D2. Problemi sulla retta

D2.1 Introduzione

Ogni problema si risolve in maniera differente ed è per questo difficile esporre un procedimento standard per risolvere i problemi. In questo paragrafo si danno solo delle indicazioni riguardo al metodo di lavoro. L'ordine e la precisione del grafico sono molto importanti per trovare il procedimento risolutivo.

1- Tracciare il grafico.

Si deve disegnare tutto ciò che si ha nel testo. Il disegno deve essere GRANDE.
Accanto al disegno si deve lasciare lo spazio per scrivere i dati e i risultati.

2- Scrivere il procedimento.

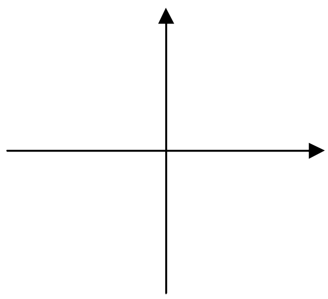
Il procedimento va scritto passo dopo passo in ordine. Ogni passo deve prevedere l'utilizzo di una delle formule che si sono studiate nel capitolo sulla retta. Per ogni passo va specificato quali sono i dati e qual è il risultato che si trova, dando a tali risultati anche un nome. (Per esempio, se si trova una retta, chiamarla r, s o altra lettera minuscola).

3- Effettuare i calcoli.

Per ogni passo del procedimento eseguire i calcoli (a meno che non si riesca a determinare il risultato già dal disegno).
Ogni risultato va riportato nello spazio relativo ai risultati accanto al disegno.

L'ordine è FONDAMENTALE.

Testo del problema _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
_ _



Dati:
_ _ _ _
_ _ _ _

Risultati:
_ _ _ _
_ _ _ _

Procedimento:
1- Nome formula   Dati _ _ _ → Nome risultato
2- Nome formula   Dati _ _ _ → Nome risultato
…………………………
ecc.

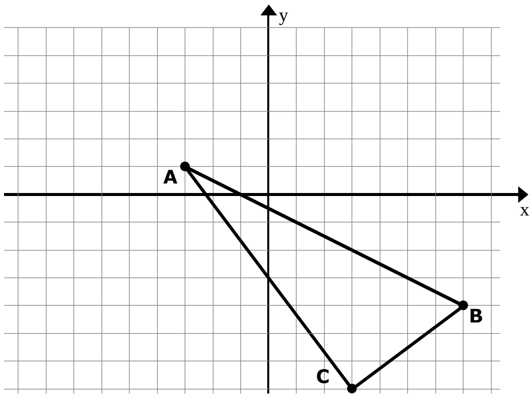
Calcoli:
1- FORMULA Dati   Nome risultato
2- FORMULA Dati   Nome risultato
ecc…

La parte più difficile è ovviamente scrivere il procedimento; effettuare i calcoli è abbastanza semplice perché di solito a ogni passaggio del procedimento corrisponde un esercizio di base di quelli del capitolo sulla retta.

D2.2 Esercizi svolti

Esempio D2.1:
Trovare il perimetro del triangolo ABC conoscendone i vertici A(-3;1) B(7;-4) C(3;-7).

Grafico



Dati:
A(-3;1)
B(7;-4)
C(3;-7)

Risultati:
d(AB)=
d(AC)=
d(BC)=
Perimetro=

Procedimento:

1) distanza tra due punti	A(-3;1) B(7;-4)	→	d(AB)
2) distanza tra due punti	B(7;-4) C(3;-7)	→	d(BC)
3) distanza tra due punti	A(-3;1) C(3;-7)	→	d(AC)

4) Perimetro = d(AB)+d(BC)+d(AC)

Calcoli:

1) d(AB)= $\sqrt{(7+3)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{(10)^2+(-5)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

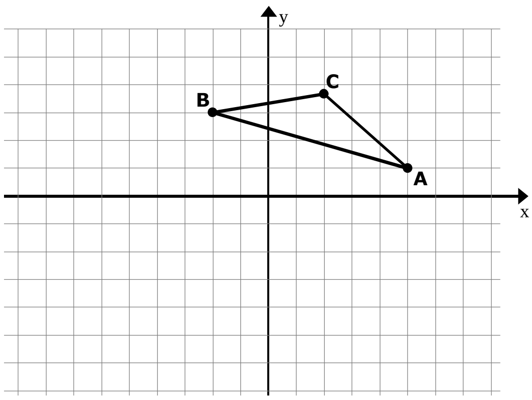
2) d(BC)= $\sqrt{(3-7)^2+(-7+4)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

3) d(AC)= $\sqrt{(3+3)^2+(-7-1)^2}=\sqrt{(6)^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

4) Perimetro= $5\sqrt{5}+5+10=5\sqrt{5}+15$

Esempio D2.2:
Trovare l'area del triangolo ABC conoscendone i vertici A(5;1) B(-2;3) C(2;15/4).

