D3. Parabola

D3.1 Definizione di parabola come luogo di punti

Definizione: una **parabola** è formata dai punti equidistanti da un punto detto **fuoco** e da una retta detta **direttrice**.

L'equazione della parabola è $\boxed{y=ax^2+bx+c}$

Osservando la figura D3.1 si nota che tutti i punti della parabola hanno la stessa distanza dal fuoco e dalla direttrice. La parabola è simmetrica rispetto alla retta detta asse di simmetria. Asse e parabola si incontrano in un punto detto vertice.

Conoscendo l'equazione della parabola $y=ax^2+bx+c$ si possono trovare le equazioni del vertice, del fuoco, dell'asse e della direttrice:

Vertice $\left(\frac{-b}{2a};\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

Fuoco $\left(\frac{-b}{2a};\frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$

Asse $x=\frac{-b}{2a}$

Direttrice $y=\frac{-1-b^2+4ac}{4a}$

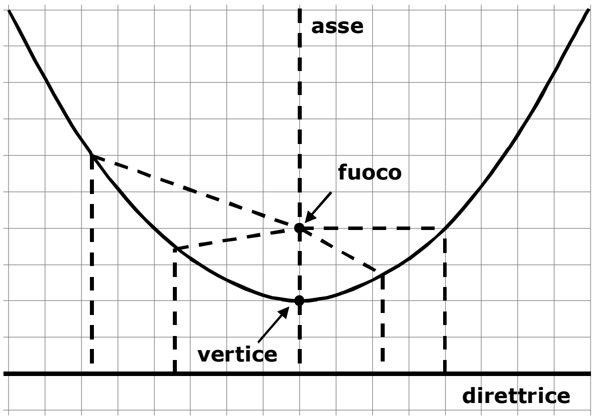


Fig. D3.1
Parabola.

Data l'equazione di una parabola è quindi possibile, con queste formule, trovare fuoco, vertice, asse e direttrice.

D3.2 Rappresentazione grafica

In questo paragrafo si spiega un metodo per tracciare il grafico di una parabola conoscendone l'equazione.

PROCEDIMENTO
- Si trova il vertice e lo si traccia sul grafico, disegnando l'asse (che è la retta verticale passante per il vertice).
- Si danno alla x alcuni valori a destra o a sinistra della x del vertice e si trovano così le y. Si tracciano questi punti sul grafico.
- Per simmetria si riportano i punti trovati dall'altra parte rispetto all'asse.
- Si uniscono i punti così trovati.

Esempio D3.1:
Tracciare il grafico della parabola $y=x^2-2x-3$

a=1, b=-2, c=-3

Vertice $\left(\frac{-b}{2a};\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)=\left(\frac{-(-2)}{2(1)};\frac{-(-2)^2+4(1)(-3)}{4(1)}\right)=\left(\frac{2}{2};\frac{-4-12}{4}\right)=(1;-4)$

Si daranno allora alla x i valori 2, 3 e 4 (a destra del valore 1 della x del vertice).

x	y	
2	$(2)^2-2(2)-3=4-4-3=-3$	trovato il punto (2;-3)
3	$(3)^2-2(3)-3=9-6-3=0$	trovato il punto (3;0)
4	$(4)^2-2(4)-3=16-8-3=5$	trovato il punto (4;5)

(si possono mettere più o meno valori al posto della x, dipende da quanto preciso si vuole tracciare il grafico).

Ora si devono trovare graficamente i punti simmetrici rispetto all'asse della parabola dei 3 punti trovati.
Il punto (2;-3) è a distanza 1 dall'asse, quindi dall'altra parte dell'asse a distanza 1 c'è il punto (0;-3).
Il punto (3;0) è a distanza 2 dall'asse, quindi dall'altra parte dell'asse a distanza 2 c'è il punto (-1;0).
Il punto (4;5) è a distanza 3 dall'asse, quindi dall'altra parte dell'asse a distanza 3 c'è il punto (-2;5).

Infine basta unire i punti trovati.

