ? la cotangente non esiste.}$$

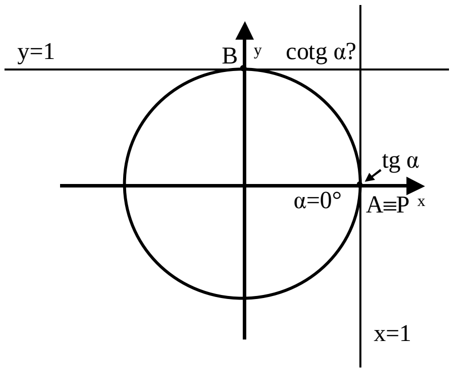


Fig. F1.15
Tangente e cotangente di α=0°.

α=90°

Se l'angolo è 90° il segmento orizzontale ha lunghezza 0. La cotangente è quindi 0. La retta dell'angolo è parallela alla retta x=1 e quindi non si riesce a trovare il punto P. La tangente quindi non esiste.

Infatti

$$tg90° = \frac{sen90°}{cos90°} = \frac{1}{0} \text{ ? la tangente non esiste}$$
$$cotg90° = \frac{cos90°}{sen90°} = \frac{0}{1} = 0$$

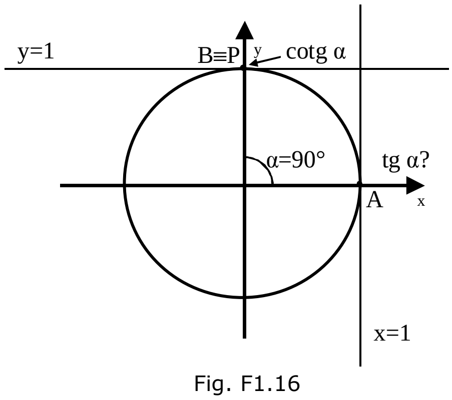


Fig. F1.16
Tangente e cotangente di α=90°.

α=30°

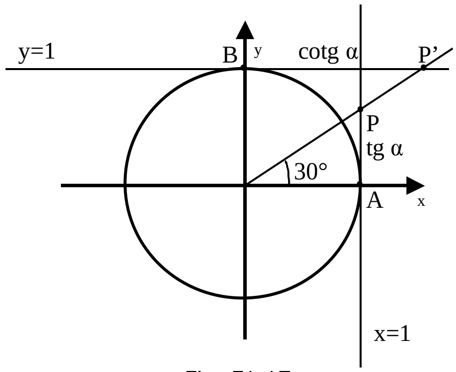


Fig. F1.17
Tangente e cotangente di α=30°.

Utilizzando la seconda relazione fondamentale della trigonometria si ottiene:

$$tg30° = \frac{sen30°}{cos30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad cotg30° = \frac{cos30°}{sen30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

α=60°

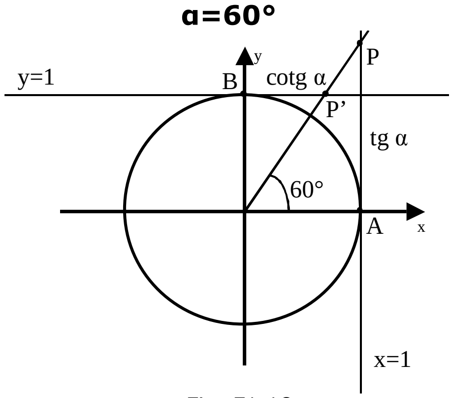


Fig. F1.18
Tangente e cotangente di α=60°.

$$tg60° = \frac{sen60°}{cos60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \qquad cotg60° = \frac{cos60°}{sen60°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

α=45°

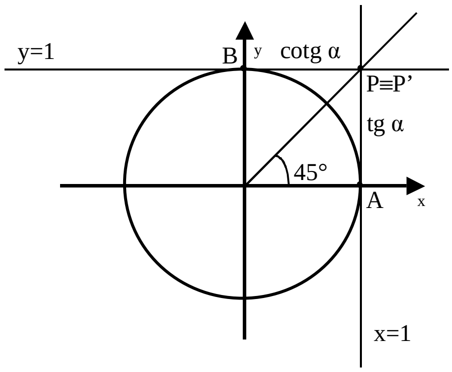


Fig. F1.19
Tangente e cotangente di α=45°.

$$tg45° = \frac{sen45°}{cos45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 \qquad cotg45° = \frac{cos45°}{sen45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

α=120° (è importante capire il disegno)

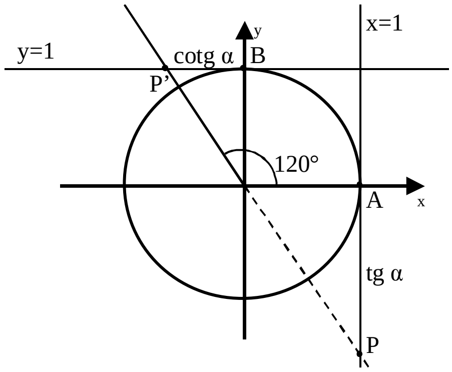


Fig. F1.20
Tangente e cotangente di α=120°.

$$tg120° = \frac{sen120°}{cos120°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{1} = -\sqrt{3}$$

$$cotg120° = \frac{cos120°}{sen120°} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

PRIMA DI PROSEGUIRE COMPLETARE LA SEGUENTE TABELLA:
Utilizzare i metodi visti fin qui. Per le celle (1) usare la calcolatrice scientifica.
Per le celle (2) usare le formule dei prossimi paragrafi di bisezione e duplicazione.
Le celle * sono state svolte come esempi nelle pagine precedenti.

