E1. Esponenziali e logaritmi

E1.1 Proprietà delle potenze

Si elencano le proprietà delle potenze:

1) Se si moltiplicano due potenze con la stessa base gli esponenti si sommano.
$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$
2) Se si dividono due potenze con la stessa base gli esponenti si sottraggono.
$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$
3) Se si deve elevare a potenza un prodotto si elevano a potenza i singoli fattori.
$$(ab)^c = a^c \cdot b^c$$
4) Se l'esponente è frazionario rappresenta una radice. Il numeratore della frazione è l'esponente del radicando, il denominatore della frazione è l'indice della radice.
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
5) L'inverso di un termine può essere rappresentato anche mediante lo stesso termine con esponente negativo.
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$
6) Le due regole precedenti possono essere utilizzate insieme.
$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$
7) Ogni numero positivo con esponente zero vale uno.
$$a^0 = 1$$

Si noti che tutte le eguaglianze seguenti possono essere utilizzate sia in un senso che nell'altro. Ad esempio la regola 4 permette di passare indifferentemente da esponente frazionario a radice e viceversa.

Esempio E1.1:
$x^2 \cdot x^3 = x^5$ per la regola 1.

Esempio E1.2:
$\frac{x^5}{x^2} = x^3$ per la regola 2.

Esempio E1.3:
$x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$ per la regola 3.

Esempio E1.4:
$\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$ per la regola 4.

Esempio E1.5:
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ per la regola 4.
La radice quadrata sottintende indice 2; la lettera a senza esponente sottintende esponente 1.

Esempio E1.6:
$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ per la regola 5.

Esempio E1.7:
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$ per a regola 5.

Esempio E1.8:
$x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ per la regola 6.

Esempio E1.9:
$4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}}$ per la regola 6.

E1.2 Definizione di logaritmo

Definizione: Il logaritmo è l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento.

$$\log_a b = x$$

- a è la BASE del logaritmo.
- b è l'ARGOMENTO del logaritmo.
- x è il valore del logaritmo.

Esempio E1.10:
Calcolare $\log_2 8$.
L'esponente da dare alla base 2 per ottenere l'argomento 8 è 3.
Quindi $\log_2 8=3$.
Verifica: $2^3=8$.

Dall'esempio appena visto si nota che è possibile esprimere $\log_2 8=3$ in maniera equivalente con la formula alternativa $2^3=8$. Per questo vale la seguente equivalenza (**formula di trasformazione da logaritmo a esponenziale**):

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Osservazione:
La base e l'argomento di un logaritmo devono essere numeri positivi, mentre il valore del logaritmo può anche essere un numero negativo.

Osservazione:
Se la base vale 1 si hanno solo risultati banali, in quanto il numero 1, elevato a qualsiasi esponente, dà sempre risultato 1. Per questo si considereranno sempre le basi diverse da 1.

LOGARITMI DECIMALI
Se la base è 10 si omette, quindi log100 significa $\log_{10}100$.

LOGARITMI NATURALI
Il numero **e=2,71828**… è detto **NUMERO DI NEPERO**
Se la base è il numero di nepero al posto di $\log_e$ si scriverà ln, quindi ln5 significa $\log_e 5$.

Esempio E1.11:
Calcolare $\log_5 1$.
L'esponente da dare al 5 per ottenere 1 è 0, poiché tutti i numeri, elevati a esponente zero, danno risultato 1.
Ad esempio $\log_5 1=0$.
Verifica: $5^0=1$. Lo stesso ragionamento lo si può fare con qualunque altra base positiva, per cui il logaritmo in qualunque base di 1 vale sempre zero.

Esempio E1.12:
Calcolare $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$.

L'esponente da dare a 2 per ottenere $\frac{1}{16}$ è -4.

Infatti $2^{-4}=\frac{1}{16}$. Si ottiene $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)=-4$.

Esempio E1.13:
Calcolare $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{25}{4}\right)$.

L'esponente da dare a $\frac{2}{5}$ per ottenere $\frac{25}{4}$ è -2.

Infatti $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{4}$. Si ottiene $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{25}{4}\right)=-2$.

Esempio E1.14:
Calcolare $\log_7 7$.
L'esponente da dare a 7 per ottenere 7 è ovviamente 1 perché $7^1=7$.
Quindi $\log_7 7=1$.
Lo stesso ragionamento si può fare con qualsiasi altro numero positivo al posto del 7.

Gli esercizi di base che verificano la comprensione del significato di logaritmo sono di tre tipi:
- Dati a (base) e b (argomento) trovare x (logaritmo).
- Dati a (base) e x (logaritmo) trovare b (argomento).
- Dati b (argomento) e x (logaritmo) trovare a (base.)

Un modo abbastanza standard di risolverli è utilizzare la formula di trasformazione per passare dal logaritmo all'esponenziale, e risolvere quest'ultima con le regole algebriche conosciute e con le proprietà delle potenze.