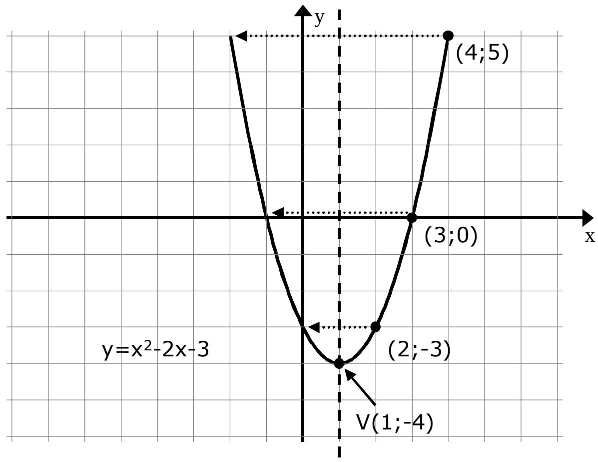
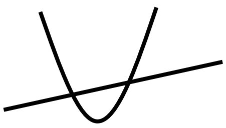
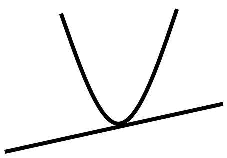
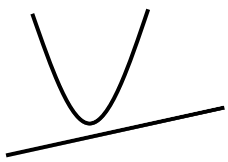


Fig. D3.2
Grafico della parabola di
equazione $y=x^2-2x-3$.

D3.3 Intersezioni parabola-retta e tra parabole

Una parabola e una retta si possono incontrare in due punti, in 1 punto o in nessun punto.

2 punti di contatto 1 punto di contatto 0 punti di contatto

Per trovare i punti di contatto si può procedere per via algebrica e per via geometrica.
VIA ALGEBRICA – si risolve il sistema formato dalle equazioni di retta e parabola.
VIA GEOMETRICA – si disegnano parabola e retta e, se si vedono esattamente, si trovano i punti d'intersezione.

Esempio D3.2: Trovare i punti di intersezione tra la retta y=-x+1 e la parabola $y=\frac{1}{2}x^2-x-1$.

VIA ALGEBRICA – Si risolve il sistema formato dalle equazioni di retta e parabola.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ y=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ \frac{1}{2}x^2-x-1=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ \frac{x^2-2x-2=-2x+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ x^2-2x-2+2x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ x^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ (x-2)(x+2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ x_1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{1}{2}(2)^2-(2)-1=2-2-1=-1 \\ x_1=2 \end{cases} \Rightarrow (2;-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-x-1 \\ x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2=\frac{1}{2}(-2)^2-(-2)-1=2+2-1=3 \\ x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow (-2;3)$$

In questo caso i punti di contatto sono due, il punto (2;-1) e il punto (-2;3).

VIA GEOMETRICA – si tracciano parabola e retta e si trovano i punti d'intersezione. Se tali punti non sono visibili esattamente l'unico procedimento sicuro è quello algebrico.

Si traccia la retta y=-x+1 con i soliti metodi
m=-1, q=1. Si parte da q=1 e poi si scende di 1 e ci si sposta verso destra di 1.

Si trova il vertice della parabola, poi alcuni punti e si traccia il suo grafico.

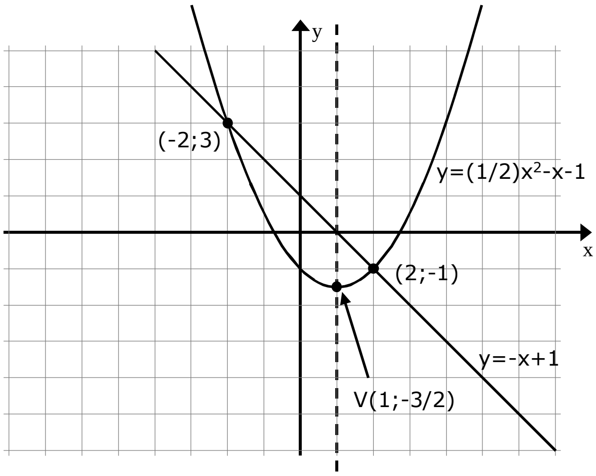


Fig. D3.3
Intersezione tra la parabola di equazione
$y=\frac{1}{2}x^2-x-1$ e la retta y=-x+1.

