D5. Ellisse, iperbole e luoghi geometrici

D5.1 Definizione di ellisse come luogo di punti

Definizione: una **ellisse** è formata dall'insieme dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante.

In figura D5.1 la somma delle lunghezze d_1 e d_2 è costante per tutti i punti P facenti parte dell'ellisse.

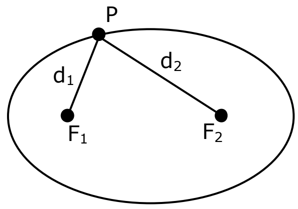


Fig. D5.1
Definizione di ellisse.

Per facilità quando si tratta questo argomento alle scuole superiori i due fuochi vengono presi sull'asse delle x o sull'asse delle y.

L'equazione di una ellisse è $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

- a rappresenta la lunghezza del semiasse sull'asse x.
- b rappresenta la lunghezza del semiasse sull'asse y.
- $c=\sqrt{a^2-b^2}$ rappresenta la distanza dei fuochi dall'origine.
- $e=\frac{c}{a}$ è l'eccentricità dell'ellisse, e rappresenta quanto l'ellisse è allungata. L'eccentricità è un valore compreso tra 0 e 1. Per e che si avvicina a 0 l'ellisse diventa sempre più simile a una circonferenza. Per e che si avvicina a 1 l'ellisse diventa stretta e lunga.

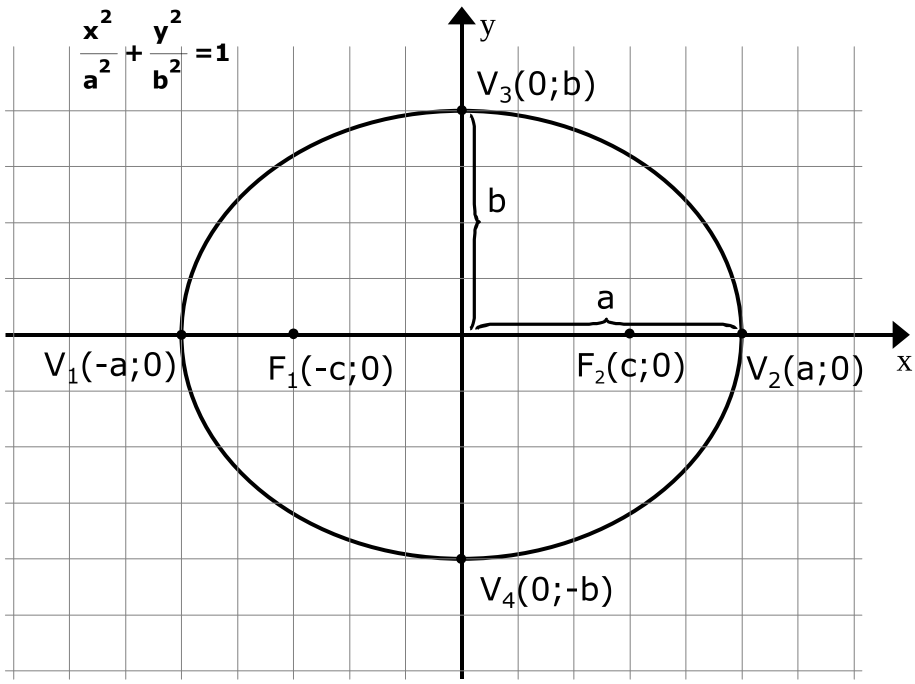


Fig. D5.2
Ellisse, fuochi e vertici.

Osservazione:
Se a>b per c vale la formula detta sopra, ossia $c=\sqrt{a^2-b^2}$, se a=b si ha una circonferenza con centro nell'origine e raggio r=a=b, se a<b allora $c=\sqrt{b^2-a^2}$ e i fuochi si trovano sull'asse delle y e non sull'asse delle x.

L'ellisse è una forma presente in natura: la terra ruota attorno al sole seguendo un'orbita a forma di ellisse. Il sole si trova in uno dei fuochi. Quando l'ellisse è stata studiata (da Apollonio di Perga nel III secolo a.c.) ancora ciò non si sapeva (fu Newton a studiare le traiettorie dei corpi celesti nel XVII secolo d.c., ossia 2000 anni dopo). Questo è uno dei tanti esempi nei quali la matematica ha studiato argomenti molto prima che se ne trovassero applicazioni pratiche.
Il Colosseo e Piazza San Pietro sono stati costruiti a forma di ellisse.
In ottica un raggio di luce che parte da un fuoco e si riflette internamente all'ellisse passa per l'altro fuoco.

Anche **la parabola è presente in natura**: gli oggetti in caduta libera seguono traiettorie a forma di parabola.
In ottica la proprietà della parabola è che tutti i raggi di luce paralleli all'asse che si riflettono internamente alla parabola sono tutti riflessi verso il fuoco (e viceversa). E' per questo che le stazioni per la trasmissione televisiva o radiofonica utilizzano parabole. Ed è sempre per questa proprietà che per la ricezione satellitare si utilizzano strumenti di ricezione chiamati "parabole", che sono sempre più diffuse sui tetti delle case.

D5.2 L'ellisse: rappresentazione grafica e altri argomenti

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Data l'equazione di una ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ per rappresentarla graficamente si devono trovare i semiassi. Tutto ciò è molto semplice, basta calcolare a (che è la radice del denominatore di x^2) e b (che è la radice del denominatore di y^2).