Esempio E1.15:
$x=\log_3 81$. Trovare la x.
Utilizzando la formula di trasformazione si ottiene $3^x=81$.
Si scompone in fattori $81=3^4$.
Si ottiene $3^x=3^4$.
Se le basi sono uguali anche gli esponenti saranno uguali e quindi x=4.
L'esercizio poteva ovviamente essere risolto in un passaggio solo notando che $3^4=81$, quindi x=4; ciò è perfettamente corretto. In questo esempio si è preferito svolgere tutti i passaggi perché non sempre le cose sono così semplici.

Esempio E1.16:
$5=\log_2 b$. Determinare la b.
Utilizzando la formula di trasformazione si ottiene $2^5=b$, da cui $b=2^5=32$.

Esempio E1.17:
$\log_a\left(\frac{16}{9}\right)=-2$. Determinare la a.
Utilizzando la formula di trasformazione si ha:
$\log_a\left(\frac{16}{9}\right)=-2 \Rightarrow a^{-2}=\frac{16}{9} \Rightarrow a^2=\frac{9}{16} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$; solo la sol. positiva è accettabile, in quanto la base deve essere un numero positivo.

E1.3 Proprietà dei logaritmi

PROPRIETA' 1

$$\log_a 1=0$$

Ciò vale per ogni valore di a. Infatti elevando ogni numero positivo alla zero si ottiene 1.

PROPRIETA' 2

$$\log_a a=1$$

Ciò vale per ogni valore di a. Infatti elevando ogni numero positivo alla uno si ottiene lo stesso numero.

PROPRIETA' 3

$$\log_a a^c=c$$

Ciò vale per ogni valore di a e c, in quanto per definizione di logaritmo l'esponente da dare ad a per ottenere a^c è ovviamente c.

Si noti che $\log_2 8=3$ e $\log_2 16=4$. Quindi $\log_2 8+\log_2 16=3+4=7$.
Inoltre $\log_2 8\cdot16=\log_2 128=7$. Da ciò si ricava la seguente proprietà:

PROPRIETA' 4

$$\log_a b\cdot c=\log_a b+\log_a c$$

Sommando logaritmi di base uguale si ottiene un logaritmo avente base la stessa base e argomento il prodotto degli argomenti.

Si noti che $\log_2 8=3$ e $\log_2 16=4$. Quindi $\log_2 16-\log_2 8=4-3=1$.
Inoltre $\log_2\frac{16}{8}=\log_2 2=1$. Da ciò si ricava la seguente proprietà:

PROPRIETA' 5

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$$

Sottraendo logaritmi di base uguale si ottiene un logaritmo avente base la stessa base e argomento il quoziente degli argomenti.

Dalla proprietà 4 si ottiene $\log_a b^c=\log_a b\cdot b\cdot\ldots\ldots\cdot b\cdot b=\log_a b+\log_a b+\ldots\ldots+\log_a b+\log_a b=c\cdot\log_a b$, da cui la seguente:

PROPRIETA' 6

$$\log_a b^c=c\cdot\log_a b$$

Il prodotto di un numero c per un logaritmo equivale a un logaritmo avente come base la stessa base e come argomento lo stesso argomento elevato alla c.

PROPRIETA' 7 - (REGOLA DEL CAMBIAMENTO DI BASE)

$$\log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Ogni logaritmo è esprimibile come rapporto di logaritmi di base arbitraria. Al posto di b può essere sostituito ogni numero positivo diverso da 1.

Utilizzando la regola del cambiamento di base con c=b si ottiene $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$, da cui l'ultima proprietà:

PROPRIETA' 8

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

L'inverso di un logaritmo equivale a un logaritmo avente per base l'argomento e per argomento la base.

Utilizzando la definizione di logaritmo è possibile determinare solo alcuni logaritmi, ma non tutti. E' possibile determinare facilmente log 100=$\log_{10}$100=2, ma non è possibile determinare $\log_{10}$23.
Per calcolare il $\log_{10}$23 si può usare la calcolatrice, il tasto [log] indica $\log_{10}$, da cui $\log_{10}$23= 1,36172…
Per calcolare il $\log_e$5=ln5 si può usare la calcolatrice, il tasto [ln] indica $\log_e$, da cui ln5= 1,60943…
Per calcolare il $\log_3$14 non ci sono tasti sulla calcolatrice a disposizione!
E' dunque necessario utilizzare la regola del cambiamento di base, in modo che al posto della base b risulti 10 oppure e.

Esempio E1.18:
Calcolare $\log_3$14.
Con la regola del cambiamento di base si ha:
$\log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3} = \frac{1,14612...}{0,47712...} = 2,4021...$ con il logaritmo decimale.
$\log_3 14 = \frac{\ln 14}{\ln 3} = \frac{2,63905...}{1,09861...} = 2,4021...$ con il logaritmo naturale.