Grafico



Dati:
A(5;1)
B(-2;3)
C(2;15/4)

Risultati:
d(AB)=
r:
d(Cr)=
Area=

Procedimento:

1) distanza tra due punti	A(5;1) B(-2;3)	→	d(AB)	lunghezza della base
2) retta per due punti	A(5;1) B(-2;3)	→	retta r	equazione retta base
3) distanza punto - retta	C(2;15/4) e r	→	d(Cr)	altezza

4) Area = [Base·Altezza]/2 = [d(AB)·d(Cr)]/2

Calcoli:

1) d(AB)= $\sqrt{(-2-5)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(-7)^2+(2)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$

2) r: $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-5}{-2-5}\Rightarrow\frac{y-1}{2}=\frac{x-5}{-7}\Rightarrow\frac{7(y-1)=-2(x-5)}{14}\Rightarrow 7y-7=-2x+10\Rightarrow 2x+7y-7-10=0\Rightarrow 2x+7y-17=0$

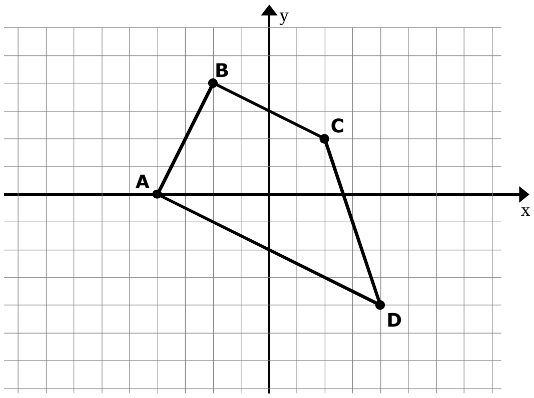
3) $d=\frac{\left|2\cdot2+7\cdot\frac{15}{4}-17\right|}{\sqrt{(2)^2+(7)^2}}=\frac{\left|4+\frac{105}{4}-17\right|}{\sqrt{4+49}}=\frac{\left|\frac{16+105-68}{4}\right|}{\sqrt{53}}=\frac{\left|\frac{53}{4}\right|}{\sqrt{53}}=\frac{53}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{53}}\cdot\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{53}}=\frac{\sqrt{53}}{4}$

4) Area = $d=\frac{\frac{\sqrt{53}}{4}\cdot\sqrt{53}}{2}=\frac{53}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{53}{8}$

Resta inteso che se si vede dal disegno il risultato di qualche passaggio non è necessario svolgere inutilmente i calcoli.

Esempio D2.3: Verificare che ABCD con A(-4;0) B(-2;4) C(2;2) D(4;-4) è un trapezio rettangolo.

Grafico



Dati:
A(-4;0)
B(-2;4)
C(2;2)
D(4;-4)

Risultati:
retta AB
retta AD
retta BC

Procedimento:
Un quadrilatero è un trapezio se due lati sono paralleli ed è rettangolo se uno degli altri lati è perpendicolare agli altri due. L'idea è trovare le 3 rette (dal disegno sembra che siano paralleli AD e BC, perpendicolare è AB) e confrontare gli m. Se i coefficienti angolari sono uguali le rette sono parallele, se sono inversi e opposti le rette sono perpendicolari.

1) retta per due punti	A(-4;0) D(4;-4)	→	r(AD)
2) retta per due punti	B(-2;4) C(2;2)	→	r(BC)
3) retta per due punti	A(-4;0) B(-2;4)	→	r(AB)

4) Confrontare i coefficienti angolari delle tre rette.

Calcoli:

1) Si vede dal disegno che la retta AD ha q=-2 e $m=-\frac{1}{2}$ quindi ha equazione $y=-\frac{1}{2}x-2$.