Esempio D5.1:

Trovare i semiassi e l'eccentricità dell'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Data l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ si ricava $a^2=25$ e $b^2=16$, dunque a=5 e b=4. Per tracciare l'ellisse si segnano sugli assi cartesiani i punti che delimitano l'ellisse sui semiassi, ossia (5;0), (-5;0), (0;4) e (0;-4) e unire tali punti.
Poiché $c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ i fuochi sono (3;0) e(-3;0). L'eccentricità è e=c /a=3/5=0,6=60%.
Questa ellisse è proprio quella rappresentata nella pagina precedente in figura D.2.

Esempio D5.2:
Trovare i semiassi dell'ellisse $9x^2+4y^2=36$.

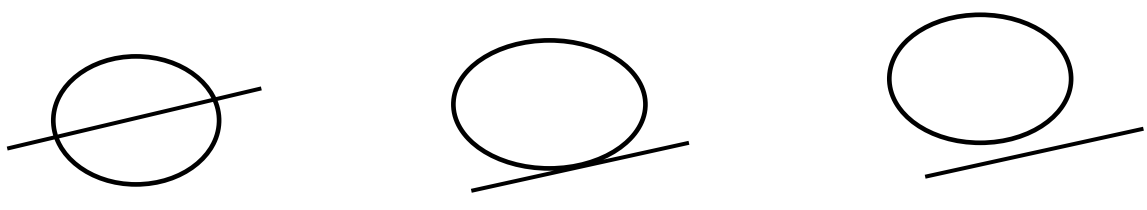
Questa ellisse è data in una forma differente, quindi si deve trasformarla nella forma usuale.
L'equazione dell'ellisse è data con un 1 a secondo membro. Per ottenere ciò partendo dall'equazione data $9x^2+4y^2=36$ si devono dividere ambo i membri per il termine noto: $9x^2+4y^2=36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}$, e semplificando $\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, da cui $a=\sqrt{4}=2$ e $b=\sqrt{9}=3$.

Esempio D5.3:
Trovare i semiassi dell'ellisse $10x^2+18y^2=24$.

Anche in questo caso si deve trasformare nella forma usuale l'ellisse data. Si dividono ambo i membri per 24.
$10x^2+18y^2=24 \Rightarrow \frac{10x^2}{24}+\frac{18y^2}{24}=\frac{24}{24} \Rightarrow \frac{5x^2}{12}+\frac{3y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{12}{5}}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$ da cui $a=\sqrt{\frac{12}{5}}$ e $b=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

INTERSEZIONI TRA ELLISSE E RETTA.

Una ellisse e una retta si possono incontrare in due punti, in 1 punto o in nessun punto.



2 punti di contatto (retta secante) 1 punto di contatto (retta tangente) 0 punti di contatto (retta esterna)

Fig. D5.3
Intersezioni tra ellisse e retta.

Per trovare i punti di contatto basta risolvere il sistema formato dalle equazioni di rette e ellisse.
Con il sistema si trovano ovviamente anche i punti di intersezione con circonferenze, parabole e ogni altra curva.

TROVARE LE RETTE TANGENTI A UNA ELLISSE PASSANTI PER UN PUNTO.
Data una ellisse e un punto è possibile che ci siano due rette tangenti all'ellisse passanti per il punto, 1 retta tangente o nessuna. Ciò dipende dalle posizioni reciproche di ellisse e punto.

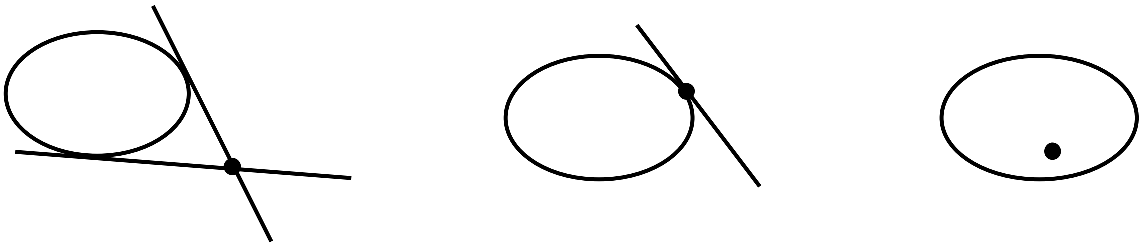


Fig. D5.4
Rette tangenti a una ellisse.

Il procedimento per determinare le rette tangenti è sempre lo stesso già visto per parabola e circonferenza.

- Si scrive il sistema tra l'ellisse e il fascio di rette passanti per il punto dato $y-y_1=m(x-x_1)$.
- Risolvendo il sistema viene fuori una equazione di secondo grado letterale *che non va risolta*.
- Si pone il $\Delta=0$ (dove $\Delta=b^2-4ac$).
- Si risolve e si trovano i valori di m.
- Si sostituiscono i valori di m trovati in $y-y_1=m(x-x_1)$ e si trovano così le rette tangenti.
- Se si trovano due valori di m ci saranno due rette tangenti, se se ne trova uno ci sarà una retta tangente. Se non se ne trovano non ci saranno rette tangenti.

APPARTENENZA DI UN PUNTO.
Un punto appartiene all'ellisse se sostituendo le sue coordinate nell'equazione dell'ellisse si ottiene una identità (niente di nuovo, vale anche per tutti gli altri grafici…)

COME TROVARE L'EQUAZIONE DI UNA ELLISSE.
Nell'equazione ci sono solo due parametri a e b. Per trovarli servono quindi due condizioni da mettere a sistema.