$$\text{Vertice}\left(\frac{-(-1)}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\ ;\ \frac{-(-1)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)(-1)}{4\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=\left(\frac{1}{1}\ ;\ \frac{-1-2}{2}\right)=\left(1;-\frac{3}{2}\right)$$

Si assegnano alla x i valori 2, 3 e 4 (a destra del valore 1 della x del vertice).

x	y
2	$\frac{1}{2}(2)^2-(2)-1=2-2-1=-1$ si è trovato il punto (2;-1)
3	$\frac{1}{2}(3)^2-(3)-1=\frac{9}{2}-3-1=\frac{1}{2}$ si è trovato il punto (3;1/2)
4	$\frac{1}{2}(4)^2-(4)-1=8-4-1=3$ si è trovato il punto (4;3)

I punti d'intersezione sono (2;-1) e (-2;3), ossia gli stessi trovati con il procedimento algebrico.

<u>Esempio D3.3:</u> Trovare i punti di intersezione tra la retta y=-4x-3 e la parabola y=-x²-6x-4.

VIA ALGEBRICA – Si risolve il sistema

$$\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\y=-4x-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\-x^2-6x-4=-4x-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\-x^2-6x-4+4x+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\-x^2-2x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\-(x^2+2x+1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\-(x+1)^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=-x^2-6x-4\\x_1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=-(-1)^2-6(-1)-4=-1+6-4=+1\\x_1=-1\end{cases}\Rightarrow(-1;+1)$$

In questo caso il punto di contatto è solamente uno.

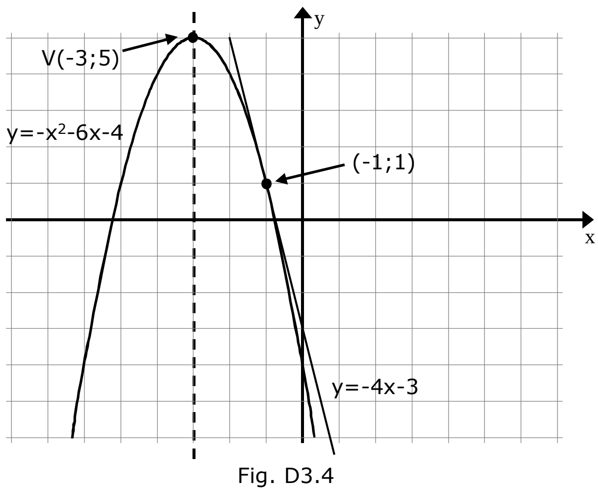


Fig. D3.4
Intersezione tra la parabola di equazione
y=-x²-6x-4 e la retta y=-4x-3.

VIA GEOMETRICA

Si traccia la retta y=-3x-4 con i soliti metodi.
m=-3, q=-4. Si parte da -4 e poi si scende di 3 e ci si sposta verso destra di 1.

Si trova il vertice della parabola $y=-x^2-6x-4$, poi alcuni punti e la si disegna.

Vertice $\left(\frac{-(-6)}{2(-1)} ; \frac{-(-6)^2+4(-1)(-4)}{4(-1)} \right) = \left(\frac{6}{-2} ; \frac{-36+16}{-4} \right) = (-3;5)$

Si daranno allora alla x i valori -2, -1 e 0 (a destra del valore -3 della x del vertice).

x	y	
-2	$-(-2)^2-6(-2)-4=-4+12-4=4$	trovato il punto (-2;4)
-1	$-(-1)^2-6(-1)-4=-1+6-4=1$	trovato il punto (-1;1)
0	$-(0)^2-6(0)-4=0-0-4=-4$	trovato il punto (0;-4)

Il punto d'intersezione è (-1;1) ossia lo stesso trovato con il procedimento algebrico.

Esempio D3.4: Trovare i punti di intersezione tra la retta $y=\frac{1}{2}x-4$ e la parabola $y=2x^2+8x+5$.