ANGOLO IN GRADI	ANGOLO IN RADIANTI	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE
0°		*	*	*	*
10°		(1)	(1)	(1)	(1)
15°		$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18° simmetria di 72°		$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	(2)	(2)	(2)
22°30' metà di 45°		$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	(2)	(2)	(2)
30°		*	*	*	*
36°		$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
45°		*	*	*	*
50°		(1)	(1)	(1)	(1)
54° simmetria da 36°					
60°		*	*	*	*
72° doppio di 36°					
75° simmetria da 15°					
90°		*	*	*	*
120°				*	*
135°					
150°					
160°		(1)	(1)	(1)	(1)

180°					
200°		(1)	(1)	(1)	(1)
210°					
225°					
240°		*	*		
270°					
300°					
315°					
330°					
360°		*	*	*	*

F1.3 Archi associati

Utilizzando le simmetrie è possibile trovare il valore di seno, coseno, tangente e cotangente anche per angoli che non si trovano nel primo quadrante.

-α

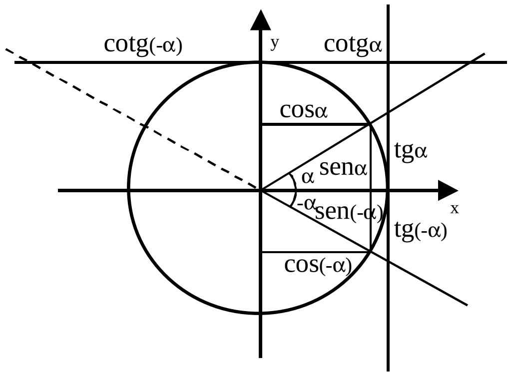


Fig. F1.21
Archi associati: -α.

Si vede in figura F1.21 che la lunghezza dei segmenti senα e sen(-α) sono uguali, e così anche cosα e cos(-α), tgα e tg(-α) e cotgα e cotg(-α). Prestando attenzione ai segni si ottiene:

sen(-α) = -senα   cos(-α) = cosα
tg(-α) = -tgα   cotg(-α) = -cotgα

180°-α

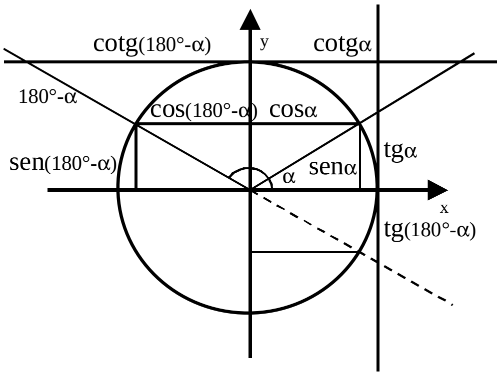


Fig. F1.22
Archi associati: 180°-α.

Si vede in figura F1.22 che la lunghezza dei segmenti senα e sen(180°-α) sono uguali, e così anche cosα e cos(180°-α), tgα e tg(180°-α) e cotgα e cotg(180°-α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(180°-α) = senα   cos(180°--α) = -cosα
tg(180°--α) = -tgα   cotg(180°--α) = -cotgα

180°+α

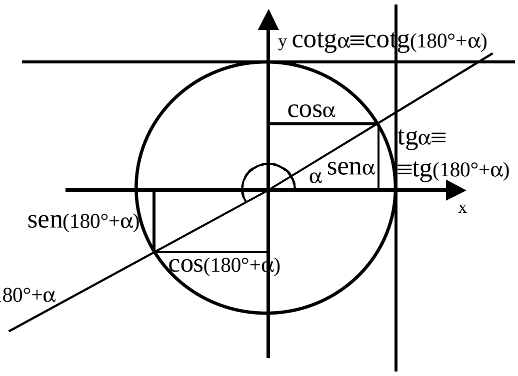


Fig. F1.23
Archi associati: 180°+α.

Si vede in figura F1.23 che la lunghezza dei segmenti senα e sen(180°+α) sono uguali, e così anche cosα e cos(180°+α), tgα e tg(180°+α) e cotgα e cotg(180°+α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(180°+α) = -senα   cos(180°+α) = -cosα
tg(180°+α) = tgα   cotg(180°+α) = cotgα

360°-α

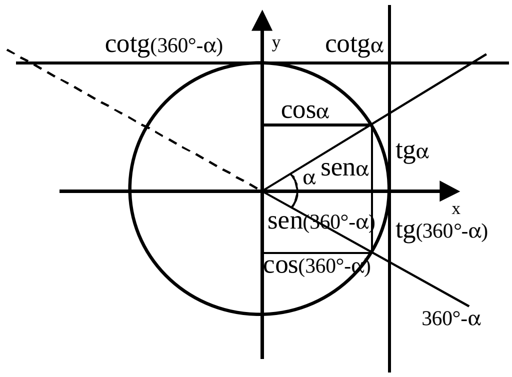


Fig. F1.24
Archi associati: 360°-α.

Si vede in figura F1.24 che la lunghezza dei segmenti senα e sen(360°-α) sono uguali, e così anche cosα e cos(360°-α), tgα e tg(360°-α) e cotgα e cotg(360°-α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(360°-α) = -senα   cos(360°-α) = cosα
tg(360°-α) = -tgα   cotg(360°-α) = -cotgα

90°-α

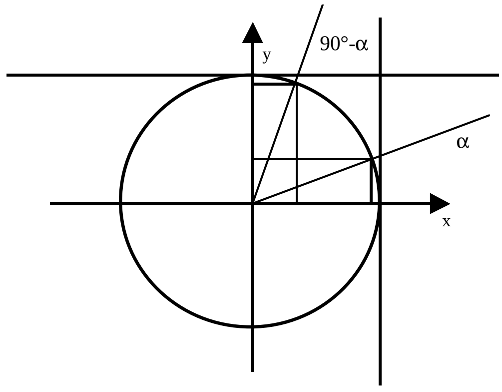


Fig. F1.25
Archi associati: 90°-α.