- Si conosce il Fuoco (c;0). condizione: $c=\sqrt{a^2-b^2}$
- Si conosce un Vertice (a;0) o (0;b) condizione: si conosce il valore di a o di b.
- Si conosce uno dei due semiassi condizione: si conosce il valore di a o di b.
- Si conosce un PUNTO (x_0; y_0) sostituire i valori x_0 e y_0 nell'eq. generica dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Si conosce una RETTA TANGENTE y=mx+q In questo caso si imposta il sistema tra la retta tangente y=mx+q e l'equazione generica dell'ellisse. Si trova una equazione di secondo grado che non va risolta ma si pone il $\Delta=0$, che è la condizione richiesta.
- Si conosce l'eccentricità condizione: $e=\frac{c}{a}$.

D5.3 Definizione di iperbole come luogo di punti

Def. Una **iperbole** è formata dall'insieme dei punti la cui differenza delle distanze da due punti detti fuochi è costante.

In figura quindi la differenza delle lunghezze d_1 e d_2 è costante per tutti i punti P facenti parte dell'iperbole. A differenze delle altre curve viste finora è formata da due rami. NON SONO DUE IPERBOLI, ma sono DUE RAMI della stessa iperbole.

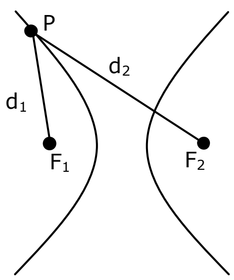


Fig. D5.5
Definizione di iperbole.

Per facilità quando si tratta questo argomento alle scuole superiori i due fuochi vengono presi sull'asse delle x o sull'asse delle y.

L'equazione di una **iperbole** è $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

- a rappresenta la distanza del vertice sull'asse x.
- costruendo il rettangolo in figura b rappresenta la lunghezza del semiasse sull'asse y.

- $c=\sqrt{a^2+b^2}$ rappresenta la distanza dei fuochi dall'origine.
- $y=\pm\frac{b}{a}x$ sono le equazioni delle due rette a cui il grafico dell'iperbole si avvicina sempre più senza toccarle mai. Sono dette ASINTOTI dell'iperbole.
- $e=\frac{c}{a}$ è l'eccentricità.

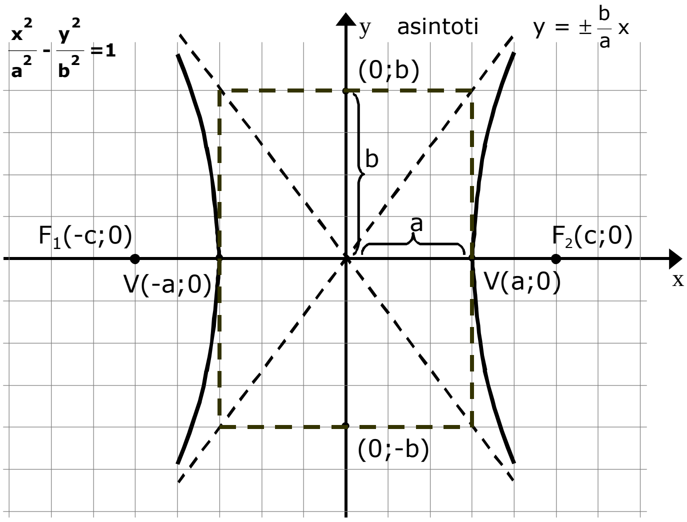


Fig. D5.6
Grafico di iperbole con
vertici , fuochi e asintoti.

Una iperbole è detta **equilatera** se a=b.

E' possibile tracciare iperboli equilatere che abbiano come asintoti rette parallele agli assi. L'equazione di una **iperbole equilatera** con asintoti paralleli agli assi è: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. ($c\neq0$)

Tale equazione è spesso detta **funzione omografica**.

- $y=\frac{a}{c}$ è l'asintoto orizzontale.
- $x=-\frac{d}{c}$ è l'asintoto verticale.
- Se a=0 e d=0 allora gli asintoti sono proprio gli assi.

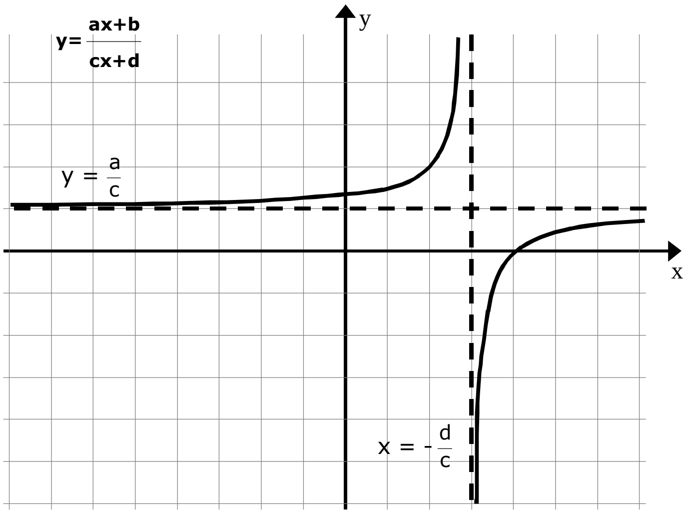


Fig. D5.7
Iperbole equilatera con
asintoti paralleli agli assi.

Osservazione:

Se $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ allora $c=\sqrt{a^2+b^2}$ e i fuochi si trovano sull'asse delle y e non sull'asse delle x. In questo caso l'eccentricità non si calcola più con la formula $e=\frac{c}{a}$ ma con la formula $e=\frac{c}{b}$.

L'eccentricità è un valore sempre maggiore di 1. Per le iperboli equilatere l'eccentricità ha valore $\sqrt{2}$.

L'iperbole è una forma presente in natura: le comete che entrano solo una volta nel sistema solare prima di allontanarsi per sempre dopo un unico passaggio in prossimità del sole descrivono traiettorie a forma di iperbole.