VIA ALGEBRICA – Si risolve il sistema:

$$\begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ y=\frac{1}{2}x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ 2x^2+8x+5=\frac{1}{2}x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ \frac{4x^2+16x+10=x-8}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ 4x^2+16x+10-x+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ 4x^2+15x+18=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x^2+8x+5 \\ x_{12}=\frac{-15\pm\sqrt{(15)^2-4(4)(18)}}{2(2)}=\frac{-15\pm\sqrt{225-288}}{4}=\frac{-15\pm\sqrt{-63}}{4} \end{cases}$$ impossibile (radicando negativo)

In questo caso quindi non ci sono punti di contatto. Lo si può verificare per via geometrica:

VIA GEOMETRICA

Si traccia la retta y=(1/2)x-4 con i soliti metodi.
m=1/2, q=-4. Si parte da -4 e poi si sale di 1 e ci si sposta verso destra di 2.

Si trova il vertice della parabola $y=2x^2+8x+5$, poi alcuni punti e la si disegna.

Vertice $\left(\frac{-(8)}{2(2)} ; \frac{-(8)^2+4(2)(5)}{4(2)} \right) = \left(\frac{-8}{4} ; \frac{-64+40}{8} \right) = (-2;-3)$

Si daranno allora alla x i valori -1, 0 e 1 (a destra del valore -2 della x del vertice).

x	y	
-1	$2(-1)^2+8(-1)+5=2-8+5=-1$	trovato il punto (-1;-1)
0	$2(0)^2+8(0)+5=0-0+5=+5$	trovato il punto (0;5)
1	$2(1)^2+8(1)+5=2+8+5=15$	trovato il punto (1;15)

Si vede quindi che non ci sono punti di intersezione tra retta e parabola.

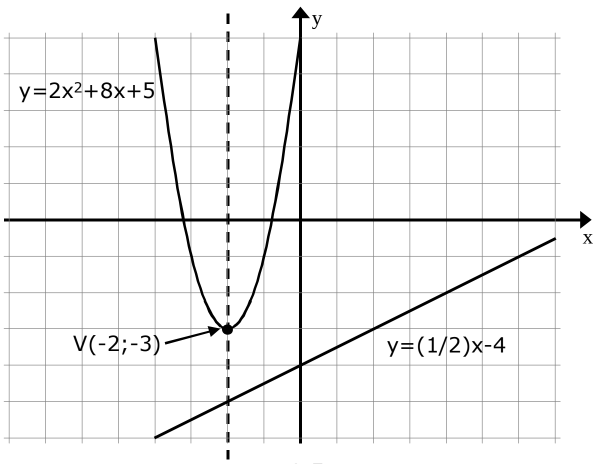
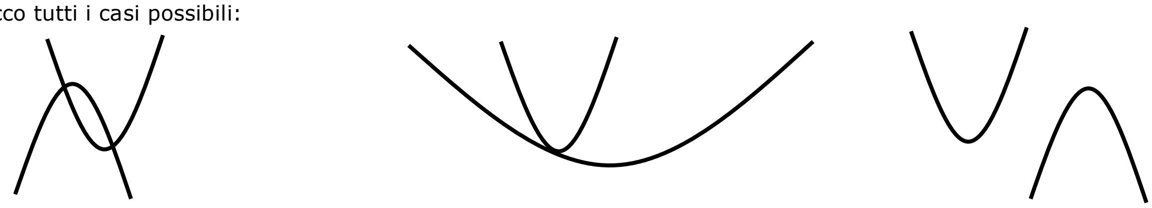


Fig. D3.5
Intersezione tra la parabola di equazione
$y=2x^2+8x+5$ e la retta $y=\frac{1}{2}x-4$.