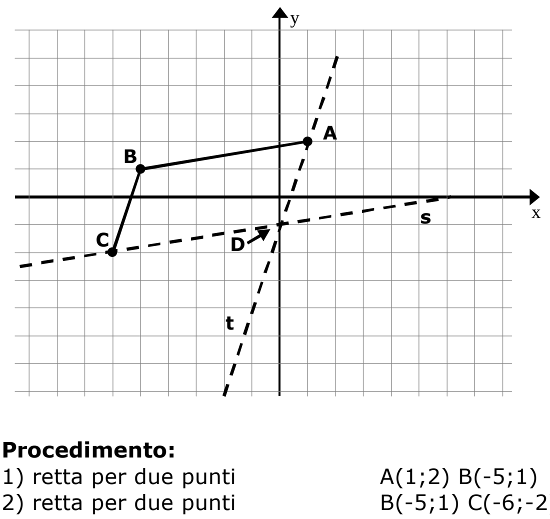
2) Si vede dal disegno che la retta BC ha q=3 e $m=-\frac{1}{2}$ quindi ha equazione $y=-\frac{1}{2}x+3$.

3) Prolungando verso l'alto la retta AB si vede che q=8 e m=+2 quindi ha equazione y=2x+8.

4) Confrontiamo i coefficienti. La retta AD e la retta BC hanno lo stesso $m=-\frac{1}{2}$, quindi sono parallele. La retta AB ha m=+2 che è inverso e opposto a $m=-\frac{1}{2}$ e quindi è perpendicolare alle due rette precedenti. Da ciò si deduce che il quadrilatero è un trapezio rettangolo.

Esempio D2.4: Trovare il quarto vertice del parallelogramma ABCD conoscendo A(1;2) B(-5;1) C(-6;-2).

Grafico



Dati:
A(1;2)
B(-5;1)
C(-6;-2)

Risultati:
r(AB):
r(BC):
s
t
D

Procedimento:

1) retta per due punti	A(1;2) B(-5;1)	→	r(AB)
2) retta per due punti	B(-5;1) C(-6;-2)	→	r(BC)
3) retta per C parallela ad AB	C(-6;-2) e r(AB)	→	retta s
4) retta per A parallela a BC	A(1;2) e r(BC)	→	retta t
5) Intersezione tra due rette	s, t	→	D

Calcoli:

1) r(AB): $\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{-5-1}\Rightarrow\frac{y-2}{-1}=\frac{x-1}{-6}\Rightarrow\frac{6(y-2)=x-1}{-6}\Rightarrow 6y-12=x-1\Rightarrow 6y=x-1+12\Rightarrow\frac{6y}{6}=\frac{x}{6}+\frac{11}{6}\Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{11}{6}$

2) r(BC): $\frac{y-1}{-2-1}=\frac{x+5}{-6+5}\Rightarrow\frac{y-1}{-3}=\frac{x+5}{-1}\Rightarrow\frac{y-1=3(x+5)}{-3}\Rightarrow y-1=3x+15\Rightarrow y=3x+1+15\Rightarrow y=3x+16$

3) s: $y+2=\frac{1}{6}(x+6)\Rightarrow y+2=\frac{1}{6}x+1\Rightarrow y=\frac{1}{6}x+1-2\Rightarrow y=\frac{1}{6}x-1$ (si vede anche dal disegno)

4) t: $y-2=3(x-1)\Rightarrow y-2=3x-3\Rightarrow y=3x-3+2\Rightarrow y=3x-1$ (si vede anche dal disegno)

5) $\begin{cases}y=\frac{1}{6}x-1\\y=3x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-1=\frac{1}{6}x-1\\y=3x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{6(3x-1)=x-6}{6}\\y=3x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}18x-6=x-6\\y=3x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}18x-x=-6+6\\y=3x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}17x=0\\y=3x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\cdot 0-1=-1\end{cases}\Rightarrow$ D(0;-1)

D2.3 Punti notevoli di un triangolo

MEDIANE E BARICENTRO

Le mediane sono le rette passanti per un vertice e per il punto medio del lato opposto.
Le tre mediane di un triangolo si incontrano nel baricentro.
Per trovare le equazioni delle mediane si deve:

- Trovare il punto medio di un lato del triangolo (formula del punto medio).
- Trovare la retta passante per il punto medio e il vertice opposto (retta per due punti).

Per trovare il baricentro basta trovare DUE mediane e poi risolvere il sistema (intersezione tra due rette).
Esiste una formula più rapida per trovare il baricentro di un triangolo:

Baricentro $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

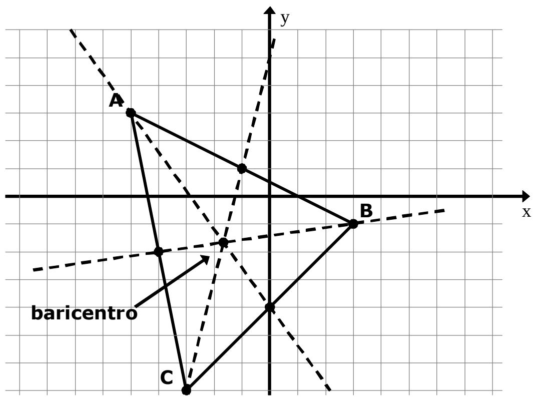


Fig. D2.1
Costruzione del baricentro come intersezione delle mediane.