D5.4 l'iperbole: rappresentazione grafica e altri argomenti

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Data l'equazione di una iperbole per rappresentarla graficamente si devono trovare i semiassi. Tutto ciò è molto semplice, basta calcolare a (che è la radice del denominatore di x^2) e b (che è la radice del denominatore di y^2).

Esempio D5.4:

Trovare i semiassi e l'eccentricità dell'iperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Data l'iperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ si ricava che $a^2=9$ e $b^2=16$, da cui a=3 e b=4. Basta tracciare i punti che delimitano l'ellisse sui semiassi, ossia (3;0), (-3;0), (0;4) e (0;-4) e disegnare un rettangolo per ottenere gli asintoti.
Per tracciarne il grafico partire dai vertici (3;0), (-3;0) e avvicinarsi agli asintoti senza toccarli.
Poiché $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ i fuochi sono (5;0) e(-5;0). L'eccentricità è e=c /a=5/3≈1.6≈166%.
Questa iperbole è proprio quella rappresentata in figura D5.6.

Esempio D5.5:

Trovare i semiassi dell'iperbole $9x^2-4y^2=36$.

Data l'iperbole $9x^2-4y^2=36$ per trovare a e b occorre trasformarla nella forma usuale. Per questo si dividono ambo i membri per il termine noto: $9x^2-4y^2=-36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36}-\frac{4y^2}{36}=-\frac{36}{36}$, e semplificando $\Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$, da cui $a=\sqrt{4}=2$ e $b=\sqrt{9}=3$.

Si noti che l'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ con i fuochi sull'asse y.

Esempio D5.6:

Trovare i semiassi dell'iperbole $10x^2-18y^2=24$.

Come nell'esempio precedente si dividono ambo i membri per 24.

$10x^2-18y^2=24 \Rightarrow \frac{10x^2}{24}-\frac{18y^2}{24}=\frac{24}{24} \Rightarrow \frac{5x^2}{12}-\frac{3y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{12}{5}}-\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$ da cui $a=\sqrt{\frac{12}{5}}$ e $b=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Per le iperboli equilateri con asintoti paralleli agli assi si usano le formule viste per tracciare gli asintoti e poi basta trovare qualche punto assegnando valori alle x e trovando i corrispondenti valori delle y.

INTERSEZIONI.

Una iperbole e una retta si possono incontrare in due punti, in 1 punto o in nessun punto.
Per trovare i punti di contatto basta risolvere il sistema formato dalle equazioni di retta e iperbole.
Con il sistema si trovano ovviamente anche i punti di intersezione tra circonferenze, parabole e ogni altra curva.

TROVARE LE RETTE TANGENTI A UNA IPERBOLE PASSANTI PER UN PUNTO.

Data una iperbole e un punto è possibile che ci siano due rette tangenti all'iperbole passanti per il punto, 1 retta tangente o nessuna. Ciò dipende dalle posizioni reciproche di iperbole e punto.
Il procedimento è sempre lo stesso già visto per parabola, ellisse e circonferenza.

- Si scrive il sistema tra l'iperbole e il fascio di rette passanti per il punto dato $y-y_1=m(x-x_1)$.
- Risolvendo il sistema viene fuori una equazione di secondo grado letterale *che non va risolta*.
- Si pone il $\Delta=0$ (dove $\Delta=b^2-4ac$).
- Si risolve e si trovano i valori di m.
- Si sostituiscono i valori di m trovati in $y-y_1=m(x-x_1)$ e si trovano così le rette tangenti.
- Se si trovano quindi due valori di m ci saranno due rette tangenti, se se ne trova uno ci sarà una retta tangente. Se non se ne trovano non ci saranno rette tangenti.

APPARTENENZA DI UN PUNTO.

Un punto appartiene all'iperbole se sostituendo le sue coordinate nell'equazione dell'ellisse si ottiene una identità (niente di nuovo, vale anche per tutti gli altri grafici).

COME TROVARE L'EQUAZIONE DI UNA IPERBOLE.

Nell'equazione ci sono solo due parametri a e b. Per trovarli servono quindi due condizioni da mettere a sistema.

- Si conosce il Fuoco (c;0) condizione: $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
- Si conosce uno dei due semiassi o dei vertici condizione: si conosce il valore di a o di b.
- Si conoscono gli asintoti condizione: si conosce il valore di $\frac{b}{a}$.
- Si conosce un PUNTO (x_0; y_0) sostituire i valori x_0 e y_0 nell'eq. generica dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Si conosce una RETTA TANGENTE y=mx+q. In questo caso si imposta il sistema tra la retta tangente y=mx+q e l'equazione generica dell'iperbole. Si trova una equazione di secondo grado che non va risolta ma si pone il $\Delta=0$, che è la condizione richiesta.
- Si conosce l'eccentricità condizione: $e=\frac{c}{a}$.

COME TROVARE L'EQUAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASSI.

La formula di una iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi è $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

In realtà non serve trovare a, b, c e d perché dividendo tutto per c si ottiene:

$$y=\frac{\frac{a}{\cancel{c}}x+\frac{b}{\cancel{c}}}{\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}}x+\frac{d}{\cancel{c}}}=\frac{hx+k}{x+l} \text{ con } h=\frac{a}{c},\ k=\frac{b}{c},\ l=\frac{d}{c} \text{ e basta trovare h, k e l.}$$

- Si conosce uno dei due asintoti condizione: si conosce il valore di $h=\frac{a}{c}$ o di $l=-\frac{d}{c}$.
- Si conosce un PUNTO (x_0; y_0) sostituire i valori x_0 e y_0 nell'eq. generica dell'iperbole $y=\frac{hx+k}{x+l}$.
- Si conosce una RETTA TANGENTE y=mx+q. In questo caso si imposta il sistema tra la retta tangente y=mx+q e l'equazione generica dell'iperbole. Si trova una equazione di secondo grado che non va risolta ma si pone il $\Delta=0$, che è la condizione.