Le proprietà dei logaritmi servono per risolvere le equazioni e le disequazioni esponenziali e logaritmiche, come si vedrà nei prossimi paragrafi.

E1.4 Equazioni esponenziali

Le equazioni esponenziali sono le equazioni che presentano l'incognita all'esponente.
Per risolvere le più semplici ci si basa sulla seguente idea:

se $a^b=a^c$ allora b=c.

Ci si deve ricondurre alla situazione in cui a primo e secondo membro c'è la stessa base, dunque gli esponenti devono essere uguali.

Esempio E1.19:
Risolvere l'equazione esponenziale $8^x=16$.

L'obiettivo è avere la stessa base sia a primo che a secondo membro.
Per ottenere ciò scomponiamo in fattori sia l'8 che il 16.
$8^x=16$
$2^{3x}=2^4$
Le basi sono uguali, quindi lo devono essere anche gli esponenti, da cui si ha:
3x=4
da cui $x = \frac{4}{3}$.

Esempio E1.20:
Risolvere l'equazione esponenziale $\left(\frac{25}{9}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}$.

$\left(\frac{25}{9}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}$ Si scompone $\frac{25}{9}$ e si ha:
$\left(\frac{5}{3}\right)^{2(3x-2)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}$ Le basi sono una l'inversa dell'altra.
Se ne gira una e si cambia il segno dell'esponente (proprietà delle potenze).
$\left(\frac{5}{3}\right)^{2(3x-2)} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x-2}$ Le basi sono uguali e quindi lo sono anche gli esponenti, da cui…
2(3x-2)=-x-2
6x-4=-x-2
6x+x=4-2
7x=2
$x = \frac{2}{7}$

Talvolta per risolvere l'equazione esponenziale può essere utile effettuare una sostituzione. I prossimi due esempi chiariscono questo concetto.

Esempio E1.21
Risolvere l'equazione esponenziale $2^{2x+1}=2^{2x}+1$.

Si utilizzano le proprietà delle potenze e si ha:

$2^{2x}\cdot 2=2^{2x}+1$	Si sostituisce $t=2^{2x}$.
$2t=t+1$	Si trova t.
$2t-t=1$	
$t=1$	Si sostituisce nuovamente $t=2^{2x}$.
$2^{2x}=1$	Si mette la stessa base (2) ambo i membri.
$2^{2x}=2^0$	Le basi sono uguali dunque lo sono anche gli esponenti.
$2x=0$	
$x=0$	

Esempio E1.22

Risolvere l'equazione esponenziale $25^x-3\cdot 5^x-10=0$.

$25^x-3\cdot 5^x-10=0$	Si scompone $25=5^2$.
$5^{2x}-3\cdot 5^x-10=0$	Si sostituisce $t=5^x$.
$t^2-3t-10=0$	Si risolve l'equazione di secondo grado.
$(t-5)(t+2)=0$	

$t_1=5$, $t_2=-2$.

Si sostituisce 5^x al posto di t_1 e di t_2.

$t_1=5 \Rightarrow 5^x=5 \Rightarrow x=1$.

$t_2=-2 \Rightarrow 5^x=-2 \Rightarrow$ non accettabile perché 5, elevato a qualunque numero, non può dare un numero negativo.

Due esponenziali con base diversa sono uguali solo se l'esponente di entrambe è zero. Talvolta per risolvere equazioni esponenziali è necessario utilizzare tale concetto. Il prossimo esempio chiarisce questo concetto.

Esempio E1.23:

Risolvere l'equazione esponenziale $2^{x+1}=\frac{9}{2}\cdot 3^x$.

$2^{x+1}=\frac{9}{2}\cdot 3^x$	Si scompone $2^{x+1}=2^x\cdot 2^1$.
$2^x\cdot 2^1=\frac{9}{2}\cdot 3^x$	Denominatore comune.
$\frac{2^x\cdot 2\cdot 2}{2}=\frac{9\cdot 3^x}{2}$	Si leva il denominatore comune e si scompone il 9.
$2^2\cdot 2^x=3^2\cdot 3^x$	Si usano la proprietà della potenze.
$2^{x+2}=3^{x+2}$	DUE BASI DIVERSE ELEVATE ALLO STESSO ESPONENTE SONO UGUALI SOLO SE L'ESPONENTE E' ZERO.
$x+2=0$	
$x=-2$	

Esempio E1.24:

Risolvere l'equazione esponenziale $2^x+2^{x+2}+2^{x+3}=26$.

$2^x+2^{x+2}+2^{x+3}=26$	Con le proprietà di potenze si ha:
$2^x+2^x\cdot 2^2+2^x\cdot 2^3=26$	Si sostituisce $t=2^x$.
$t+4t+8t=26$	Si trova t.
$13t=26$	
$t=2$	Si sostituisce nuovamente $2^x=t$.
$2^x=2$	
$2^x=2^1$	Se le basi sono uguali lo sono anche gli esponenti.
$x=1$	

In certi casi non è possibile avere la stessa base nei due membri; in tal caso si usa la formula di trasformazione e si passa ai logaritmi.

