D4. Circonferenza

D4.1 Definizione di circonferenza come luogo di punti

Definizione: una **circonferenza** è formata dai punti equidistanti da un punto detto centro.
La distanza (costante) è detta raggio.
Ci sono due possibili equazioni per rappresentare una circonferenza.

$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ e $\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$

in cui a, b e c sono parametri, α e β sono le coordinate del centro della circonferenza e r è il raggio della circonferenza.

Lo schema seguente spiega come passare da una equazione all'altra e al grafico della circonferenza

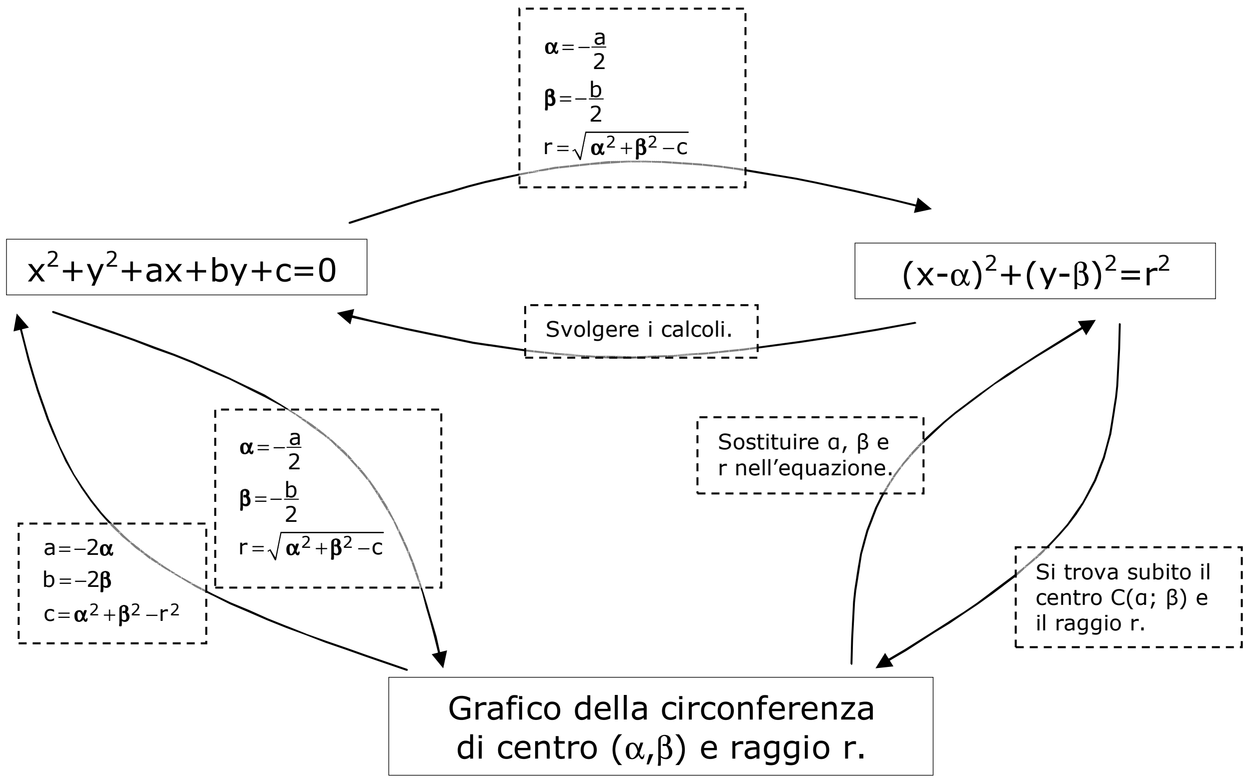


Fig. D4.1
Come passare dalle equazioni della circonferenza al grafico e viceversa.

D4.2 Rappresentazione grafica

In questo paragrafo si vedranno degli esempi di come si può passare da una delle due equazioni all'altra e di come da queste equazioni si possa tracciare il grafico della circonferenza.

Esempio D4.1:
Data l'equazione $x^2+y^2-2x+4y-15=0$ trovare l'altra equazione della circonferenza e tracciarne il grafico.

Per trovare l'altra equazione e il grafico si usano le formule viste in figura D4.1.

$\alpha=-\frac{a}{2}$ $\quad\beta=-\frac{b}{2}$ $\quad r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$

Poiché a=-2, b=4 e c=-15 si ha:

$\alpha=-\frac{-2}{2}=1$ $\quad\beta=-\frac{4}{2}=-2$

$r=\sqrt{1^2+(-2)^2-(-15)}=\sqrt{1+4+15}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Da cui $r^2=\left(\sqrt{20}\right)^2=20$

L'equazione della circonferenza è quindi: $(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

Il centro è C(1;-2). Il raggio è $r=2\sqrt{5}$ ossia 2 volte la diagonale di un rettangolo 1x2. Inoltre è circa 4,4. Ciò permette di trovare molti punti per i quali passa esattamente la circonferenza.

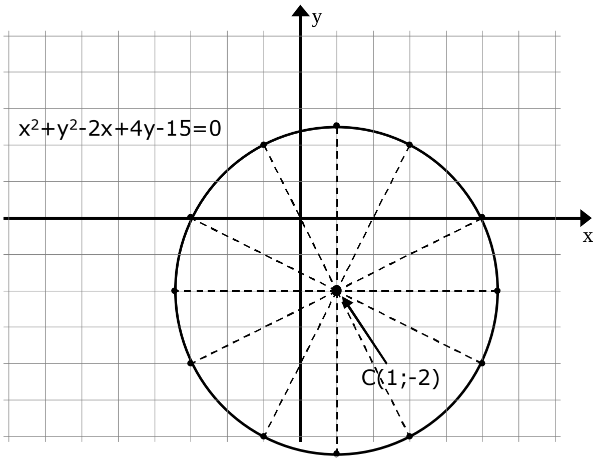


Fig. D4.2
Grafico della circonferenza
$(x-1)^2+(y+2)^2=20$.

<u>Esempio D4.2:</u>
Data l'equazione $(x+1)^2+(y-3)^2=2$ trovare l'altra equazione della circonferenza e tracciarne il grafico.