Si vede in figura F1.25 che la lunghezza dei segmenti senα e cos(90°-α) sono uguali, e così anche cosα e sen(90°-α), tgα e cotg(90°-α) e cotgα e tg(90°-α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(90°-α) = cosα cos(90°-α) = senα
tg(90°-α) = cotgα cotg(90°-α) = tgα

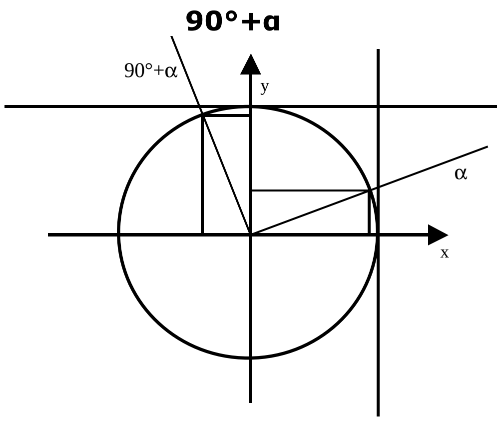


Fig. F1.26
Archi associati: 90°+α.

Si vede in figura F1.26 che la lunghezza dei segmenti senα e cos(90°+α) sono uguali, e così anche cosα e sen(90°+α), tgα e cotg(90°+α) e cotgα e tg(90°+α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(90°+α) = cosα cos(90°+α) = -senα
tg(90°+α) = -cotgα cotg(90°+α) = -tgα

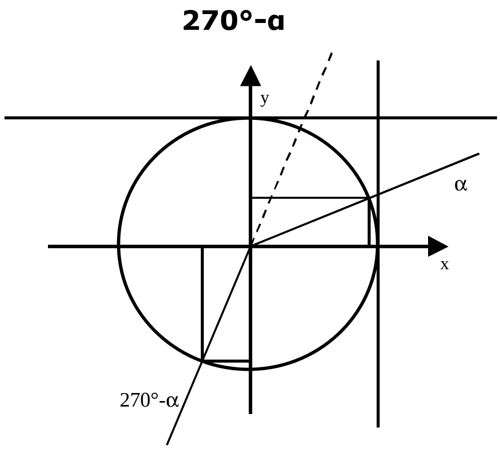


Fig. F1.27
Archi associati: 270°-α.

Si vede in figura F1.27 che la lunghezza dei segmenti senα e cos(270°-α) sono uguali, e così anche cosα e sen(270°-α), tgα e cotg(270°-α) e cotgα e tg(270°-α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(270°-α) = -cosα cos(270°-α) = -senα
tg(270°-α) = cotgα cotg(270°-α) = tgα

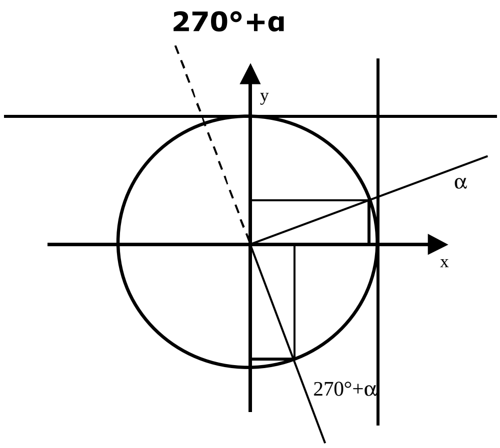


Fig. F1.28
Archi associati: 270°+α.

Si vede in figura F1.28 che la lunghezza dei segmenti senα e cos(270°+α) sono uguali, e così anche cosα e sen(270°+α), tgα e cotg(270°+α) e cotgα e tg(270°+α). Prestando attenzione ai segni si ha:
sen(270°+α) = -cosα cos(270°+α) = senα
tg(270°+α) = -cotgα cotg(270°+α) = -tgα

F1.4 Grafici delle funzioni goniometriche

Si può vedere il seno come una FUNZIONE, ossia come una regola che ad ogni angolo associa un numero. Possiamo considerare la x come angolo e la y come il valore del seno e si ha, utilizzando la calcolatrice:

x (gradi)	y=senx	x (gradi)	y=senx	x (gradi)	y=senx	x (gradi)	y=senx
0	0,00						
10	0,17	100	0,98	190	-0,17	280	-0,98
20	0,34	110	0,94	200	-0,34	290	-0,94
30	0,50	120	0,87	210	-0,50	300	-0,87
40	0,64	130	0,77	220	-0,64	310	-0,77
50	0,77	140	0,64	230	-0,77	320	-0,64
60	0,87	150	0,50	240	-0,87	330	-0,50
70	0,94	160	0,34	250	-0,94	340	-0,34
80	0,98	170	0,17	260	-0,98	350	-0,17
90	1,00	180	0,00	270	-1,00	360	0,00

Tutti queste coppie di valori possono essere viste come punti sul piano cartesiano, ossia (0;0), (10;0,17), (20;0,34) ecc. Si ottiene il grafico in figura F1.29. In realtà il grafico continua indefinitamente sia verso destra che verso sinistra.

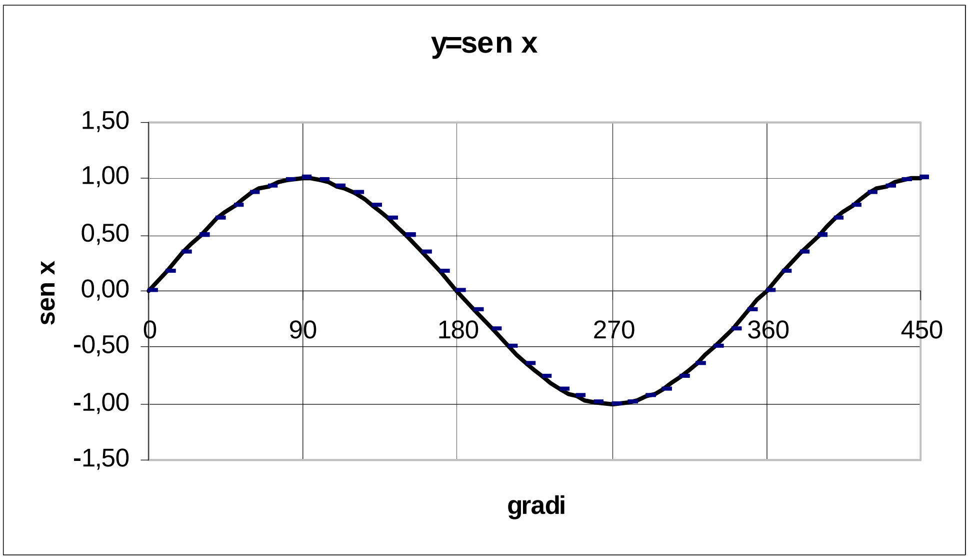


Fig. F1.29
Grafico di y=senx.