D5.5 Le coniche

Dopo la retta si sono studiate le equazioni di parabola, circonferenza, ellisse e iperbole.
Sono tutte equazioni di secondo grado in due incognite. Appartengono alla famiglia delle curve CONICHE, studiate da Apollonio di Perga nel III sec. a.c.
Ai tempi degli antichi greci non esisteva l'algebra come la conosciamo oggi, quindi tutti i risultati trovati da Apollonio riguardano la forma geometrica di tali curve.
L'idea di Apollonio è la seguente: si prenda un cono infinito (in ambo le direzioni) e lo si tagli con un piano. La sezione che ne risulta è una conica. A seconda dell'inclinazione del piano si avrà un cerchio, una ellisse, una parabola, una iperbole. Se il piano passa per l'origine del cono allora si hanno delle coniche degeneri.

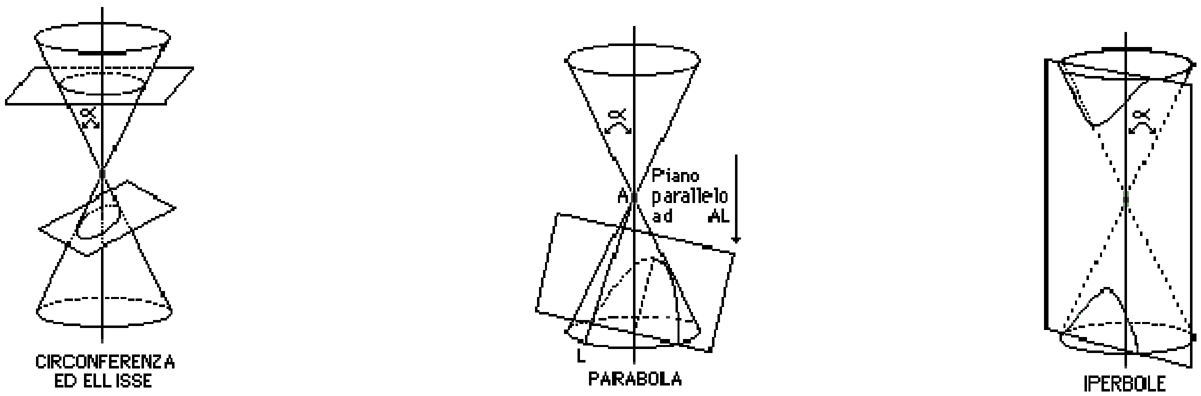


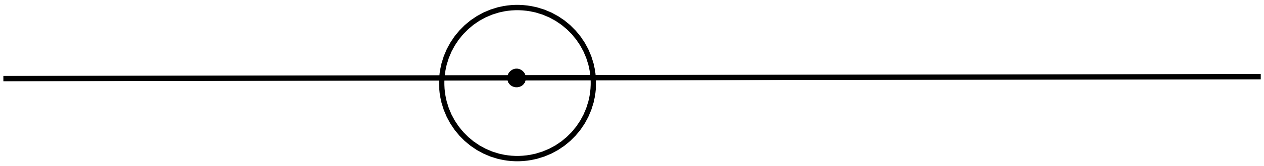
Fig. D5.8
Coniche come intersezioni
tra piano e cono.

Le coniche si rappresentano algebricamente (ma questo è stato scoperto molto tempo dopo) per mezzo di equazioni di secondo grado in due variabili, ossia:

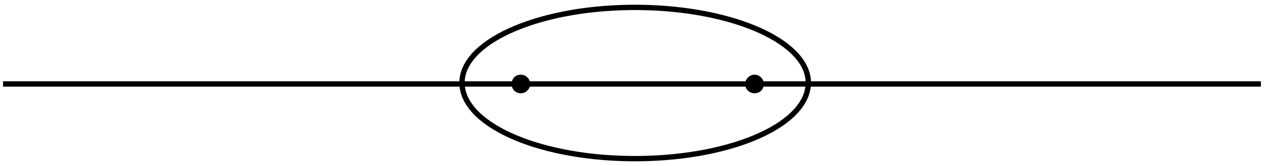
$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

Al variare dei sei parametri a, b, c, d, e, f si ottengono tutte le coniche possibili del piano incluse le degeneri, ma la trattazione di questo argomento esula dalla trattazione.

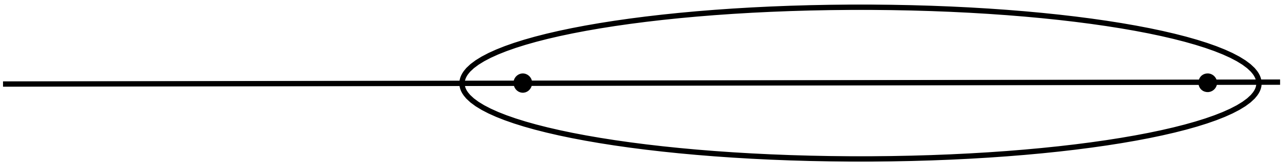
Un'ultima osservazione riguarda la posizione dei fuochi.
Si cerchi di immaginare come cambia la conica spostando uno dei due fuochi. Si parte da una circonferenza, quindi con i fuochi coincidenti nel centro. La figura D5.9 rappresenta questo concetto in maniera intuitiva, non ne viene data la dimostrazione.