Per trovare l'altra equazione si svolgono i calcoli:
$x^2+1+2x+y^2+9-6y-2=0$
$x^2+y^2+2x-6y+8=0$
L'equazione della circonferenza è quindi: $x^2+y^2+2x-6y+8=0$
Direttamente dal testo si trovano α=-1, β=3; il centro è quindi C(-1;3) e il raggio è $r=\sqrt{2}$ ossia la diagonale di un quadrato 1x1.
Inoltre $r=\sqrt{2} \approx 1{,}4$. Ciò permette di trovare molti punti per i quali passa esattamente la circonferenza.

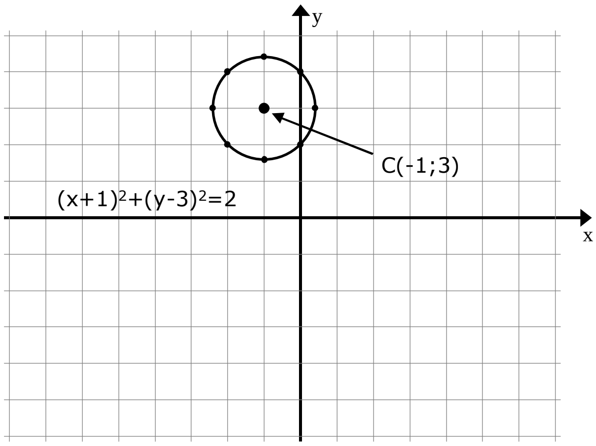


Fig. D4.3
Grafico della circonferenza
$(x+1)^2+(y-3)^2=2$.

<u>Esempio D4.3:</u>
Dato il grafico in figura D4.4 trovare le due equazioni della circonferenza.

Si vede dal grafico che il centro è il punto C(-2;0) quindi si ha α=-2; β=0; il raggio è 3.

Per trovare l'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si usano le formule per trovare a, b e c.
$A = -2\alpha = -2\cdot(-2) = 4$
$b = -2\beta = -2(0) = 0$
$c= \alpha^2+\beta^2-r^2 = (4)^2+(0)^2-(3)^2 = 16+0-9 = 7$
Quindi l'equazione cercata è
$x^2+y^2+4x+7=0$

Per trovare l'equazione $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$
basta sostituire al posto di α, β e r i valori che si sono ricavati dal grafico.
L'equazione della circonferenza è quindi:
$(x+2)^2+(y-0)^2=9$

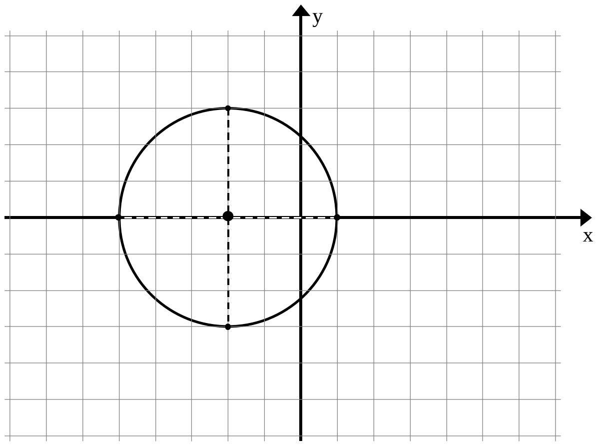


Fig. D4.4
Determinare il grafico della circonferenza in figura.

<u>Esempio D4.4:</u>
Data l'equazione $x^2+y^2-x+2y+10=0$ trovare l'altra equazione della circonferenza e tracciarne il grafico.

Per trovare l'altra equazione e il grafico si usano le formule viste sopra.

$\boldsymbol{\alpha}=-\frac{a}{2}$ $\quad\boldsymbol{\beta}=-\frac{b}{2}$ $\quad r=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2-c}$

Poiché a=-1, b=2 e c=10 si ha:

$\boldsymbol{\alpha}=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\boldsymbol{\beta}=-\frac{2}{2}=-1$

$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2-(10)}=\sqrt{\frac{1}{4}+1-10}=\sqrt{\frac{1+4-40}{4}}=\sqrt{\frac{-35}{4}}$??

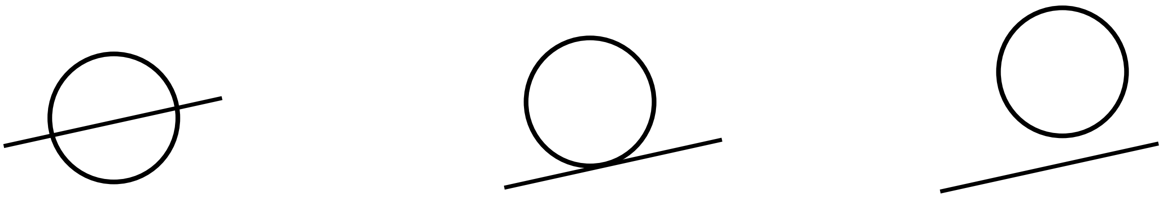
Non è possibile calcolare la radice di un numero negativo, quindi il raggio non esiste!
L'equazione che è stata data nel testo del problema non rappresenta quindi una circonferenza.

Da questo esempio si deduce quindi che:

- Tutte le circonferenze hanno una equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e del tipo $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$
- Non tutte le equazioni del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$ rappresentano una circonferenza. Affinché rappresentino una circonferenza è necessario che $\alpha^2+\beta^2-c$ sia un numero positivo.
- Non tutte le equazioni del tipo$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ rappresentano una circonferenza. Affinché rappresentino una circonferenza è necessario che r^2 sia un numero positivo.

D4.3 Intersezioni circonferenza-retta e tra circonferenze

Una circonferenza e una retta si possono incontrare in due punti, in 1 punto o in nessun punto.



2 punti di contatto 1 punto di contatto 0 punti di contatto

Fig. D4.5
Intersezioni tra retta e circonferenza.

Per trovare i punti di contatto si può procedere per via algebrica e per via geometrica.
VIA ALGEBRICA – si risolve il sistema composto dall'equazione della retta e dall'equazione della circonferenza.

VIA GEOMETRICA – si disegnano circonferenza e retta e, se si vedono esattamente, si trovano i punti d'intersezione. Se non si determina esattamente dal grafico il punto di intersezione allora l'unico modo di determinare il punto d'intersezione è risolvere il sistema.

Esempio D4.5:
Trovare i punti di intersezione tra la retta y=x+2 e la circonferenza $x^2+y^2-4x-4y-2=0$.