Esempio E1.25

Risolvere l'equazione esponenziale $5^{3x+2}=7^3$.

$5^{3x+2}=7^3$	Usando la formula di trasformazione si passa ai logaritmi.
$3x+2=\log_5 7^3$	Si isola la x.
$3x=\log_5 7^3-2$.	
$x=\frac{\log_5 7^3-2}{3}$	che è il risultato perché è un numero.

Lo si scrive meglio utilizzando le proprietà dei logaritmi viste nel paragrafo precedente.

$$x=\frac{3\cdot\log_5 7-2}{3}=\frac{3\cdot\log_5 7}{3}-\frac{2}{3}=\log_5 7-\frac{2}{3}=\frac{\log 7}{\log 5}-\frac{2}{3}$$

C'è un altro modo di risolvere questo esercizio.

Questo altro modo suggerisce un metodo generale per risolvere le equazioni esponenziali con basi diverse e esponenti diversi nei due membri dell'equazione.

$5^{3x+2}=7^3$ — Si pone il logaritmo davanti a tutti e due i membri dell'equazione.

$\log 5^{3x+2}=\log 7^3$ — Per le proprietà dei logaritmi si possono portare davanti al logaritmo gli esponenti degli argomenti.

$(3x+2)\log 5=3\log 7$

$3x\log 5+2\log 5=3\log 7$ — Si isola la x.

$3x\log 5=3\log 7-2\log 5$ — Si divide per il numero accanto alla x.

$$\frac{3x\log 5}{3\log 5}=\frac{3\log 7}{3\log 5}-\frac{2\log 5}{3\log 5}$$

$$x=\frac{\log 7}{\log 5}-\frac{2}{3}$$

Talvolta non è possibile utilizzare i metodi precedenti perché ci si riesce solo a ricondurre al caso in cui sia le basi che gli esponenti sono differenti. In tal caso si pone il logaritmo davanti ad ambo i membri e si risolve l'equazione utilizzando le proprietà dei logaritmi.

<u>Esempio E1.26:</u>
Risolvere l'equazione esponenziale $3^{x-2}+3^{x+1}=2^x$.

$3^{x-2}+3^{x+1}=2^x$ — Idea: si cerca di avere solo una base per ogni membro.

$3^x\cdot 3^{-2}+3^x\cdot 3=2^x$ — Si raccoglie 3^x.

$3^x(3^{-2}+3)=2^x$ — Si svolgono i calcoli dentro la parentesi.

$$3^x\left(\frac{1}{3^2}+3\right)=2^x \Rightarrow 3^x\left(\frac{1}{9}+3\right)=2^x \Rightarrow 3^x\left(\frac{1+27}{9}\right)=2^x$$

$3^x\left(\frac{28}{9}\right)=2^x$ — SI METTE IL LOGARITMO DAVANTI AL PRIMO E AL SECONDO MEMBRO.

$\log\left(3^x\left(\frac{28}{9}\right)\right)=\log\left(2^x\right)$ — Con le proprietà dei logaritmi si ha:

$x\cdot\log(3)+\log\left(\frac{28}{9}\right)=x\cdot\log 2$ — Si spostano le x a I membro, proprietà dei logaritmi a II membro.

$x\cdot\log(3)-x\cdot\log 2=-(\log 28-\log 9)$ — Si raccoglie la x a I membro, si utilizzano le proprietà dei logaritmi al II.

$x\cdot(\log 3-\log 2)=-\log 28+\log 9$ — e finalmente si ha il risultato!

$$x=\frac{\log 9-\log 28}{\log 3-\log 2}$$

E1.5 Funzioni esponenziale e logaritmica

In questo paragrafo si studiano i grafici della funzione esponenziale (ossia $y=a^x$ al variare di a) e della funzione logaritmica (ossia $y=\log_a x$ al variare di a).
Per tracciare il grafico di una funzione è necessario determinarne dei punti e unirli.
Per determinare dei punti si assegnano valori arbitrari alla x e si trovano i corrispondenti valori della y.

<u>Esempio E1.27:</u>
Tracciare il grafico della funzione $y=2^x$.

x	y	punto
-4	$2^{-4}=\frac{1}{16}$	$\left(-4;\frac{1}{16}\right)$
-3	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$\left(-3;\frac{1}{8}\right)$
-2	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$\left(-2;\frac{1}{4}\right)$
-1	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$\left(-1;\frac{1}{2}\right)$
0	$2^0=1$	$(0;1)$
1	$2^1=2$	$(1;2)$
2	$2^2=4$	$(2;4)$
3	$2^3=8$	$(3;8)$
4	$2^4=16$	$(4;16)$

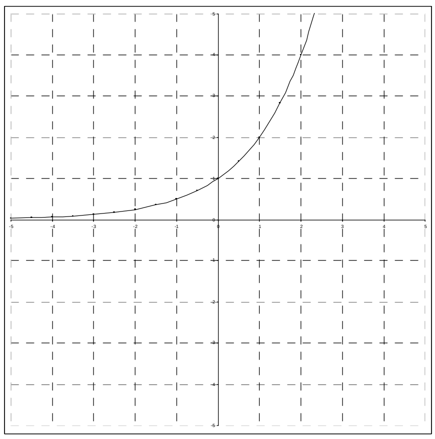

Fig. E1.1
Grafico della funzione $y=2^x$.