E' possibile fare la stessa cosa anche per le funzioni coseno, tangente e cotangente, e si lascia ciò per esercizio.

F1.5 Formule

Oltre alle relazioni fondamentali della goniometria esistono molte altre formule di cui non viene data la dimostrazione.

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:
$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cdot\cos\alpha$
$\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cdot\cos\alpha$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$$

$$\text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$$

Esempio F1.9:
Trovare il seno dell'angolo 105° sapendo che 105°=60°+45° e conoscendo il seno e il coseno di 60° e 45°.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(105°)=\operatorname{sen}(60°+45°)=\operatorname{sen}60°\cdot\cos45°+\operatorname{sen}45°\cdot\cos60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE:
$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$$\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Esempio F1.10:

Trovare il coseno dell'angolo 72° sapendo che è il doppio di 36° e conoscendo $\operatorname{sen}(36°)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ e $\cos(36°)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\cos(72°)=\cos^2(36°)-\operatorname{sen}^2(36°)=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{5+1+2\sqrt{5}-10+2\sqrt{5}}{16}=\frac{4+4\sqrt{5}}{16}=\frac{\cancel{4}(1+\sqrt{5})}{\cancel{16}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

FORMULE DI BISEZIONE:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Esempio F1.11:

Trovare la tangente dell'angolo 15° sapendo che è la metà di 30° e sapendo che $\cos(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\qquad \operatorname{tg}(15°)=\sqrt{\frac{1-\cos30°}{1+\cos30°}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{4+3-4\sqrt{3}}{4-3}}=\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

(si è utilizzata la formula dei radicali doppi).

FORMULE PARAMETRICHE (si usano per la risoluzione delle equazioni lineari come si vedrà più avanti)
$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}\qquad \text{in cui } t=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

FORMULE DI PROSTAFERESI
$$\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER

$\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

$\text{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)\right]$

F1.6 Equazioni goniometriche

Si dicono equazioni goniometriche le equazioni contenenti funzioni goniometriche nelle quali l'incognita è l'angolo.

IDENTITA' GONIOMETRICHE
Una identità goniometrica è una uguaglianza sempre verificata per qualunque valore degli angoli.
Per verificare una identità si deve mostrare che primo e secondo membro sono uguali.

Esempio F1.12:

Verificare la seguente identità: $\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1-\text{tg}\alpha} = (1+\text{tg}\alpha)\cos^2\alpha$

Prima si razionalizza, poi si sostituisce al posto di $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e poi ci sono da svolgere alcuni passaggi algebrici.

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1-\text{tg}\alpha}\cdot\frac{1+\text{tg}\alpha}{1+\text{tg}\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)(1+\text{tg}\alpha)}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)(1+\text{tg}\alpha)}{1-\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)(1+\text{tg}\alpha)}{\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)(1+\text{tg}\alpha)\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} = (1+\text{tg}\alpha)\cos^2\alpha$$

Non tutti gli esercizi si svolgono nello stesso modo, spesso bisogna trovare la strada giusta.
E' necessario spesso usare le relazioni fondamentali della goniometria:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e $\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$.

EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI
Sono le equazioni del tipo: senx=a, cosx=a, tgx=a, cotgx=a.

Esempio F1.13

Risolvere l'equazione goniometrica $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

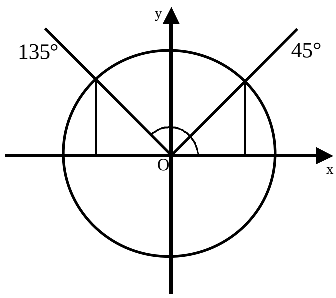


Fig. F1.30
Risoluzione dell'equazione $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si devono trovare tutti gli angoli per cui il seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Consultando la tabella si trova che i valori degli angoli cercati sono 45° e 135°. Però anche altri infiniti angoli hanno seno che vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ad esempio –225°, -315°, 405°, 495°, ecc. In pratica a partire da una delle due soluzioni facendo un numero arbitrario di giri troviamo tutte le altre soluzioni. Per trovare TUTTE le soluzioni si scrive:

$$\boxed{\text{x=una soluzione +k·periodo}}$$

Nel nostro caso le soluzioni sono due e il periodo del seno è 360°, quindi si ha:
$x_1=45°+k360°$ $x_2=135°+k360°$

Esempio F1.14:
Risolvere l'equazione goniometrica $\cos x = 0$.

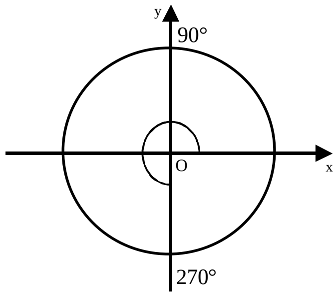


Fig. F1.31
Risoluzione dell'equazione cosx=0.

Si devono trovare tutti gli angoli per cui il coseno vale 0.
Consultando la tabella si trova che i valori degli angoli sono 90° e 270°. Però anche altri angoli, infiniti, hanno coseno che vale 0.
Ad esempio –270°, -90°, 450°, 630°, 810°, 990°, ecc.
A partire da una delle due soluzioni facendo un numero arbitrario di giri troviamo tutte le altre soluzioni.
Nel nostro caso la soluzione è una ed ha periodo 180°, quindi si ha:
x=90°+k180°.