VIA ALGEBRICA – Si risolve il sistema formato dalle equazioni di retta e circonferenza.

$$\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+y^2-4x-4y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2+(x+2)^2-4x-4(x+2)-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2+x^2+4+4x-4x-4x-8-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ 2x^2-4x-6=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ (x-3)(x+1)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x_1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=3+2=5 \\ x_1=3 \end{cases} \Rightarrow (3;5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2=-1+2=1 \\ x_2=-1 \end{cases} \Rightarrow (-1;1)$$

In questo caso i punti di contatto trovati sono due.

VIA GEOMETRICA – si tracciano circonferenza e retta e si trovano i punti d'intersezione. Se tali punti non sono visibili esattamente l'unico procedimento sicuro è quello algebrico.

Si traccia la retta y=x+2 con i soliti metodi.
m=1, q=2. Si parte da 2 e poi si sale di 1 e ci si sposta verso destra di 1.

Si trovano il centro e il raggio della circonferenza e si traccia quindi il suo grafico.

$\boldsymbol{\alpha}=-\frac{-4}{2}=2 \qquad \boldsymbol{\beta}=-\frac{-4}{2}=2$

$r=\sqrt{2^2+2^2-(-2)}=\sqrt{4+4+2}=\sqrt{10}$

Il raggio è la diagonale di un rettangolo 1x3.

I punti d'intersezione sono A(-1;1) e (3;5), ossia gli stessi trovati con il procedimento algebrico.

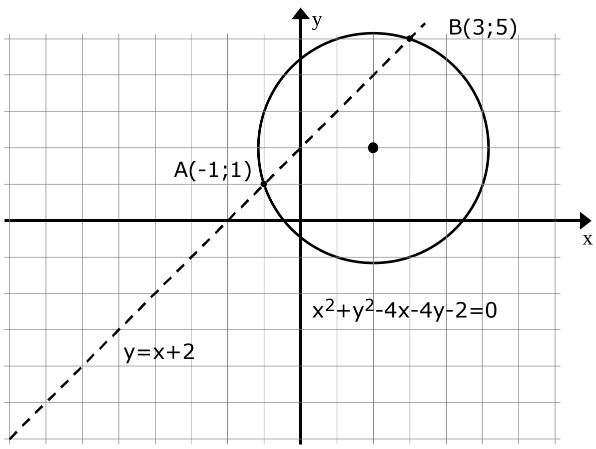


Fig. D4.6
Intersezioni tra la retta y=x+2 e la circonferenza $x^2+y^2-4x-4y-2=0$.

Esempio D4.6:
Trovare i punti di intersezione tra la retta $y=-\frac{3}{2}x+3$ e la circonferenza $(x+1)^2+(y+2)^2=13$.

VIA ALGEBRICA – Si risolve il sistema formato dalle equazioni di retta e circonferenza.

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ (x+1)^2+\left(-\frac{3}{2}x+3+2\right)^2=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ x^2+1+2x+\frac{9}{4}x^2+25-15x-13=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ \frac{4x^2+4+8x+9x^2+100-60x-52=0}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ 13x^2-52x+52=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ 13(x^2-4x+4)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+3 \\ 13(x-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-\frac{3}{2}(2)+3=0 \\ x_1=2 \end{cases} \Rightarrow (2;0)$$

In questo caso il punto di contatto è solamente uno, il punto (2;0).

VIA GEOMETRICA

Si traccia la retta $y=-\frac{3}{2}x+3$ con i soliti metodi.

$m=-\frac{3}{2}$, q=+3. Si parte da +3 e poi si scende di 3 e ci si sposta verso destra di 2.

Direttamente dall'equazione della circonferenza $(x+1)^2+(y+2)^2=13$ si trovano α=-1, β=-2; il centro è quindi C(-1;-2) e il raggio è $r=\sqrt{13}$ ossia la diagonale di un rettangolo 2x3.

Il punto d'intersezione è (2;0) ossia lo stesso trovato con il procedimento algebrico.

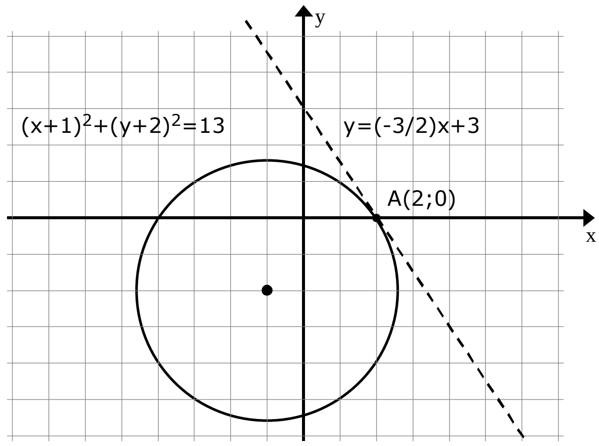


Fig. D4.7
Intersezioni tra la retta $y=-\frac{3}{2}x+3$ e la circonferenza $(x+1)^2+(y+2)^2=13$.

<u>Esempio D4.7</u>:
Trovare i punti di intersezione tra la retta y=2x+3 e la circonferenza $x^2+y^2-8x+4y+12=0$.

VIA ALGEBRICA – Si risolve il sistema formato dalle equazioni di retta e circonferenza.

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ x^2+y^2-8x+4y+12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ x^2+(2x+3)^2-8x+4(2x+3)+12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ x^2+4x^2+9+12x-8x+8x+12+12=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ 5x^2+12x+33=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ x_{12}=\frac{-12\pm\sqrt{(12)^2-4(5)(33)}}{2(5)}=\frac{-12\pm\sqrt{144-660}}{10}=\frac{-12\pm\sqrt{-516}}{10} \end{cases}$$

L'equazione è impossibile, poiché il radicando è un numero negativo.
In questo caso quindi non ci sono punti di contatto. Lo si può verificare per via geometrica:

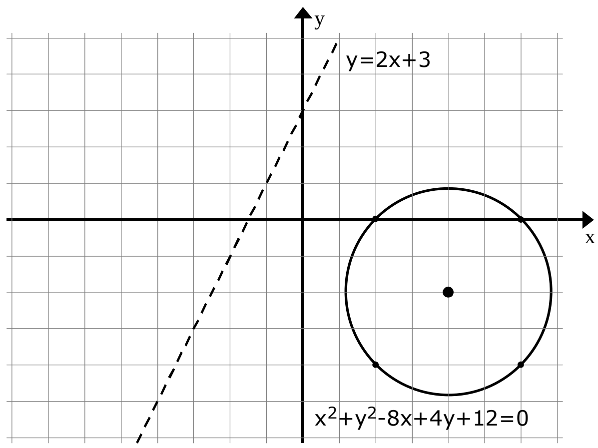


Fig. D4.8
Intersezioni tra la retta y=2x+3 e la circonferenza $x^2+y^2-8x+4y+12=0$.