Esempio E1.28:
Tracciare il grafico della funzione $y=2^x$.

x	y	punto
-4	$3^{-4}=\frac{1}{81}$	$\left(-4;\frac{1}{81}\right)$
-3	$3^{-3}=\frac{1}{27}$	$\left(-3;\frac{1}{27}\right)$
-2	$3^{-2}=\frac{1}{9}$	$\left(-2;\frac{1}{9}\right)$
-1	$3^{-1}=\frac{1}{3}$	$\left(-1;\frac{1}{3}\right)$
0	$3^0=1$	$(0;1)$
1	$3^1=3$	$(1;3)$
2	$3^2=9$	$(2;9)$
3	$3^3=27$	$(3;27)$
4	$3^4=81$	$(4;81)$

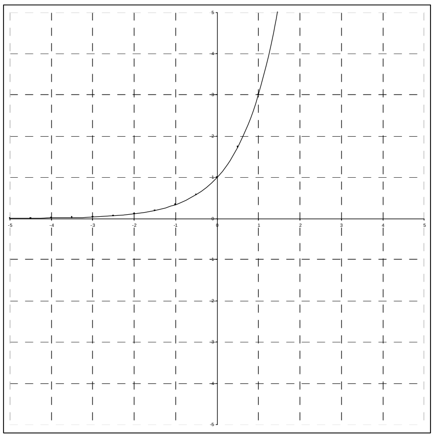

Fig. E1.2
Grafico della funzione $y=3^x$.

Esempio E1.29:

Tracciare il grafico della funzione $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y	punto
-4	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$	$(-4;16)$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$	$(-3;8)$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$	$(-2;4)$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$	$(-1;2)$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$	$(0;1)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$	$\left(2;\frac{1}{4}\right)$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$	$\left(3;\frac{1}{8}\right)$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}$	$\left(4;\frac{1}{16}\right)$

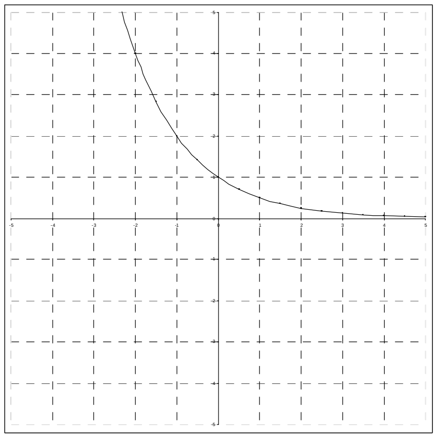

Fig. E1.3
Grafico della funzione $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Osservazioni:

- Il grafico delle funzioni esponenziali si trova sempre sopra l'asse delle x; del resto un numero positivo, elevato a qualunque cosa, darà sempre come risultato un numero positivo.
- Se la base è maggiore di 1 (2, 3, 4, ecc.) il grafico è crescente.
- Se la base è minore di 1 (ma comunque maggiore di 0), come $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$,, ecc., il grafico è decrescente.
- Tutti i grafici passano per il punto (0;1); del resto qualunque numero elevato alla zero dà risultato 1.
- Tutti i grafici si avvicinano sempre di più all'asse x senza toccarlo mai. Si dice che l'asse x è ASINTOTO della funzione.
- In riferimento ai grafici di $y=2^x$ e $y=3^x$ si nota: il grafico dell'esponenziale con la base più alta si trova al di sopra dell'altro a destra dello zero sull'asse x e si trova sotto l'altro a sinistra dello zero sull'asse x.
- In riferimento ai grafici di $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ si nota: il grafico dell'esponenziale con la base più alta (ossia $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$) si trova al di sopra dell'altro a sinistra dello zero sull'asse x e si trova sotto l'altro a destra dello zero sull'asse x.

Ora si studiano i grafici delle funzioni logaritmiche (ossia $y=\log_a x$ al variare di a). Anche in questo caso si notano delle differenze e delle similitudini al variare di a.