E’ possibile trovare per via algebrica e geometrica anche i punti d’incontro tra due parabole.
Il sistema per via algebrica sarebbe di quarto grado, ed avrebbe fino a quattro soluzioni. In realtà al massimo le soluzioni saranno due.
Ecco tutti i casi possibili:



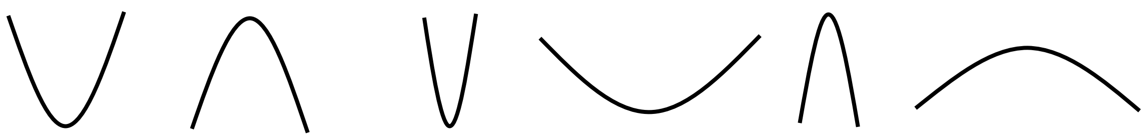
2 punti di contatto   1 punto di contatto   0 punti di contatto

Fig. D3.6
Intersezione tra parabole.

D3.4 Alcune osservazioni su a, b e c

I coefficienti a, b e c hanno un significato geometrico:

a
Se a è positivo la parabola è rivolta verso l’alto, altrimenti è rivolta verso il basso.



a positivo   a negativo   a>0 grande   a>0 piccolo   a<0 grande   a<0 piccolo

Fig. D3.7
Significato geometrico del coefficiente a.

Più a è grande (2, 5, 10, 100) più la parabola è stretta.
Più a è piccolo (vicino a zero, ossia 0.5, 0.2, 0.01) più la parabola è larga.

b
b ha a che fare con la posizione del vertice della parabola insieme ad a e c.
Se a e b hanno lo stesso segno il vertice sarà a sinistra dell’asse y.
Se hanno segno opposto il vertice sarà a destra dell’asse y.

c
c è il punto d’incontro tra la parabola e l’asse y.

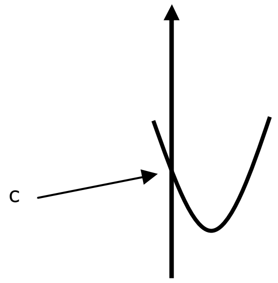


Fig. D3.8
Significato geometrico del coefficiente c.

D3.5 Rette tangenti a una parabola

Data una parabola e un punto è possibile che ci siano due rette tangenti alla parabola passanti per il punto, 1 retta tangente o nessuna. Ciò dipende dalle posizioni reciproche di parabola e punto.

Per trovare l’equazione delle rette tangenti a una parabola passanti per un punto si usa il seguente **procedimento**.

- Si scrive il sistema tra la parabola e il fascio di rette passanti per il punto dato $y-y_1=m(x-x_1)$.
- Risolvendo il sistema viene fuori una equazione di secondo grado letterale *__che non va risolta.__*

- Si pone il discriminante, indicato con la lettera delta maiuscola uguale a zero: $\Delta=0$ (in cui $\Delta=b^2-4ac$).
- Si risolve e si trovano i valori di m.
- Si sostituiscono i valori di m trovati in $y-y_1=m(x-x_1)$ e si trovano così le rette tangenti.

Se si trovano quindi due valori di m ci saranno due rette tangenti, se se ne trova uno ci sarà una retta tangente. Se non se ne trovano non ci saranno rette tangenti.

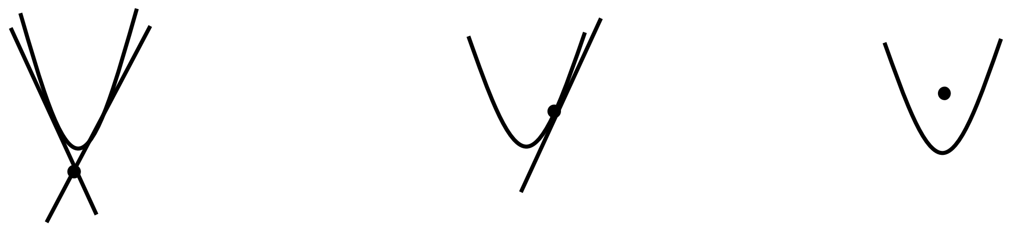


Fig. D3.9
Rette tangenti a una parabola passanti per un punto.