VIA GEOMETRICA

Si traccia la retta y=2x+3 con i soliti metodi.
m=2, q=3. Si parte da 3 e poi si sale di 2 e ci si sposta verso destra di 1.
Si trovano il centro e il raggio della circonferenza e si traccia quindi il suo grafico.

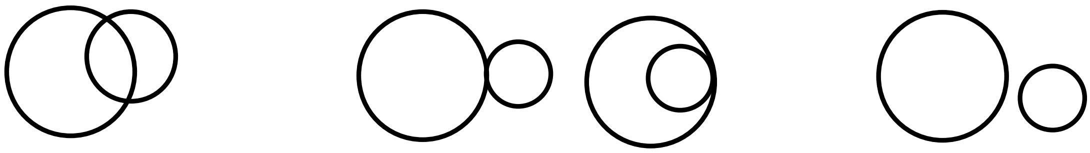
$\alpha=-\frac{-8}{2}=4 \qquad \beta=-\frac{4}{2}=-2$

$r=\sqrt{4^2+(-2)^2-(12)}=\sqrt{16+4-12}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Il centro è C(4;-2).
Il raggio è il doppio della diagonale di un quadrato 1x1.

Si vede quindi anche dal grafico che non ci sono punti di intersezione.

E' possibile trovare per via algebrica e geometrica anche i punti d'incontro tra due circonferenze.
Il sistema per via algebrica sarebbe di quarto grado, ed avrebbe fino a quattro soluzioni. In realtà al massimo le soluzioni saranno due.
Ecco tutti i casi possibili:



2 punti di contatto　　1 punto di contatto　　0 punti di contatto

Fig. D4.9
Intersezioni tra due circonferenze.

E' possibile trovare per via algebrica e geometrica anche i punti d'incontro tra una circonferenza e una parabola.
In questo caso il sistema di quarto grado può avere fino a quattro soluzioni. Le equazioni di quarto grado verranno però trattate successivamente quindi tale argomento non verrà approfondito.

D4.4 Alcune osservazioni su a, b e c

I coefficienti a, b e c in $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e α, β e r in $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ hanno un significato geometrico:

Se **a=0 (α=0)** il centro si trova sull'asse delle y; l'equazione è $x^2+y^2+by+c=0$ (manca la x) oppure $x^2+(y-\beta)^2=r^2$.

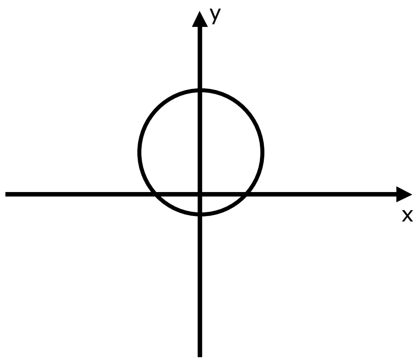


Fig. D4.10
Significato geometrico del coefficiente a=0.

Se **b=0 (β=0)** il centro si trova sull'asse delle x; l'equazione è $x^2+y^2+ax+c=0$ (manca la y) oppure $(x-\alpha)^2+y^2=r^2$.

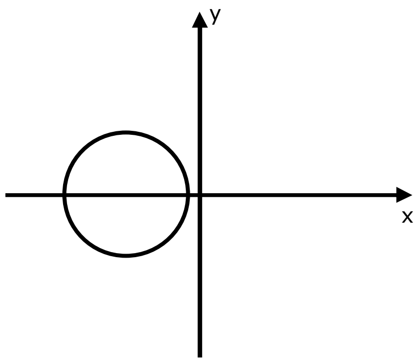


Fig. D4.11
Significato geometrico del coefficiente b=0.

Se **a=b=0 (α=β=0)** il centro si trova nell'origine quindi l'equazione è $x^2+y^2+c=0$ (mancano x e y) oppure $x^2+y^2=r^2$.

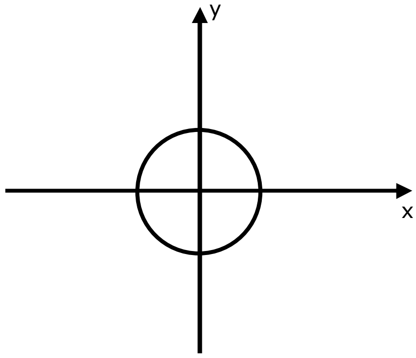


Fig. D4.12
Significato geometrico dei coefficienti a=b=0.

Se **c=0** la circonferenza passa per l'origine quindi l'equazione è $x^2+y^2+ax+by=0$

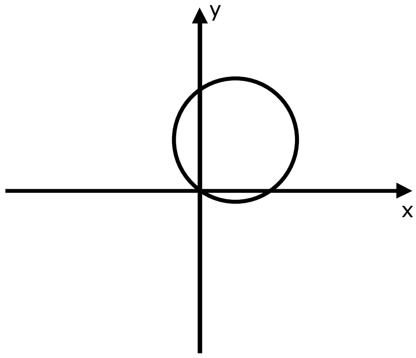


Fig. D4.13
Significato geometrico del coefficiente c=0.

Se **a=c=0 (α=0)** il centro si trova sull'asse delle y e passa per l'origine e l'equazione è $x^2+y^2+by=0$.

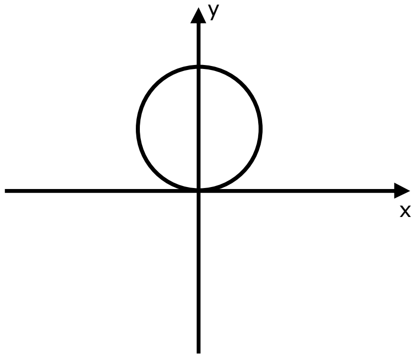


Fig. D4.13
Significato geometrico del coefficiente a=c=0.