Esempio F1.15:
Risolvere l'equazione $\mathrm{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

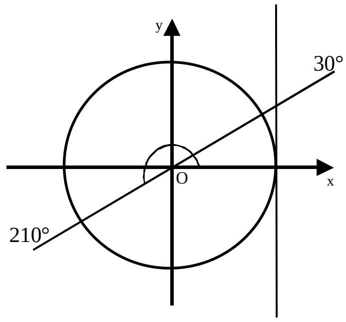


Fig. F1.32
Risoluzione dell'equazione $\mathrm{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Si devono trovare gli angoli per cui la tangente vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Consultando la tabella si trova che i valori degli angoli sono 30° e 210°. Però anche altri angoli hanno tangente che vale $+\frac{\sqrt{3}}{3}$, come 390°, 570° eccetera.
Nel nostro caso la soluzione è una e ha periodo 180°, quindi si ha:
x=30°+k180°.

Esempio F1.16:
Risolvere l'equazione $\mathrm{sen}x = 0{,}4$.

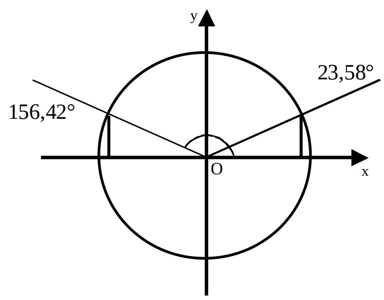


Fig. F1.33
Risoluzione dell'equazione $\mathrm{sen}x = 0{,}4$.

Si devono trovare gli angoli per cui il seno vale 0,4.
Non essendoci nella tabella angoli con seno 0,4 si deve usare la calcolatrice (tasto sen^{-1}). Si ottiene x=23,58°. Le soluzioni sono due (per simmetria), ossia x_1=23,58° e x_2=156,42°, entrambe con periodo 360°.
Si ottengono le due soluzioni seguenti:
$x_1 \cong 23,58° + k360°$ e $x_2 \cong 156,42° + k360°$.

EQUAZIONI RICONDUCIBILI AD ELEMENTARI

Utilizzando dei passaggi algebrici, oppure utilizzando le formule dei paragrafi precedenti è possibile trasformare in equazioni elementari delle equazioni che elementari non sono.

Esempio F1.17:
Risolvere l'equazione $\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Fig. F1.34
Risoluzione dell'equazione $\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Il seno di un angolo α è uguale al seno dell'angolo π-α, come già si è visto negli angoli associati. Quindi ci sono due possibilità: il primo angolo è uguale al secondo oppure il primo angolo è uguale a π meno il secondo.

1) $2x = x - \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2}$

2) $2x = \pi - x + \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad 3x = 3\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$

Quindi la soluzione è $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Esempio F1.18:
Risolvere l'equazione sen(3x)=1.

Il seno vale 1 se l'angolo è 90°+k360°, da cui:
3x=90°+k360° → x=30°+k120°.

Esempio F1.19:
Risolvere l'equazione senx=-cosx.

Il senα è uguale a -cosα (dalla tabella) se glia angoli sono 135° e 315°.
La soluzione è quindi x=135°+k180°.

Esempio F1.20:
Risolvere l'equazione $\operatorname{tg}x = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

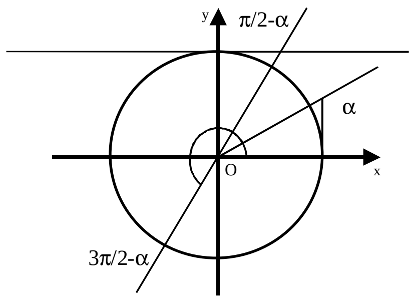


Fig. F1.35
Risoluzione dell'equazione $\operatorname{tg}x = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

La tangente tgα è uguale alla cotangente di β cotgβ se β=π/2-α+kπ.
Nel nostro caso si ha:
$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad \rightarrow \quad x + x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{8}\pi + \frac{k}{2}\pi.$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE

Una equazione è detta algebrica se vi appare solo una funzione goniometrica e, mettendo al posto di essa una incognita, si ottiene un'equazione di secondo, terzo grado, eccetera, risolvibile con i metodi già visti.

Esempio F1.21:
Risolvere l'equazione $\cos^2 x - \cos x = 0$.
Si raccoglie cosx.
$\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$

Si devono risolvere quindi le equazioni elementari $\cos x = 0$ e $\cos x - 1 = 0$

1) $\cos x = 0$ $\quad x_1 = 90° + k180°$
2) $\cos x = 1$ $\quad x_2 = 0° + k360°$

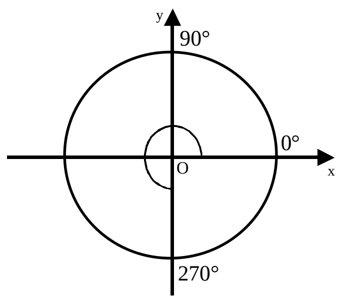


Fig. F1.36
Risoluzione dell'equazione $\cos^2 x - \cos x = 0$.

Esempio F1.22:
Risolvere l'equazione $2\mathrm{sen}^2 x - 3\mathrm{sen}x + 1 = 0$.
E' una equazione di secondo grado con incognita senx.

$$\mathrm{sen}_{1,2}x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \begin{cases} = \dfrac{3+1}{4} = 1 \\ = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si devono quindi risolvere le due equazioni senx=1 e $\mathrm{sen}x = \frac{1}{2}$.

1) sen x=1 $\quad x_1 = 90° + k360°$
2) senx=1/2 $\quad x_2 = 30° + k360°$ e $x_3 = 150° + k360°$

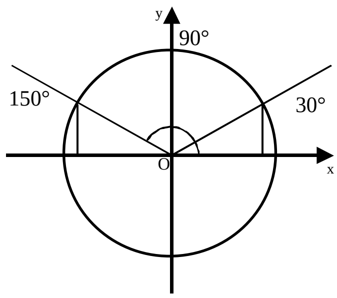


Fig. F1.37
Risoluzione dell'equazione $2\mathrm{sen}^2 x - 3\mathrm{sen}x + 1 = 0$.