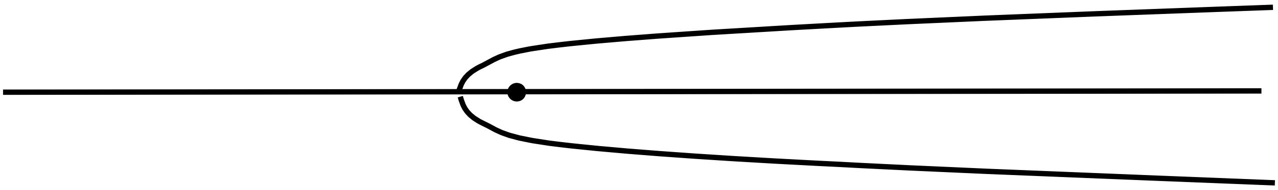
Circonferenza.



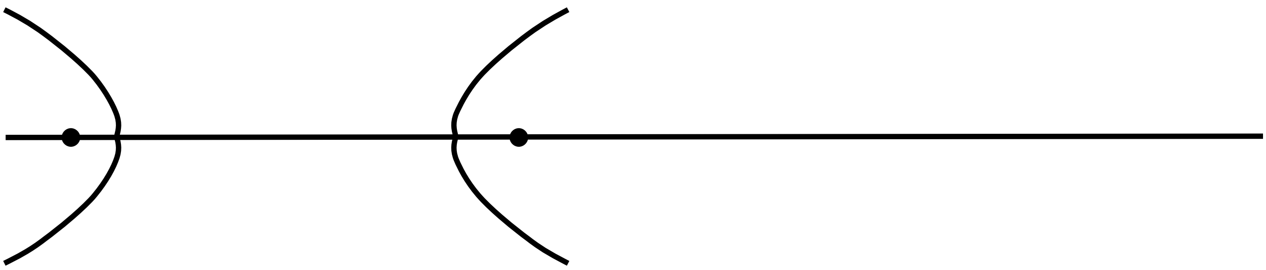
Si sposta verso destra un fuoco e si ottiene un’ellisse.



Spostando ulteriormente il fuoco l’ellisse si allunga.



Spostando il fuoco all’infinito si ottiene una parabola.



Il fuoco torna dall’altro lato e la curva diventa una iperbole.

Fig. D5.9
Coniche al variare dei fuochi.

D5.6 Luoghi geometrici

Un luogo geometrico è l’insieme dei punti del piano per cui vale una certa proprietà.
Quindi sono luoghi geometrici la retta, la parabola, l’ellisse, la circonferenza e l’iperbole.
Il problema che si vuole affrontare è: come trovare l’equazione di un luogo geometrico a partire dalla proprietà.
Ecco due esempi:

Esempio D5.7

PARABOLA:
La parabola è l’insieme dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.

Sia un punto della parabola generico P(x, y), il fuoco il punto F(x_0, y_0) e la direttrice la retta r: y=k (y-k=0 in forma esplicita con a=0, b=1 e c=k). Equidistante vuol dire che la distanza PF e la distanza Pr sono uguali.

$\overline{PF}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ $\qquad\qquad$ $\overline{Pr}=\frac{|y-k|}{\sqrt{1}}=|y-k|$.

Si pongono queste due distanze uguali tra loro.

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|y-k|$$
$$\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2=(|y-k|)^2$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(y-k)^2$$
$$x^2+x_0^2-2xx_0+y^2+y_0^2-2yy_0=y^2+k^2-2ky$$
$$x^2+x_0^2-2xx_0+y^2+y_0^2-2yy_0-y^2-k^2+2ky=0$$
$$y(2k-2y_0)=-x^2-2xx_0-x_0^2-y_0^2+k^2$$
$$y=-\frac{x^2}{2k-2y_0}-\frac{2xx_0}{2k-2y_0}+\frac{-x_0^2-y_0^2+k^2}{2k-2y_0}$$ e ponendo $a=-\frac{1}{2k-2y_0}$ $\quad b=-\frac{2x_0}{2k-2y_0}$ $\quad c=\frac{-x_0^2-y_0^2+k^2}{2k-2y_0}$

si ottiene

$$y=ax^2+bx+c$$

esattamente come ci si aspettava.

Non sempre le cose sono così semplici. Si vede qui un altro esempio.

Esempio D5.8:

Sia il punto **A(-1,0)** e il punto **C(O,k)**, con **k** numero reale. Trovare l'equazione del luogo dei punti **M** ed **N** comuni alla retta **AC** e alla circonferenza di centro **C** e passante per **O**. (Esame concorso ordinario '90).

Retta AC: $\frac{y-0}{k-0}=\frac{x+1}{0+1} \Rightarrow \frac{y}{k}=\frac{x+1}{1} \Rightarrow y=kx+k$ $\qquad$ Il raggio della circonferenza è la distanza tra C e O ossia k.

Circonferenza centro C passante per O $\qquad (x-0)^2+(y-k)^2=k^2$

I punti comuni si ottengono impostando il sistema e facendo sparire k.

$$\begin{cases} y=k(x+1) \\ (x-0)^2+(y-k)^2=k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{y}{x+1} \\ (x-0)^2+\left(y-\frac{y}{x+1}\right)^2=\left(\frac{y}{x+1}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\left(\frac{y(x+1)-y}{x+1}\right)^2=\left(\frac{y}{x+1}\right)^2 \Rightarrow x^2+\left(\frac{xy+y-y}{x+1}\right)^2=\left(\frac{y}{x+1}\right)^2 \Rightarrow x^2+\frac{x^2y^2}{(x+1)^2}=\frac{y^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2y^2}{(x+1)^2}=\frac{y^2}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(x^2+2x+1)+x^2y^2=y^2}{(x+1)^2} \Rightarrow x^4+2x^3+x^2+x^2y^2-y^2=0$$

Tale curva è di quarto grado e questo è il suo grafico.