Se **b=c=0 (β=0)** il centro si trova sull'asse delle x e passa per l'origine e l'equazione è $x^2+y^2+ax=0$

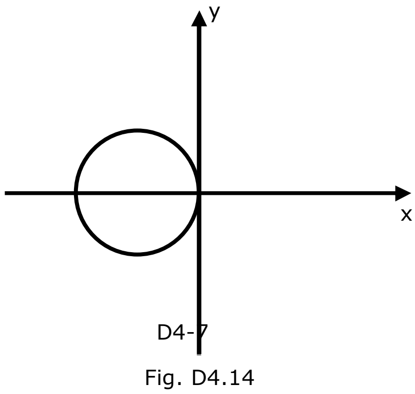
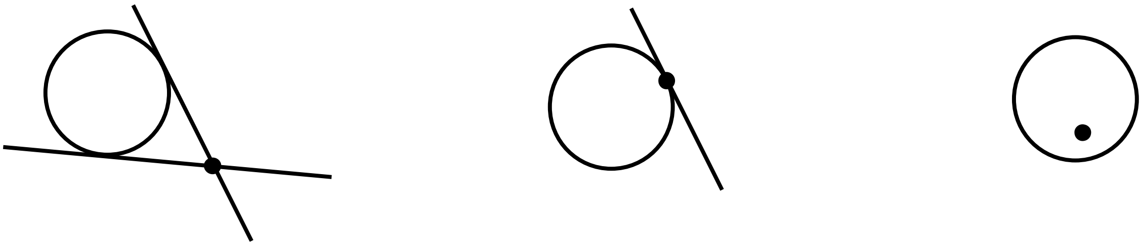


Fig. D4.14
Significato geometrico dei coefficienti b=c=0.

D4.5 Rette tangenti a una circonferenza

Data una circonferenza e un punto è possibile che ci siano due rette tangenti alla circonferenza passanti per il punto, una retta tangente o nessuna. Ciò dipende dalle posizioni reciproche di circonferenza e punto.



2 rette tangenti | 1 retta tangente | nessuna retta tangente

Fig. D4.15
Significato geometrico dei coefficienti b=c=0.

Si noti che il raggio passante per il punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente.

La prima cosa da fare è sostituire le coordinate del punto nel polinomio $x^2+y^2+ax+by+c$.
Se viene un numero positivo il punto è esterno (due rette tangenti).
Se viene zero il punto è sulla circonferenza (una retta tangente).
Se viene un numero negativo il punto è interno (non ci sono rette tangenti).

Per trovare l'equazione delle rette tangenti a una circonferenza passanti per un punto **ESTERNO** si usa il seguente **procedimento** (che è lo stesso procedimento già visto per la parabola).

- Si scrive il sistema tra la circonferenza e il fascio di rette passanti per il punto dato $y-y_1=m(x-x_1)$.
- Risolvendo il sistema viene fuori una equazione di secondo grado letterale *che non va risolta.*
- Si pone il $\Delta=0$ (dove $\Delta=b^2-4ac$)
- Si risolve e si trovano i valori di m.
- Si sostituiscono i valori di m trovati in $y-y_1=m(x-x_1)$ e si trovano così le rette tangenti.

Se si trovano quindi due valori di m ci saranno due rette tangenti, se se ne trova uno ci sarà una retta tangente. Se non se ne trovano non ci saranno rette tangenti. Il procedimento funziona anche se il punto si trova sulla circonferenza o se si trova all'interno, però esistono metodi più semplici per trovare la retta tangente (se c'è) in questi casi.

Per trovare l'equazione della retta tangente in un punto **sulla circonferenza** si usa il seguente procedimento:
- Si trova la retta passante per il centro e il punto dato (formula retta per due punti)
- Si trova la retta passante per il punto dato perpendicolare alla retta precedente (formula retta per un punto)

Fig. D4.16
Costruzione geometrica della retta tangente alla circonferenza per un suo punto.

Esempio D4.8:
Trovare le rette tangenti a $x^2+y^2+4y-1=0$ passanti per il punto A(3;-1).

Si sostituiscono i valori (3;-1) nel polinomio $x^2+y^2+4y-1=0$.
$(3)^2+(-1)^2+4(-1)-1=9+1-4-1=5$
quindi il punto si trova all'esterno della circonferenza e le rette tangenti sono due.

$\alpha=-\frac{0}{2}=0 \qquad \beta=-\frac{4}{2}=-2 \qquad r=\sqrt{0^2+(-2)^2-(-1)}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$$\begin{cases} x^2+y^2+4y-1=0 \\ y+1=m(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4y-1=0 \\ y=mx-3m-1 \end{cases}$$

$x^2+(mx-3m-1)^2+4(mx-3m-1)-1=0$

$x^2+m^2x^2+9m^2+1-6m^2x-2mx+6m+4mx-12m-4-1=0$

$x^2(1+m^2)+x(2m-6m^2)+9m^2-6m-4=0$

Si pone il $\Delta=b^2\text{-}4ac=0 \Rightarrow (2m\text{-}6m^2)-4(1+m^2)(9m^2-6m-4)=0$

$4m^2+36m^4-24m^3-4(9m^2-6m-4+9m^4-6m^3-4m^2)=0$

$4m^2+36m^4-24m^3-36m^2+24m+16-36m^4+24m^3+16m^2=0$

$-16m^2+24m+16=0 \quad \Rightarrow \quad 16m^2-24m-16=0 \quad \Rightarrow \quad 2m^2-3m-2=0$

$m_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4(2)(-2)}}{2(2)}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{3\pm5}{4} \quad \Rightarrow \quad m_1=\dfrac{3+5}{4}=\dfrac{8}{4}=2 \quad \text{e} \quad m_2=\dfrac{3-5}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Le rette tangenti sono quindi $y\text{-}y_1=m(x\text{-}x_1)$

$y+1=2(x\text{-}3) \qquad y+1=2x\text{-}6 \qquad y=2x\text{-}7$

e $y-y_1=m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y+1=-\dfrac{1}{2}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y+1=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}-1 \quad \Rightarrow \quad y+1=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

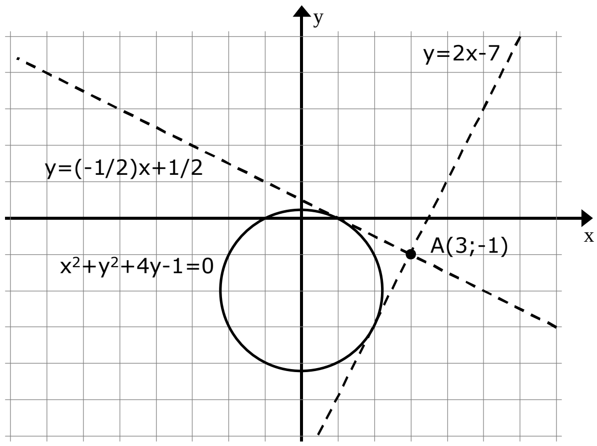


Fig. D4.17
Rette tangenti alla circonferenza $x^2+y^2+4y\text{-}1=0$
passanti per il punto A(3;-1).