Esempio F1.23:
Risolvere l'equazione $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$.
E' un'equazione di secondo grado con incognita cosx.

$$\cos_{1,2} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Si devono risolvere le due equazioni cosx=2 e cosx=-1
E' impossibile che il coseno valga 2!
L'unica soluzione si trova quindi da cosx=-1.
$x = 180° + k360°$

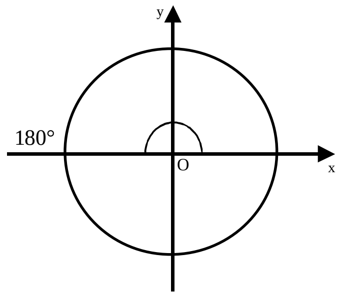


Fig. F1.38
Risoluzione dell'equazione $\cos^2 x$-cosx-2=0.

EQUAZIONI LINEARI IN SENO E COSENO

Le equazioni lineari sono equazioni di primo grado; ciò significa che seno e coseno avranno solo esponente 1.
Saranno quindi equazioni del tipo:

$$\boxed{a\,\text{sen}x+b\cos x=c}$$

N.B. il procedimento descritto nei prossimi esempi non permette di trovare le soluzioni x=180°+k360° che vanno quindi verificate a parte.

Per risolverle si utilizzano le formule parametriche:

$\text{sen}\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad\text{tg}\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$ $\quad$ in cui $t=\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Esempio F1.24:
Risolvere l'equazione $\text{sen}x-\sqrt{3}\cos x=1$.

Si sostituiscono al posto di seno e coseno le espressioni delle formule parametriche e si risolve trovando la t.

$$\frac{2t}{1+t^2}-\sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2}=1 \quad\to\quad \frac{2t-\sqrt{3}+\sqrt{3}t^2=1+t^2}{\cancel{1+t^2}} \quad\to\quad \sqrt{3}t^2-t^2+2t-1-\sqrt{3}=0 \quad\to\quad \left(\sqrt{3}-1\right)t^2+2t-1-\sqrt{3}=0$$

$a=\sqrt{3}-1 \qquad b=2 \qquad c=-1-\sqrt{3}$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\left(\sqrt{3}-1\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\left(-\sqrt{3}-3+1+\sqrt{3}\right)}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\cancel{2}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$t_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=1$$

$$t_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{-\sqrt{3}-1-3-\sqrt{3}}{3-1}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(-2-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}=-2-\sqrt{3}$$

Si tratta quindi di risolvere le due equazioni:

1) $\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)=1 \quad\to\quad \dfrac{x}{2}=45^\circ+k180^\circ \quad\to\quad x_1=90^\circ+k360^\circ$

\- Si vede dalla tabella che la tangente è 1 se l'angolo è 45° -

2) $\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)=-2-\sqrt{3} \quad\to\quad \dfrac{x}{2}=105^\circ+k180^\circ \quad\to\quad x_2=210^\circ+k360^\circ$

\- Nella tabella c'è scritto che la tangente vale $2+\sqrt{3}$ se l'angolo è 75°.
Per simmetria vale $-2-\sqrt{3}$, come si vede in figura F1.39, se l'angolo è –75°, ossia se è 105°

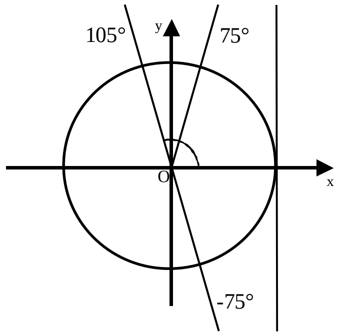


Fig. F1.39
Risoluzione dell'equazione $\text{sen}x-\sqrt{3}\cos x=1$.

EQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

Una equazione è detta omogenea in seno e coseno se tutti i termini vi appaiono sempre con lo stesso esponente.
Si vedranno tre esempi. Nel primo esempio vedremo una equazione omogenea di primo grado, nel secondo una equazione omogenea di secondo grado e nel terzo un'equazione riconducibile ad una omogenea di secondo grado.
Il procedimento è il seguente:
SE SI PUO' SCOMPORRE IN FATTORI lo si fa, e ci si riconduce ad equazioni elementari.
SE NON SI PUO' SCOMPORRE IN FATTORI si divide tutto per cosx (se è di primo grado) o per $\cos^2 x$ (se è di secondo grado), ecc. In questo modo rimane come unica incognita la tangente.

N.B. il procedimento non permette di trovare i risultati x=90°+k360° e x=270°+k360° che vanno quindi verificati a parte.

Esempio F1.25:
Risolvere l'equazione senx+cosx=0.

E' omogenea perché tutti i termini sono di primo grado.
Si noti che senx+cosx=1 non è omogenea perché 1 è un termine di grado zero e non di grado 1!