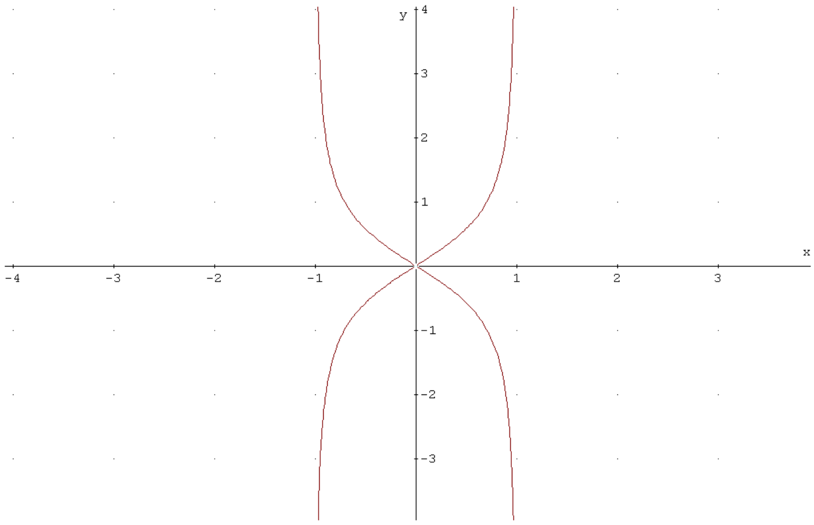


Fig. D5.10
Grafico della curva piana
$x^4+2x^3+x^2+x^2y^2-y^2=0$

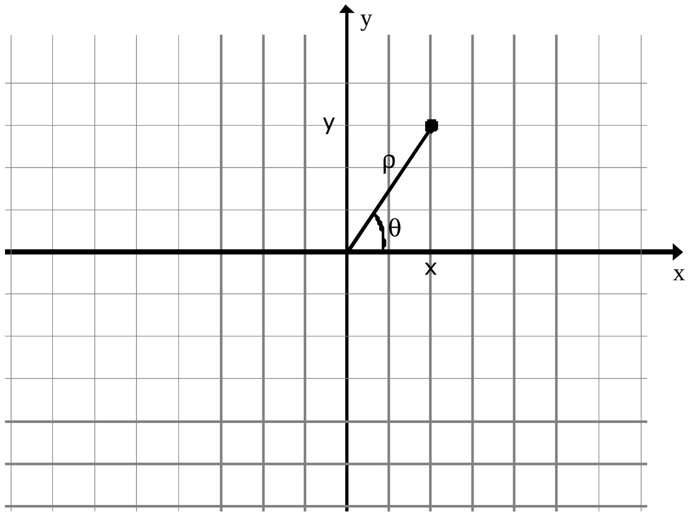
Tali curve sono dette curve piane e di solito non si studiano alle scuole superiori.

D5.7 Coordinate polari

E' possibile determinare univocamente un punto P(x,y) sul piano senza conoscere le sue coordinate cartesiane ma conoscendo invece:

- La sua distanza ρ dall'origine.
- L'angolo θ che forma la retta OP con l'asse x.

Un punto in coordinate polari è indicato con $P(\rho,\theta)$.



PASSAGGIO DA COORDINATE POLARI A COORDINATE CARTESIANE
Conoscendo un punto $P(\rho,\theta)$ le sue coordinate cartesiane, si ricavano dalla trigonometria:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

PASSAGGIO DA COORDINATE CARTESIANE A COORDINATE POLARI
Conoscendo un punto P(x,y) le sue coordinate polari sono:

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{\rho} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\rho} \end{cases}$$

Infatti ρ si trova con il teorema di Pitagora, mentre θ è espresso in funzione del suo seno e del suo coseno.

<u>Esempio D5.9</u>

Trasformare da coordinate polari in coordinate cartesiane il punto $P\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\begin{cases} x=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=2\cdot-\dfrac{1}{2}=-1 \\ y=2\sin\dfrac{2\pi}{3}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \end{cases}$$

Il punto cercato è dunque $P\left(-1,\sqrt{3}\right)$.

<u>Esempio D5.10</u>
Trasformare da coordinate cartesiane in coordinate polari il punto $P(-1,-1)$.

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\rho}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

L'angolo con seno e coseno entrambi uguali a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ è $\frac{5\pi}{4}$, per cui il punto cercato è $P\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$.

D5.8 Curve in forma parametrica

Una curva si dice espressa in forma parametrica quando sia la x che la y (o la ρ e la θ) dipendono da un parametro t.

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho=\rho(t) \\ \theta=\theta(t) \end{cases}$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA

Una retta ha equazione parametrica $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases}$,

in cui (x_1,y_1) è un qualsiasi punto della retta e i parametri l e m fanno le veci del coefficiente angolare.
Se $l=0$ e $m\neq0$ allora la retta rappresentata è verticale ($x=x_1$).
Se $l\neq0$ e $m=0$ allora la retta rappresentata è orizzontale ($y=y_1$).
Se $l=m=0$ allora non è rappresentata una retta ma il punto $P(x_1, y_1)$.

<u>Esempio D5.11</u>

Si esprima la retta $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases}$ in forma implicita.

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2t \\ t=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2(y+3) \\ t=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y-6 \\ t=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+5=0 \\ t=y+3 \end{cases}.$$

<u>Esempio D5.12</u>

Si esprima la retta y=3x-2 in forma parametrica. $\begin{cases} x=t \\ y=3t-2 \end{cases}$.