Per trovare i punti di tangenza si risolvono i sistemi tra la circonferenza e le rette tangenti.

PRIMO PUNTO DI TANGENZA

$$\begin{cases} y=2x-7 \\ x^2+y^2+4y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ x^2+(2x-7)^2+4(2x-7)-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ x^2+4x^2+49-28x+8x-28-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ 5x^2-20x+20=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ (x-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-7 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2(2)-7=4-7=-3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow (2;-3)$$

SECONDO PUNTO DI TANGENZA

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ x^2+y^2+4y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ x^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ x^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x-2x+2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ \frac{4x^2+x^2+1-2x-8x+8-4}{4}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ 5x^2-10x+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow (1;0)$$

<u>Esempio D4.9</u>:
Trovare le rette tangenti a $x^2+y^2+2x\text{-}4y+1=0$ passanti per il punto A(-2;1).

Si sostituiscono i valori (-2;1) nel polinomio $x^2+y^2+2x\text{-}4y+1=0$ $\qquad (\text{-}2)^2+(1)^2+2(\text{-}2)\text{-}4(1)+1=4+1\text{-}4\text{-}4+1=\text{-}2$.
Il numero trovato è negativo quindi il punto si trova all'interno della circonferenza e non ci sono rette tangenti.

<u>Esempio D4.10</u>:
Trovare le rette tangenti a $x^2+y^2+4x\text{-}4y\text{-}2=0$ passanti per il punto A(1;3).

Si sostituiscono i valori (1;3) nel polinomio $x^2+y^2+4x\text{-}4y\text{-}2=0$.
$(1)^2+(3)^2+4(1)\text{-}4(3)\text{-}2=1+9+4\text{-}12\text{-}2=0$.
quindi il punto si trova sulla circonferenza.

$\alpha = -\frac{4}{2} = -2 \qquad \beta = -\frac{-4}{2} = 2$

$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - (-2)} = \sqrt{4+4+2} = \sqrt{10}$

Il centro è C(-2;2).

La retta passante per il centro e per A(1;3) è:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{3-2} = \frac{x+2}{1+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{1} = \frac{x+2}{3} \quad \Rightarrow$

$\frac{3y-6 = x+2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3y=x+8 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

m=1/3, il suo perpendicolare è m'=-3.

La retta ad essa perpendicolare passante per A(1;3) è:

$y-y_1 = m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y-3=-3(x-1) \quad \Rightarrow \quad y-3=-3x+3 \quad \Rightarrow \quad y=-3x+6$

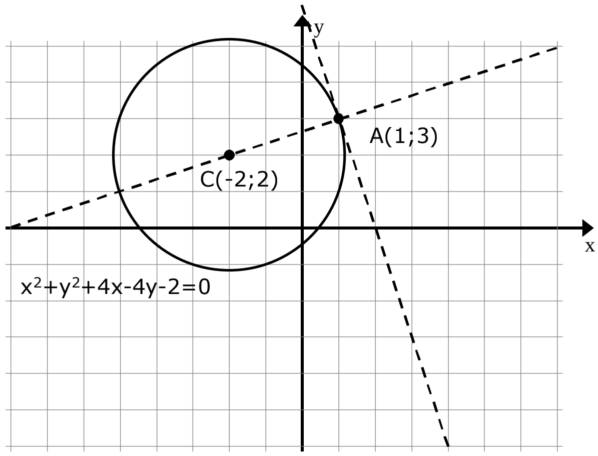


Fig. D4.18
Rette tangenti alla circonferenza $x^2+y^2+4x-4y-2=0$
passanti per il punto A(1;3).

D4.6 Come trovare l'equazione di una circonferenza

Per trovare l'equazione di una circonferenza esistono due metodi, il metodo geometrico e quello algebrico.

METODO ALGEBRICO Una circonferenza ha equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
Trovare l'equazione di una circonferenza significa trovare i valori di a, b e c. Ci sono 3 incognite.
Per questo ci servono 3 condizioni da mettere a sistema.
Ecco l'elenco delle possibili condizioni.

CONDIZIONI

Si conosce il CENTRO (α; β).

In questo caso si hanno DUE condizioni, ossia: a=-2α e b=-2β

Si conosce un PUNTO (x_0; y_0).

In questo caso si ha UNA condizione sostituendo i valori x_0 e y_0 nell'equazione generica della circonferenza $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$.

Si conosce una RETTA TANGENTE y=mx+q.

In questo caso si imposta il sistema tra la retta tangente y=mx+q e l'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
Si arriva a una equazione di secondo grado che non va risolta ma si pone il Δ=0.
Questa è la condizione da porre a sistema.

METODO GEOMETRICO Una circonferenza ha un centro e un raggio. Se si riesce per mezzo di una costruzione geometrica a trovare il centro (α; β) e il raggio r li si sostituisce nell'equazione generica $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$.
Per trovare con una costruzione geometrica il centro e il raggio della circonferenza non esiste un metodo standard.
Bisogna quindi ogni volta risolvere il problema in maniera diversa.

Ci sono esercizi risolubili con tutti e due i metodi, alcuni SOLO con il metodo geometrico, altri SOLO con il metodo algebrico.

Ecco due esempi, uno risolto con il metodo algebrico e l'altro con il metodo geometrico.

Esempio D4.11:
Trovare l'equazione della circonferenza con centro di cui si conosce solo la coordinata α=-1 passante per il punto (0;5) e tangente alla retta y=4x-12.

Condizione del centro
a=-2(-1).

Condizione del passaggio per un punto
$(0)^2+(5)^2+a\cdot(0)+b\cdot(5)+c=0$
$25+5b+c=0$

Condizione di tangenza
si imposta il sistema tra circonferenza e retta tangente e si pone il $\Delta=0$.