Esempio D3.5:
Trovare le rette tangenti a $y=x^2-2x-3$ passanti per il punto A(-1;2).

$$\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y-2=m(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x^2-2x-3-2=m(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x^2-2x-3-2=mx+m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x^2-2x-3-2-mx-m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x^2+x(-2-m)x-5-m=0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado trovata non va risolta.
Con a=1, b=-2-m, c=-5-m si pone il $\Delta=0$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-2-m)^2-4(1)(-5-m)=$$

$$=4+m^2+4m+20+4m=m^2+8m+24=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(1)(24)}}{2(1)}=\frac{-8\pm\sqrt{64-96}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{-32}}{2} \quad \text{impossibile}$$

Non essendoci alcun valore di m non ci sono rette tangenti alla parabola passanti per il punto indicato.

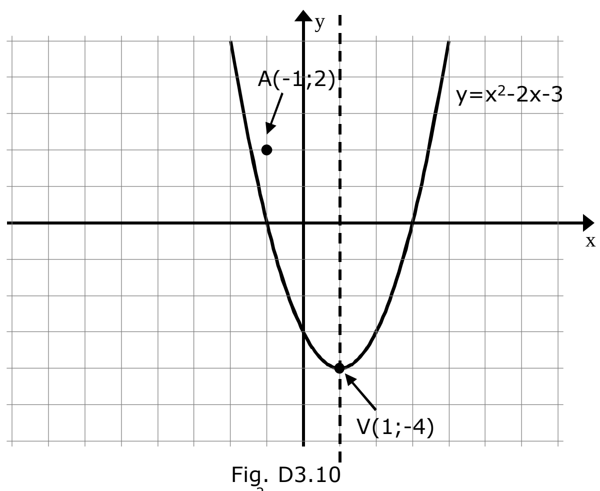


Fig. D3.10
Rette tangenti a $y=x^2-2x-3$ passanti per (1,-4).

Esempio D3.6:
Trovare le rette tangenti a $y=(1/4)x^2+x-3$ passanti per il punto A(-1;-6).

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \\ y+6=m(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \\ \frac{1}{4}x^2+x-3+6=m(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \\ \frac{1}{4}x^2+x-3+6=mx+m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \\ \frac{x^2+4x-12+24=4mx+4m}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \\ x^2+4x+12-4mx-4m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \\ x^2+x(4-4m)+12-4m=0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado non si risolve.
Con a=1, b=4-4m, c=12-4m si pone il $\Delta=0$

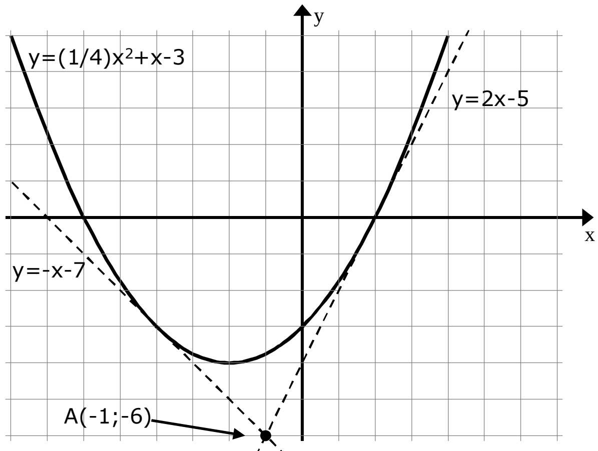


Fig. D3.11
Rette tangenti a $y=\frac{1}{4}x^2+x-3$ passanti per (-1,-6).

$\Delta=b^2-4ac=(4-4m)^2-4(1)(12-4m)=16+16m^2-32m-48+16m=$
$=16m^2-16m-32=0$
Si divide tutto per 16 per semplificare i calcoli.
$m^2-m-2=0$
$(m-2)(m+1)=0$
$m_1=2 \qquad m_2=-1$

Essendoci due valori di m le rette tangenti sono due.
Per trovarle si sostituiscono tali valori in y+6=m(x+1).