Esempio E1.30:
Tracciare il grafico della funzione $y=\log_2 x$.

x	y	punto
-2	Il $\log_2(-2)$ non esiste.	Nessun punto.
-1	Il $\log_2(-1)$ non esiste.	Nessun punto.
0	Il $\log_2(0)$ non esiste.	Nessun punto.
$\frac{1}{8}$	$\log_2\left(\frac{1}{8}\right)=-3$	$\left(\frac{1}{8};-3\right)$
$\frac{1}{4}$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=-2$	$\left(\frac{1}{4};-2\right)$
$\frac{1}{2}$	$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$	$\left(\frac{1}{2};-1\right)$
1	$\log_2(1)=0$	$(1;0)$
2	$\log_2(2)=1$	$(2;1)$
4	$\log_2(4)=2$	$(4;2)$
8	$\log_2(8)=3$	$(8;3)$

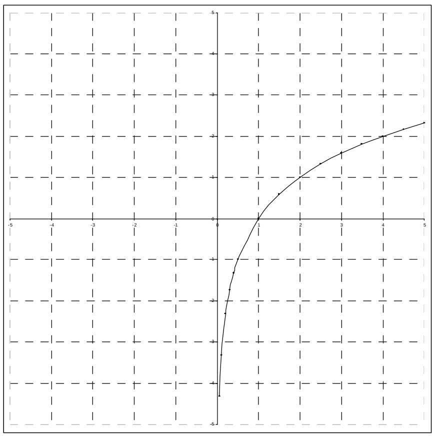

Fig. E1.4
Grafico della funzione $y=\log_2 x$.

Esempio E1.31:
Tracciare il grafico della funzione $y=\log_3 x$.

x	y	punto
-2	Il $\log_3(-2)$ non esiste.	Nessun punto.
-1	Il $\log_3(-1)$ non esiste.	Nessun punto.
0	Il $\log_3(0)$ non esiste.	Nessun punto.
$\frac{1}{27}$	$\log_3\left(\frac{1}{27}\right)=-3$	$\left(\frac{1}{27};-3\right)$
$\frac{1}{9}$	$\log_3\left(\frac{1}{9}\right)=-2$	$\left(\frac{1}{9};-2\right)$
$\frac{1}{3}$	$\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=-1$	$\left(\frac{1}{3};-1\right)$
1	$\log_3(1)=0$	$(1;0)$
3	$\log_3(3)=1$	$(3;1)$
9	$\log_3(9)=2$	$(9;2)$
27	$\log_3(27)=3$	$(27;3)$

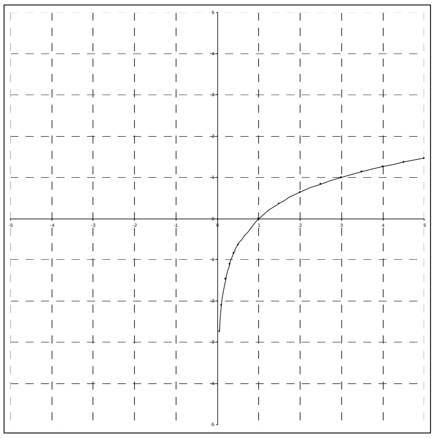

Fig. E1.5
Grafico della funzione $y=\log_3 x$.

Esempio E1.32:
Tracciare il grafico della funzione $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

x	y	punto
-2	Il $\log_2(-2)$ non esiste.	Nessun punto.
-1	Il $\log_2(-1)$ non esiste.	Nessun punto.
0	Il $\log_2(0)$ non esiste.	Nessun punto.
$\frac{1}{8}$	$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)=3$	$\left(\frac{1}{8};3\right)$
$\frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)=2$	$\left(\frac{1}{4};2\right)$
$\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=1$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
1	$\log_{\frac{1}{2}}(1)=0$	$(1;0)$
2	$\log_{\frac{1}{2}}(2)=-1$	$(2;-1)$
4	$\log_{\frac{1}{2}}(4)=-2$	$(4;-2)$
8	$\log_{\frac{1}{2}}(8)=-3$	$(8;-3)$

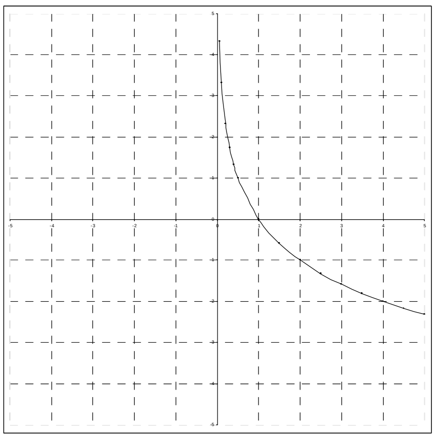

Fig. E1.6
Grafico della funzione $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Osservazioni:

- Il grafico si trova solo a destra dell'asse delle x; del resto si è detto che l'argomento deve essere positivo.
- Se la base è maggiore di 1 (2, 3, 4, ecc.) il grafico è crescente.
- Se la base è minore di 1 (ma comunque maggiore di 0), come $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ecc., il grafico è decrescente.
- Tutti i grafici passano per il punto (1;0); del resto qualunque numero elevato alla zero dà risultato 1.
- Tutti i grafici si avvicinano sempre di più all'asse y senza toccarlo mai. Si dice che l'asse y è ASINTOTO della funzione.
- In riferimento ai grafici di $y=\log_2 x$ e $y=\log_3 x$ si nota: il grafico della funzione con la base più alta si trova al di sotto dell'altro a destra dell'uno sull'asse x e si trova sotto l'altro con x compreso tra 0 e 1.
- In riferimento ai grafici di $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ e $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ si nota: il grafico dell'esponenziale con la base più alta (ossia $y=\log_{\frac{1}{2}} x$) si trova al di sotto dell'altro a destra dell'uno sull'asse x e si trova sopra l'altro con x compreso tra 0 e 1.

I GRAFICI DI $y=2^x$ E DI $y=\log_2 x$ SONO SIMMETRICI RISPETTO ALLA RETTA y=x. Ciò funziona per qualsiasi altra base, quindi anche per $y=a^x$ e $y=\log_a x$ con $a>0$, $a\neq 1$.
SE DUE GRAFICI SONO SIMMETRICI RISPETTO ALLA RETTA y=x SI DICE CHE LE DUE FUNZIONI SONO **INVERSE.**

Le funzioni $y=e^x$ e $y=\ln x$ saranno particolarmente importanti quando si studierà analisi matematica.

E1.6 Equazioni logaritmiche

Le equazioni logaritmiche sono quelle in cui l'incognita si trova nell'argomento del logaritmo.
Anche per le equazioni logaritmiche l'idea di base è simile a quella utilizzata per risolvere le disequazioni esponenziali, ossia: se a primo e a secondo membro si trovano due logaritmi con la stessa base allora anche gli argomenti sono uguali. L'obiettivo è dunque quello di ricondursi alla forma $\log_a x=\log_a y$, da cui si ricava x=y.

DIFFERENZA FONDAMENTALE – Al termine della risoluzione si dovrà verificare se la soluzione è accettabile, perché certe volte la soluzione trovata rende negativo un argomento e quindi è non accettabile.

Esempio 1.33:
Risolvere l'equazione logaritmica $\log_3 x+\log_3(x-4)=\log_3(x+6)$.

$\log_3 x+\log_3(x-4)=\log_3(x+6)$

Si utilizzano le proprietà dei logaritmi perché ci sia un solo logaritmo a primo membro.

$\log_3(x^2-4x)=\log_3(x+6)$	Se due logaritmi con la stessa base sono uguali lo sono anche gli argomenti.
$x^2-4x=x+6$	Si risolve l'equazione di secondo grado.

$x^2-4x-x-6=0$
$x^2-5x-6=0$
$(x-6)(x+1)=0$
$x_1=6$
Verifica: sostituendo 6 al posto della x nel testo dell'equazione si nota che tutti gli argomenti sono positivi.
Quindi $x_1=6$ è una soluzione ACCETTABILE.
$x_2=-1$
Verifica: sostituendo -1 al posto della x nel testo dell'equazione si nota che ci sono argomenti negativi.
Quindi $x_2=-1$ è una soluzione NON ACCETTABILE.

Esempio 1.34:
Risolvere l'equazione logaritmica $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$.

$\log_2 x+\log_2(x-1)=1$

Non c'è un logaritmo a secondo membro. Per applicare il procedimento dobbiamo riscrivere l'1 sotto forma di logaritmo in base 2. L'uno può essere scritto come $\log_2 2$ applicando le proprietà dei logaritmi.

$\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 2$	Adesso si svolge come il precedente: si utilizzano le proprietà dei logaritmi.
$\log_2(x^2-x)=\log_2 2$	Se due logaritmi con la stessa base sono uguali lo sono anche gli argomenti.
$x^2-x=2$	Si risolve l'equazione di secondo grado.

$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$
$x_1=2$
Verifica: sostituendo 2 al posto della x nel testo dell'equazione si nota che tutti gli argomenti sono positivi.
Quindi $x_1=2$ è una soluzione ACCETTABILE.
$x_2=-1$
Verifica: sostituendo -1 al posto della x nel testo dell'equazione si nota che ci sono argomenti negativi.
Quindi $x_2=-1$ è una soluzione NON ACCETTABILE.

Può capitare ci siano tutte soluzioni accettabili, oppure nessuna, o alcune sì e alcune no.
Si ricorda che basta un argomento negativo perché la soluzione sia non accettabile.

Esempio 1.35:
Risolvere l'equazione logaritmica $\log_2 x + \frac{1}{3}\log_4 x = \frac{21}{2}$.

$\log_2 x + \frac{1}{3}\log_4 x = \frac{21}{2}$

Le due basi non sono uguali. Si utilizza la regola del cambiamento di base per renderle uguali. Si trasforma il logaritmo in base 4 in logaritmo in base 2. $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4}$.