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}=0 \quad\rightarrow\quad \operatorname{tg}x+1=0 \quad\rightarrow\quad \operatorname{tg}x=-1 \quad\rightarrow\quad x=135^\circ+k180^\circ .$$

Esempio F1.26:
Risolvere l'equazione $3\operatorname{sen}^2 x+\left(\sqrt{3}-3\right)\operatorname{sen}x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

E' omogenea perché tutti i termini sono di secondo grado. Si divide tutto per $\cos^2 x$ e si ottiene una equazione di secondo grado con incognita tgx.

$$3\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}+\left(\sqrt{3}-3\right)\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x}-\sqrt{3}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$3\operatorname{tg}^2 x+\left(\sqrt{3}-3\right)\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$$

$$\operatorname{tg}_{1,2}x=\frac{-\sqrt{3}+3\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2-4(3)\left(-\sqrt{3}\right)}}{2(3)}=\frac{-\sqrt{3}+3\pm\sqrt{3+9-6\sqrt{3}+12\sqrt{3}}}{2(3)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{3}+3\pm\sqrt{3+9+6\sqrt{3}}}{2(3)}=\frac{-\sqrt{3}+3\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}}{6}=\frac{-\sqrt{3}+3\pm\left(\sqrt{3}+3\right)}{6}$$

$$\operatorname{tg}_1 x=\frac{-\sqrt{3}+3+\left(\sqrt{3}+3\right)}{6}=\frac{6}{6}=1 \quad\rightarrow\quad x_1=45^\circ+k180^\circ$$

$$\operatorname{tg}_2 x=\frac{-\sqrt{3}+3-\left(\sqrt{3}+3\right)}{6}=\frac{-2\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad\rightarrow\quad x_2=150^\circ+k180^\circ$$

Esempio F1.27:
Risolvere l'equazione $2\operatorname{sen}^2 x+\left(-\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen}x\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x=1$.

Non è omogenea perché 1 non è di secondo grado!
Al posto di 1 possiamo però scrivere, per la prima relazione fondamentale della goniometria, $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$.
Poi si deve riscrivere l'equazione e riordinarla, dividere tutto per $\cos^2 x$ e così si ottiene una equazione di secondo grado con incognita tgx.

$$2\operatorname{sen}^2 x+\left(-\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen}x\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x=1$$

$$2\operatorname{sen}^2 x+\left(-\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen}x\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$$

$$2\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x+\left(-\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen}x\cos x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x-\cos^2 x=0$$

$$\operatorname{sen}^2 x+\left(-\sqrt{3}-1\right)\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}+\left(-\sqrt{3}-1\right)\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x}+\sqrt{3}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$\operatorname{tg}^2 x+\left(-\sqrt{3}-1\right)\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0$$

$$\operatorname{tg}_{1,2}x=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{\left(-\sqrt{3}-1\right)^2-4(1)\left(\sqrt{3}\right)}}{2(1)}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$$\operatorname{tg}_1 x=\frac{\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \quad\rightarrow\quad x_1=60^\circ+k180^\circ$$

$$\operatorname{tg}_2 x=\frac{\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{2}{2}=1 \quad\rightarrow\quad x_2=45^\circ+k180^\circ$$

F1.7 Disequazioni goniometriche

Le disequazioni goniometriche sono quelle in cui l'incognita è argomento di una funzione goniometrica.
Ecco qui di seguito alcuni esempi su come si risolvono i vari tipi di disequazioni.

DISEQUAZIONI ELEMENTARI

Le equazioni e le disequazioni elementari sono quelle in cui del tipo senx>numero, cosx≤numero, tgx≥numero, ecc.

Esempio F1.36:
Risolvere la disequazione $\text{senx} < \frac{1}{2}$.

Il seno di x vale $\frac{1}{2}$ per gli angoli di 30° e di 150°, come si vede in figura. Sarà minore di $\frac{1}{2}$ nella parte di circonferenza colorata, quindi per 0°+k360°<x<30°+k360° e per 150°+k360°<x<360°+k360°.

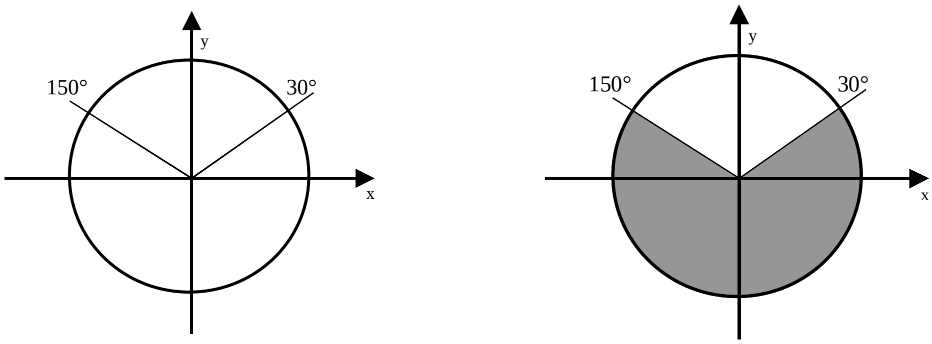


Fig. F1.40
Risoluzione della disequazione $\text{senx} < \frac{1}{2}$.

Esempio F1.37:
Risolvere la disequazione $\text{tgx} \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La tangente di x vale $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ per x=150°+k180°. Le soluzioni sono gli angoli per cui la tangente è maggiore o uguale di $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, ossia la parte di circonferenza colorata. Sono quindi gli angoli tra 150°, compreso, e 270°, escluso perché per 270° la tangente non esiste. La soluzione è quindi 150°+k180° ≤ x<270°+k180°.

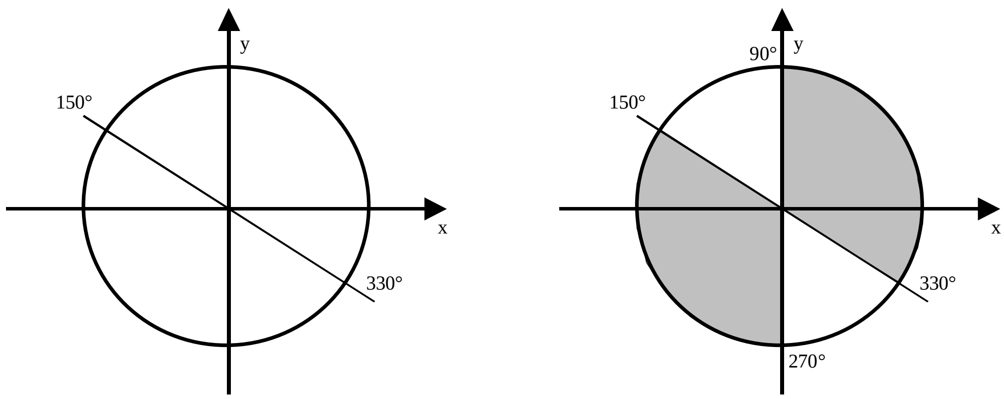


Fig. F1.41
Risoluzione della disequazione $\text{tgx} \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