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA CIRCONFERENZA
Una circonferenza di centro l'origine ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}, \ t\in[0,2\pi],$$

ed è evidente che r e t fanno le veci di ρ e θ nella rappresentazione polare.
Una circonferenza generica di centro (x_0,y_0) ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos t \\ y=y_0+r\sin t \end{cases}, \ t\in[0,2\pi].$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELL'ELLISSE

Una ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}, \ t\in[0,2\pi].$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELL'IPERBOLE

Una iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos t}, \\ y=b\cdot tgt \end{cases} \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA PARABOLA
La parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ ha ovviamente equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=t \\ y=at^2+bt+c \end{cases}.$$

Quando l'equazione di una curva non è espressa in funzione di x e y ma in funzione di ρ e θ si ha l'equazione in coordinate polari.

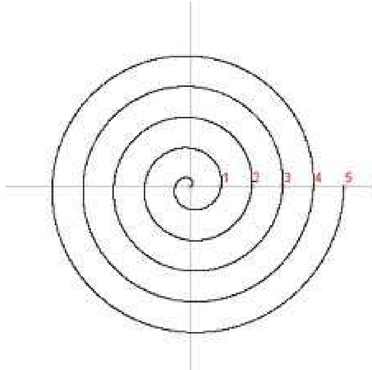
<u>Esempio D5.13</u>
Si scriva l'equazione della circonferenza $x^2+y^2+2x-4y-15=0$ in coordinate polari.

Sapendo che $\begin{cases} x=r\cos t=\rho\cos\theta \\ y=r\sin t=\rho\sin\theta \end{cases}$ si sostituiscono tali valori nell'equazione della circonferenza, ottenendo:

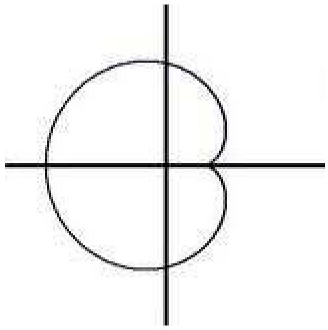
$$x^2+y^2+2x-4y-15=0$$
$$(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2+2(\rho\cos\theta)-4(\rho\sin\theta)-15=0$$
$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta+2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-15=0$$
$$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho(2\cos\theta-4\sin\theta)-15=0$$
$$\rho^2+\rho(2\cos\theta-4\sin\theta)-15=0$$

E’ analogo il procedimento per le altre curve.
ALTRE CURVE

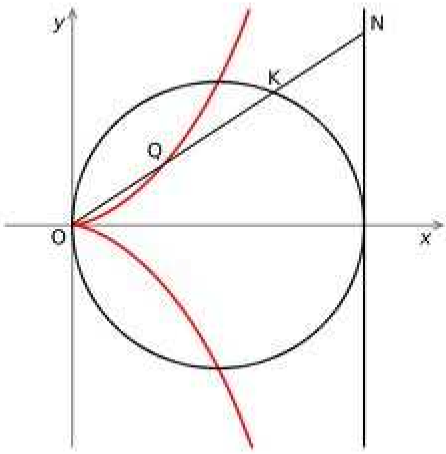
Esempio D5.14 (Spirale di Archimede)
Si indica con il termine di Spirale di Archimede la curva: $\rho = a\theta$, in cui $a \in \mathbb{R}^+$ è detto passo della spirale.
Qui a lato in figura è rappresentata la spirale con a=1.



Esempio D5.15 (Cardioide)
Si indica con il termine di Cardioide la curva: $\rho = a(1+\cos\theta)$, in cui $a \in \mathbb{R}^+$.
Qui a lato in figura è rappresentata la cardioide con a=1.



Esempio D5.15 (Cissoide di Diocle)
Si chiama cissoide di Diocle la curva che si ottiene con la seguente costruzione geometrica:
Data una circonferenza di diametro OA=a, si conduca per O una retta qualsiasi r e da A la tangente d alla circonferenza. La retta r incontra ulteriormente la circonferenza in un punto K e la tangente d in N. Preso su r un segmento OQ uguale in valore e segno a KN, il punto Q, al variare della retta r attorno ad O, descrive una curva che si chiama Cissoide di Diocle.
Essa ha equazione $\rho = a\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ ed è qui a lato rappresentata nel caso in cui a=1.



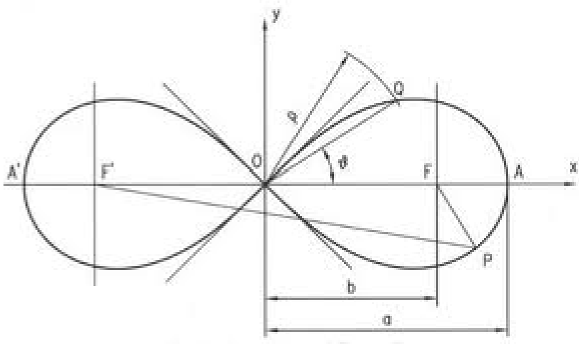
Esempio D5.16 (Lemniscata di Bernoulli)
Si chiama lemniscata di Bernoulli il luogo geometrico dei punti del piano tali che il prodotto delle loro distanze da due punti fissi F e F’, detti fuochi, è uguale al quadrato della semidistanza focale.

Indicando con c=d(FF’) ha equazione cartesiana:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=c^2 .$$

L’equazione in coordinate polari è invece:

$$\rho^2 = 2c^2\cos(2\theta) .$$



La posizione del sole ad una ora fissata del giorno descrive nel corso dell’anno una traiettoria che è una lemniscata. Le lemniscate sono per questa ragione utilizzate per la progettazione e la realizzazione delle meridiane.