ALTEZZE E ORTOCENTRO

Le altezze sono le rette passanti per un vertice e perpendicolari al lato opposto.
Le tre altezze di un triangolo si incontrano nell'ortocentro.
Per trovare le equazioni delle altezze si deve:

- Trovare la retta passante per due vertici del triangolo (retta per due punti)
- Trovare la retta passante per il vertice opposto e perpendicolare alla retta trovata nel passaggio precedente (retta per un punto)

Per trovare l'ortocentro basta trovare DUE altezze e poi risolvere il sistema (intersezione tra due rette)

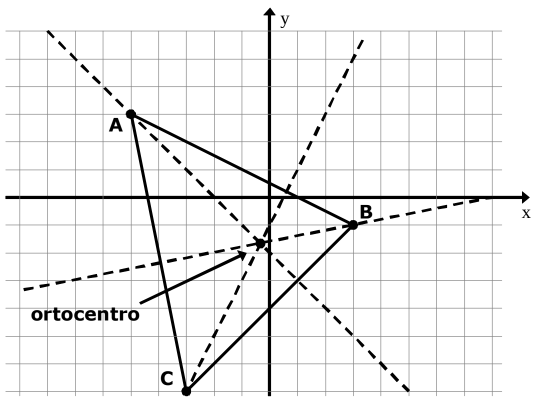


Fig. D2.2
Costruzione dell'ortocentro come intersezione delle altezze.

ASSI E CIRCOCENTRO
Gli assi sono le rette passanti per il punto medio di un lato e perpendicolari allo stesso lato.
I tre assi di un triangolo si incontrano nel circocentro.

Per trovare le equazioni degli assi si deve:

- Trovare il punto medio di un lato del triangolo (formula del punto medio).
- Trovare la retta passante per il punto medio e perpendicolare al lato stesso (retta per un punto).

Per trovare il circocentro basta trovare DUE assi e poi risolvere il sistema (intersezione tra due rette).
Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

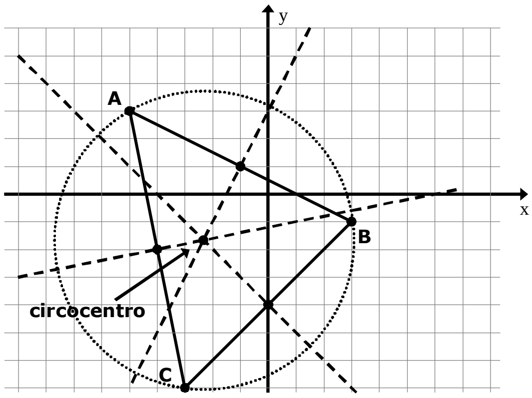


Fig. D2.3
Costruzione del circocentro come intersezione delle altezze.

BISETTRICI E INCENTRO
Le bisettrici sono le rette passanti per un vertice che tagliano l'angolo in due parti uguali.
Le tre bisettrici di un triangolo si incontrano nell'incentro.
Il procedimento geometrico per trovare bisettrici e incentro è stato probabilmente già studiato alle scuole medie inferiori con l'utilizzo del compasso. Il procedimento algebrico segue quello geometrnon è trattato in questo capitolo perché servono conoscenze di argomenti non ancora svolti (luoghi geometrici).
L'incentro è il centro della circonferenza inscritta al triangolo.

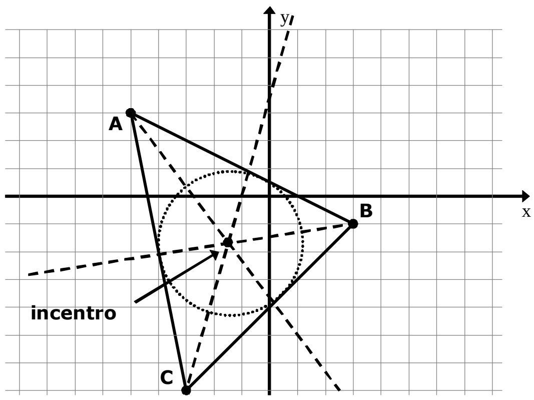


Fig. D2.4
Costruzione dell'incentro come intersezione delle bisettrici.