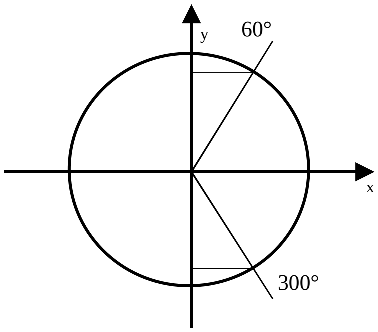
DISEQUAZIONI RICONDUCIBILI AD ELEMENTARI

Esempio F1.38:
Risolvere la disequazione $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$.

Per iniziare si risolve la disequazione $\cos(t) < \frac{1}{2}$. Il coseno vale $\frac{1}{2}$ per gli angoli 60° e 300°.

Il coseno è minore di $\frac{1}{2}$ per gli angoli t compresi tra 60° e 300°. 60°+kπ<t<300°+kπ.

Ora si sostituisce al posto di t il valore dell'angolo dell'esercizio.



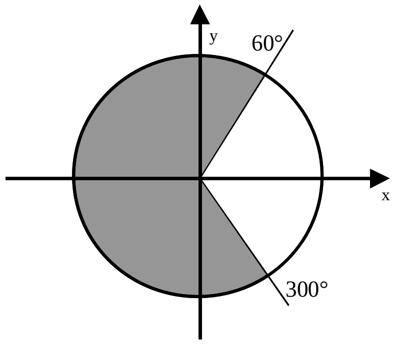


Fig. F1.42

Risoluzione della disequazione $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$.

$$60° + k180° < 2x - 45° < 300° + k180°$$
$$60° + k180° + 45° < 2x < 300° + k180° + 45°$$
$$\frac{105° + k180°}{2} < x < \frac{345° + k180°}{2}$$
$$52°30' + k90° < x < 172°30' + k90°$$

<u>Esempio F1.39:</u>

Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2} - \text{senx}\right)\left(\text{tgx} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \geq 0$.

Si risolvono indipendentemente le due disequazioni $\frac{1}{2} - \text{senx} \geq 0$ e $\text{tgx} + \frac{\sqrt{3}}{3} \geq 0$.

La prima delle due disequazioni, come visto nell'esempio F1.36, ha soluzioni 0°+k360°≤x≤30°+k360° e 150°+k360°≤x≤360°+k360°.

La seconda delle due disequazioni, come visto nell'esempio F1.37, ha soluzione 150°+k180°≤x<270°+k180°, che nell'intervallo da 0° a 360° si può esprimere così: 0°+k360°≤x<90°+k360°, 150°+k360°≤x<270°+k360°, 330°+k180°≤x≤360°+k180°.

Si possono esprimere tali due soluzioni nel solito modo con le linee continue e tratteggiate.

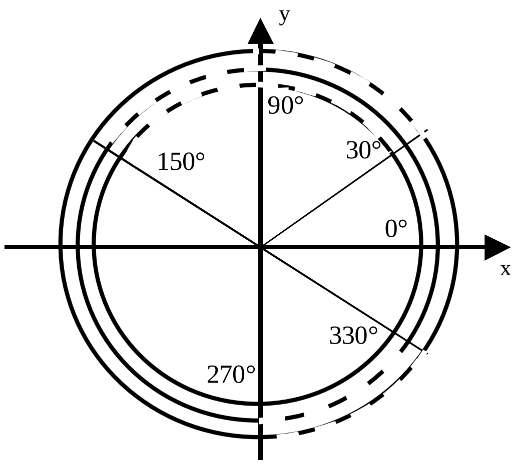


Fig. F1.43

Risoluzione della disequazione $\left(\frac{1}{2} - \text{senx}\right)\left(\text{tgx} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \geq 0$.

La linea interna rappresenta il segno della prima disequazione, la linea mediana il segno della seconda disequazione, la linea esterna è la linea del totale.
Le soluzioni sono gli intervalli in cui la linea esterna è continua, poiché è richiesto maggiore o uguale di zero nel testo della disequazione.
La soluzione è dunque 0°+k360°≤x≤30°+k360°, 90°+k360°<x<270°+k360°, 330°+k360°≤x≤360°+k360°.
Sono esclusi i valori in cui la tangente non esiste.

E’ possibile rappresentare le righe anche in orizzontale, come si è abituati finora. Ovviamente il risultato è il medesimo.

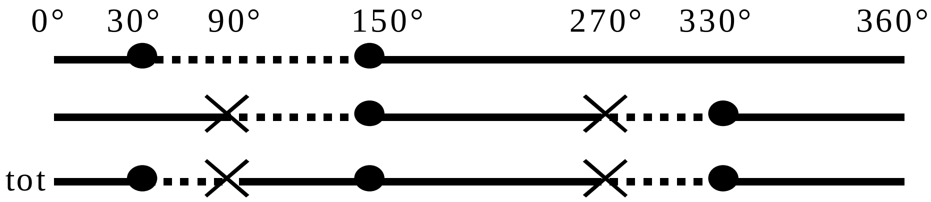


Fig. F1.44

Risoluzione della disequazione $\left(\frac{1}{2}-\text{sen}x\right)\left(\text{tg}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\geq 0$.

Adesso si prendono come soluzioni gli intervalli che nella linea del totale hanno la linea continua o il pallino, visto che si chiedevano gli angoli per cui (1/2-sen x)(tg x+ $\sqrt{3}$/3) era maggiore o uguale a zero.

Le soluzioni sono quindi:
0°+k360°≤x≤30°+k360°, 90°+k360°<x<270°+k360°, 330°+k360°≤x≤360°+k360°.