r_1: y+6=2(x+1)
y+6=2x+2
y=2x+2-6
y=2x-4

r_2:y+6=-1(x+1)
y+6=-x-1
y=-x-1-6
y=-x-7

Per trovare i punti di tangenza basta risolvere i sistemi tra le rette e la parabola:

$$\begin{cases} y=2x-4 \\ y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ \frac{1}{4}x^2+x-3=2x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ \frac{x^2+4x-12=8x-16}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x^2+4x-12-8x+16=0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ (x-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2(2)-4=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow (2;0)$$
$$\begin{cases} y=-x-7 \\ y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-7 \\ \frac{1}{4}x^2+x-3=-x-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-7 \\ \frac{x^2+4x-12=-4x-28}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-7 \\ x^2+4x-12+4x+28=0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x-7 \\ x^2+8x+16=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-7 \\ (x+4)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-7 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-(-4)-7 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow (-4;-3)$$

<u>Esempio D3.7:</u>
Trovare le rette tangenti a passanti $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2}$ per il punto A(5;-3).

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2} \\ y+3=m(x-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2}+3=m(x-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2}+3=mx-5m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2} \\ \frac{-x^2+6x-11+6=2mx-10m}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2} \\ -x^2+6x-11+6-2mx+10m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2} \\ -x^2+x(6-2m)+10m-5=0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado non si risolve.
Con a=-1, b=6-2m, c=10m-5 si pone il Δ=0.

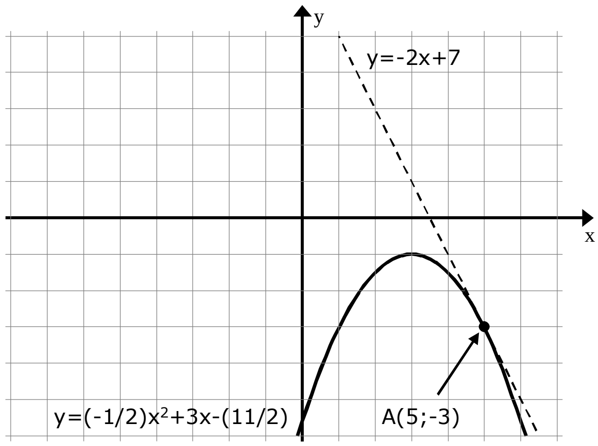


Fig. D3.12
Retta tangente a $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{11}{2}$ passanti per (5,-3).

$\Delta=b^2-4ac=(6-2m)^2-4(-1)(10m-5)=36+4m^2-24m+40m-20=$
$=4m^2+16m+16=0$
Si divide tutto per 4 per semplificare i calcoli.
$m^2+4m+4=0$
$(m+2)^2=0$
$m_1=-2$
Essendoci un solo valore di m c'è solo una retta tangente.
Per trovarla si sostituisce tale valore in y+3=m(x-5)

r: y+3=-2(x-5)
y+3=-2x+10
y=-2x+10-3
y=-2x+7

Il punto di tangenza è in questo caso un dato del problema, quindi non è necessario calcolarne le coordinate.

D3.6 Come trovare l'equazione di una parabola

Una parabola ha equazione $y=ax^2+bx+c$. Trovare l'equazione di una parabola significa trovare i valori di a, b e c.
Ci sono 3 incognite. Per questo ci servono 3 condizioni da mettere a sistema. Ecco l'elenco delle possibili condizioni…

CONDIZIONI
- Si conosce il VERTICE (x_V; y_V)
  In questo caso si hanno DUE condizioni, ossia: $\frac{-b}{2a}=x_V$ $\frac{-b^2+4ac}{4a}=y_V$
- Si conosce il FUOCO (x_F; y_F)
  In questo caso si hanno DUE condizioni, ossia: $\frac{-b}{2a}=x_F$ $\frac{1-b^2+4ac}{4a}=y_F$
- Si conosce l'ASSE $x=x_A$
  In questo caso si ha UNA condizione, ossia: $\frac{-b}{2a}=x_A$
- Si conosce la DIRETTRICE $y=y_D$
  In questo caso si ha UNA condizione, ossia: $\frac{-1-b^2+4ac}{4a}=y_D$
- Si conosce un PUNTO (x_0; y_0)
  In questo caso si ha UNA condizione sostituendo i valori x_0 e y_0 nell'equazione generica della parabola $y_0=ax_0^2+bx_0+c$.
- Si conosce una RETTA TANGENTE y=mx+q.
  In questo caso si imposta il sistema tra la retta tangente y=mx+q e l'equazione generica della parabola $y=ax^2+bx+c$.
  Si arriva a una equazione di secondo grado che non va risolta ma si pone il Δ=0.
  Questa è la condizione da porre a sistema.