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=4x-12 \end{cases} \Rightarrow x^2+(4x-12)^2+ax+b(4x-12)+c=0 \Rightarrow x^2+16x^2+144-96x+ax+4bx-12b+c=0$$

$$17x^2+x(a+4b-96)+144-12b+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow (a+4b-96)^2-4(17)(144-12b+c)=0$$

$$\begin{cases} a=2 \\ 25+5b+c=0 \\ (a+4b-96)^2-4(17)(144-12b+c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ (2+4b-96)^2-4(17)(144-12b-5b-25)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ (4b-94)^2-4(17)(119-17b)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ 16b^2+8836-752b-68(119-17b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ 16b^2+8836-752b-8092+1156b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ 16b^2+404b+744=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ 4b^2+101b+186=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-5b-25 \\ b_{1,2}=\dfrac{-101\pm\sqrt{(101)^2-4(4)(186)}}{2(4)}=\dfrac{-101\pm\sqrt{10201-2976}}{8}=\dfrac{-101\pm\sqrt{7225}}{8}=\dfrac{-101\pm85}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ c_1=-5b-25 \\ b_1=\dfrac{-101+85}{8}=-\dfrac{16}{8}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ c_1=-5(-2)=10 \\ b_1=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2+2x-2y+10=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2=2 \\ c_2=-5b-25 \\ b_2=\dfrac{-101-85}{8}=-\dfrac{186}{8}=-\dfrac{93}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2=2 \\ c_2=-5\left(-\dfrac{93}{4}\right)-25=\dfrac{465-100}{4} \\ b_2=-\dfrac{93}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2+2x-\dfrac{93}{4}y+\dfrac{365}{4}=0$$

Sono quindi due le circonferenze che soddisfano alle condizioni poste dal testo come risulta chiaro in figura.

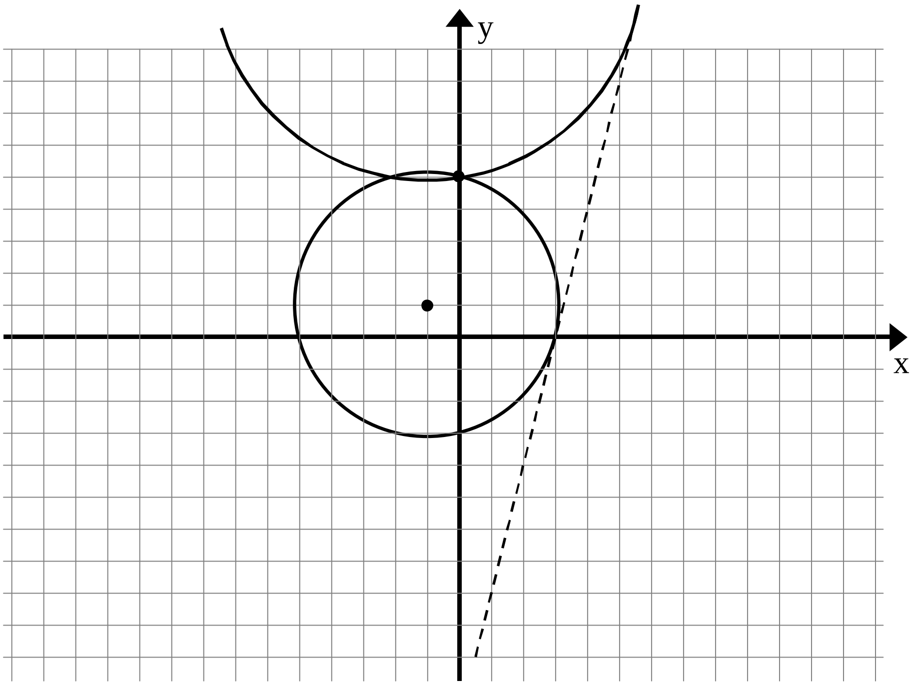


Fig. D4.19
Trovare l'equazione della circonferenza con centro di cui si conosce solo la coordinata α=-1 passante per il punto (0;5) e tangente alla retta y=4x-12.

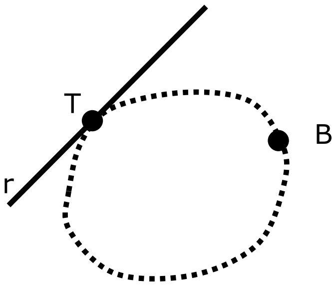
Si vede chiaramente che il procedimento è standard, ma i calcoli sono lunghi e fastidiosi. Al contrario con il procedimento geometrico si fatica un po' di più a trovare la strada giusta per scrivere il corretto procedimento, però i calcoli sono più semplici.

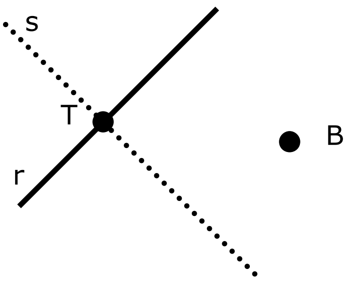
Esempio D4.12:
Trovare l'equazione della circonferenza sapendo che la retta r: y=2x+2 è tangente alla circonferenza nel punto T(1;4) e che la circonferenza passa per il punto B(7;-2).

Per risolvere il problema lo si risolve prima con un grafico approssimativo, in maniera da trovare un procedimento. In generale ogni esercizio avrà un metodo risolutivo differente, e bisogna trovare tale procedimento per risolvere il problema.

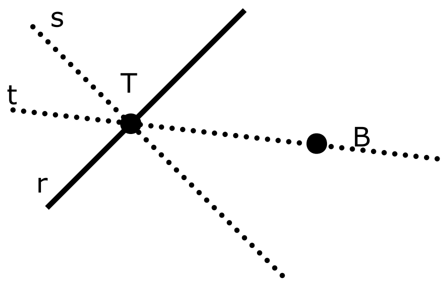
DATI: la retta tangente r, il punto T di tangenza e il punto A, da ciò si immagina la circonferenza… (tratteggiata)

Per trovare la circonferenza bisogna trovare il centro. Per trovare il centro si può utilizzare la seguente costruzione geometrica:

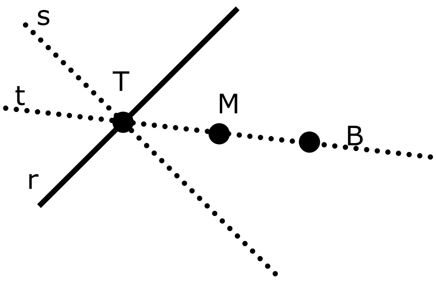




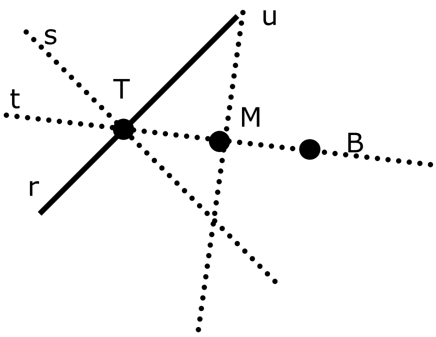
1. Retta s passante per T perpendicolare a r