$\log_2 x + \frac{1}{3}\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{21}{2}$ Il logaritmo $\log_2 4=2$, quindi…

$\log_2 x + \frac{1}{3}\frac{\log_2 x}{2} = \frac{21}{2}$ Si calcola il denominatore comune.

$\frac{6\log_2 x + \log_2 x = 63}{6}$

$7\log_2 x = 63$

$\log_2 x = \frac{63}{7} = 9$ da cui con la nota regola $a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$ si ha:

$x=2^9=512$.

Verifica: sostituendo 512 al posto della x nel testo dell'equazione si nota che tutti gli argomenti sono positivi.
Quindi $x_1=512$ è una soluzione ACCETTABILE.

E1.7 Disequazioni esponenziali

Sono le equazioni e le disequazioni in cui l'incognita è all'esponente. Ecco un elenco dei casi con i metodi di risoluzione.

CASO 1: $\mathbf{a^{p(x)} > 0}$ o $\mathbf{a^{p(x)} \geq 0}$

L'esponenziale è sempre positivo, quindi tale disequazione è **sempre verificata**.

CASO 2: $\mathbf{a^{p(x)} < 0}$ o $\mathbf{a^{p(x)} \leq 0}$

L'esponenziale è sempre positivo, quindi tale disequazione è **impossibile**.

CASO 3: $\mathbf{a^{p(x)} > a^{q(x)}}$ o $\mathbf{a^{p(x)} \geq a^{q(x)}}$ con $a>1$.

Basta risolvere rispettivamente $p(x)>q(x)$ oppure $p(x) \geq q(x)$.

CASO 4: $\mathbf{a^{p(x)} > a^{q(x)}}$ o $\mathbf{a^{p(x)} \geq a^{q(x)}}$ con $0<a<1$.

Basta risolvere rispettivamente $p(x)<q(x)$ oppure $p(x) \leq q(x)$.

CASO 5: $\mathbf{a^{p(x)} > b^{q(x)}}$ e $\mathbf{a^{p(x)} \geq b^{q(x)}}$

Si risolve $\mathbf{p(x) \cdot \log_c a > q(x) \cdot \log_c b}$ se $c > 1$.

$\mathbf{p(x) \cdot \log_c a < q(x) \cdot \log_c b}$ se $0 < c < 1$, nelle quali i logaritmi sono numeri; nel caso non si possano calcolare esattamente vanno approssimati con un adeguato numero di cifre decimali.

E1.8 Disequazioni logaritmiche

Le disequazioni logaritmiche sono quelle in cui l'incognita si trova all'argomento del logaritmo.
Ecco alcuni casi con i metodi di risoluzione:

CASO 1: $\mathbf{\log_a p(x) > 0}$ **e** $\mathbf{\log_a p(x) \geq 0}$ Se $a>1$ si risolve $p(x)>1$, o $p(x) \geq 1$.
se $0<a<1$ si risolve $0<p(x)<1$ oppure $0<p(x) \leq 1$.

CASO 2: $\mathbf{\log_a p(x) < 0}$ **e** $\mathbf{\log_a p(x) \leq 0}$ Se $a>1$ si risolve $0<p(x)<1$ oppure $0<p(x) \leq 1$.
se $0<a<1$ si risolve $p(x)>1$, o $p(x) \geq 1$.

CASO 3: $\mathbf{\log_a p(x) > k}$ **e** $\mathbf{\log_a p(x) \geq k}$ dove k è un numero

Se $a>1$ la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} \mathbf{p(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) > a^k} \end{cases}$

Se $0<a<1$ la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} \mathbf{p(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) < a^k} \end{cases}$

Se nella disequazione di partenza ci fosse ≥ al posto di > bisognerebbe mettere tale simbolo anche nella seconda delle disequazioni che compongono i sistemi appena mostrati.

CASO 4: $\mathbf{\log_a p(x) < k}$ **e** $\mathbf{\log_a p(x) \leq k}$ dove k è un numero

Se $a>1$ la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} \mathbf{p(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) < a^k} \end{cases}$

Se 0<a<1 la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} \mathbf{p(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) > a^k} \end{cases}$

Se nella disequazione di partenza ci fosse ≤ al posto di < bisognerebbe mettere tale simbolo anche nella seconda delle disequazioni che compongono i sistemi appena mostrati.

CASO 5: $\mathbf{\log_a p(x) > \log_a q(x)}$ e $\mathbf{\log_a p(x) \geq \log_a q(x)}$

Se a>1 la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} \mathbf{p(x) > 0} \\ \mathbf{q(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) > q(x)} \end{cases}$

Se 0<a<1 la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} \mathbf{p(x) > 0} \\ \mathbf{q(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) < q(x)} \end{cases}$

Se nella disequazione di partenza ci fosse ≥ al posto di > bisognerebbe mettere tale simbolo anche nella seconda delle disequazioni che compongono i sistemi appena mostrati.