Esempio D3.8:
Trovare l'equazione della parabola con vertice V(2;-3) passante per il punto (4;1).

Condizioni del vertice:

$$\frac{-b}{2a}=2$$

$$\frac{-b^2+4ac}{4a}=-3$$

Condizione del passaggio per un punto:
$1=a\cdot(4)^2+b\cdot(4)+c$

Si risolve il sistema e si trovano i valori a, b, c.

$$\begin{cases}\frac{-b}{2a}=2\\ \frac{-b^2+4ac}{4a}=-3\\ 1=a\cdot(4)^2+b\cdot(4)+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4a\\ \frac{-(-4a)^2+4ac}{4a}=-3\\ 1=16a+4(-4a)+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4a\\ \frac{-16a^2+4ac}{4a}=-3\\ 1=16a-16a+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4a\\ \frac{4a(-4a+c)}{4a}=-3\\ c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4a\\ -4a+1=-3\\ c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4a\\ \frac{-4a}{-4}=\frac{-4}{-4}\\ c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4(1)=-4\\ a=1\\ c=1\end{cases}$$

Da cui a=1, b=-4 e c=1. Si sostituiscono questi valori nell'equazione generica della parabola $y=ax^2+bx+c$ e si ottiene l'equazione richiesta della parabola: $\mathbf{y=x^2-4x+1.}$

Esempio D3.9:
Trovare l'equazione della parabola con asse x=-1, direttrice y=9/2 e tangente alla retta y=-2x+4.

Condizione dell'asse $\frac{-b}{2a}=-1$ Condizione della direttrice $\frac{-1-b^2+4ac}{4a}=\frac{9}{2}$

Poiché si conosce la retta tangente si imposta il sistema tra la retta tangente y=-2x+4 e l'equazione generica della parabola $y=ax^2+bx+c$ e poi si pone il Δ=0.

$$\begin{cases}y=ax^2+bx+c\\ y=-2x+4\end{cases}\Rightarrow\ ax^2+bx+c=-2x+4\ \Rightarrow\ ax^2+bx+c+2x-4=0\ \Rightarrow\ ax^2+x(b+2)+c-4=0$$

e la condizione è $(b+2)^2-4a(c-4)=0$.

$$\begin{cases}\frac{-b}{2a}=-1\\ \frac{-1-b^2+4ac}{4a}=\frac{9}{2}\\ (b+2)^2-4a(c-4)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ \frac{-1-(2a)^2+4ac=18a}{4a}\\ (2a+2)^2-4a(c-4)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ -1-4a^2+4ac=18a\\ 4a^2+4+8a-4ac+16a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ 4ac=1+4a^2+18a\\ 4a^2+24a-4ac+4=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ \frac{4ac}{4a}=\frac{1+4a^2+18a}{4a}\\ 4a^2+24a-4a\left(\frac{1+4a^2+18a}{4a}\right)+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ c=\frac{1+4a^2+18a}{4a}\\ 4a^2+24a-1-4a^2-18a+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ c=\frac{1+4a^2+18a}{4a}\\ 6a+3=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=2a\\ c=\frac{1+4a^2+18a}{4a}\\ \frac{6a}{6}=\frac{-3}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\\ c=\frac{1+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+18\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1+4\left(\frac{1}{4}\right)-9}{-2}=\frac{2-9}{-2}=\frac{7}{2}\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Si sostituiscono questi valori nell'equazione generica della parabola $y=ax^2+bx+c$ e si ottiene l'equazione richiesta della parabola: $\mathbf{y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{7}{2}}$.