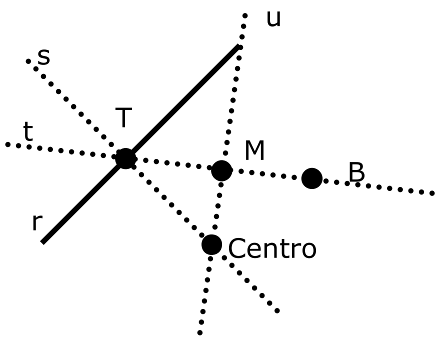
2. Retta t passante per T e B



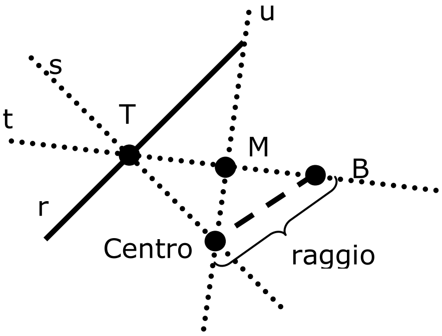
3. Punto medio di BT (M)



4. Retta u perpendicolare a t passante per M



5. Intersezione di u e s (centro)

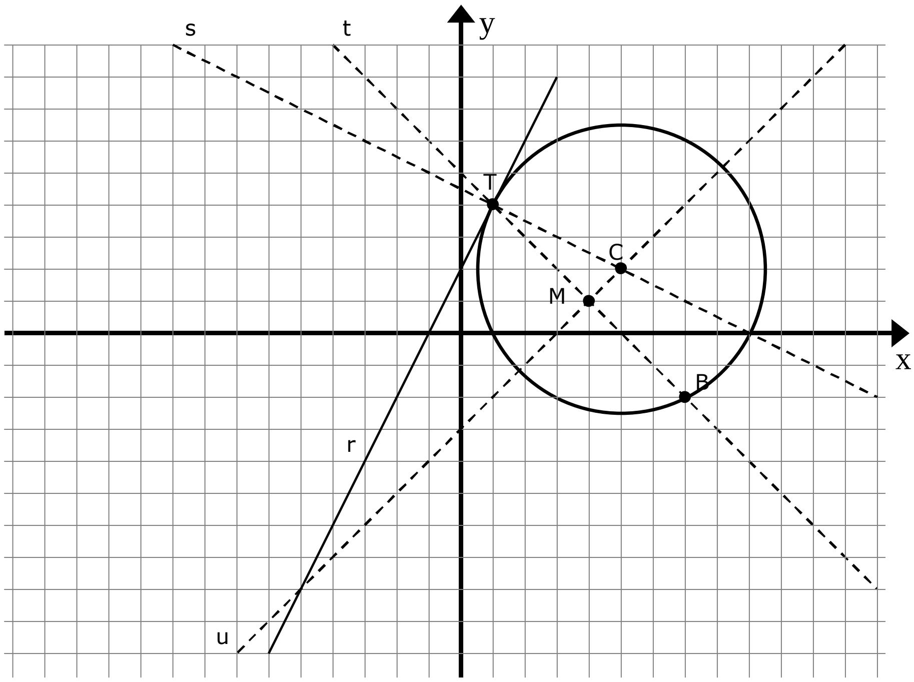


Si tratta ora di svolgere i calcoli riguardo al procedimento appena trovato:

1. Retta s passante per T perpendicolare a r.
2. Retta t passante per T e B.
3. M punto medio di BT.
4. Retta u perpendicolare a t passante per M.
5. Intersezione di u e s.
6. Distanza tra il centro e B (raggio).
7. Sostituire i valori di centro e raggio nell'equazione generica della circonferenza.

6. Distanza tra il centro e B (o T) e si trova il raggio.

GRAFICO:



DATI:

r:y=2x+2
T(1;4)
B(7:-2)

RISULTATI:

s: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$
t: y=-x+5
M(4;1)
u: y=x-3
centro(5;2)
raggio= $2\sqrt{5}$

equazione circonferenza
$(x-5)^2+(y-2)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$

Fig. D4.20
Trovare l'equazione della circonferenza sapendo che la retta r: y=2x+2 è tangente alla circonferenza nel punto T(1;4) e che la circonferenza passa per il punto B(7;-2).

CALCOLI: (gran parte dei risultati dei calcoli sono ricavabili direttamente dal disegno).

1. Retta s passante per T(1;4) perpendicolare a r: y=2x+2.
   formula da utilizzare – retta passante per un punto $y-y_1=m(x-x_1)$
   $y-4=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+4 \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{1+8}{2} \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$
2. Retta t passante per T(1;4) e B(7;-2).
   formula da utilizzare – retta passante per due punti $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
   $\frac{y-4}{-2-4}=\frac{x-1}{7-1}\Rightarrow\frac{y-4}{-6}=\frac{x-1}{6}\Rightarrow\frac{y-4=-(x-1)}{-6}\Rightarrow y-4=-x+1\Rightarrow y=-x+4+1\Rightarrow y=-x+5$
3. M punto medio di BT con T(1;4) e B(7;-2).
   formula da utilizzare $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
   Punto medio $M\left(\frac{1+7}{2};\frac{4-2}{2}\right)=\left(\frac{8}{2};\frac{2}{2}\right)=(4;1)$
4. Retta u perpendicolare a t: y=-x+5 passante per M(4;1).
   formula da utilizzare – retta passante per un punto $y-y_1=m(x-x_1)$
   $y-1=1(x-4) \qquad y-1=x-4 \qquad y=x-4+1 \qquad y=x-3$
5. Intersezione di u: y=x-3 e s: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$.
   si risolve il sistema
   $\begin{cases}y=x-3\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x-3\\ x-3=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x-3\\ \frac{2x-6=-x+9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x-3\\ 2x+x=6+9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x-3\\ \frac{3x}{3}=\frac{15}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=5-3=2\\ x=5\end{cases}\Rightarrow \text{Centro}(5;2)$
6. Distanza tra il centro (5;2) e B (7;-2).

formula da utilizzare – distanza tra due punti $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

raggio$=\sqrt{(7-5)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

7. Si sostituiscono i valori del centro (5;2) e del raggio $2\sqrt{5}$ nell'equazione generica della circonferenza.
   $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$
   $(x-5)^2+(y-2)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$ $\quad x^2+25-10x+y^2+4-4y=20$ $\quad x^2+y^2-10x-4y+9=0$