B9. Equazioni di grado superiore al secondo

Le equazioni di **terzo** grado hanno una, due o tre soluzioni, risolvibili algebricamente con formule molto più complesse di quelle dell'equazione di secondo grado.
Le equazioni di **quarto** grado hanno zero, una, due, tre o quattro soluzioni, risolvibili algebricamente con formule molto più complesse di quelle dell'equazione di secondo grado.
Le equazioni di grado **superiore al quarto** NON sono sempre risolvibili esattamente con metodi algebrici.
Per questa ragione in questo capitolo si useranno alcuni metodi per risolvere solo certe tipologie di equazioni di grado superiore al secondo. NON SI POTRANNO RISOLVERE CON QUESTI METODI TUTTE LE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO.

B9.1 Legge di annullamento del prodotto

Il procedimento è lo stesso di quello già visto per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, cambia solamente il grado dell'equazione. Un'equazione di terzo grado avrà al più 3 soluzioni, una di quarto grado al più 4, e così via.

Se $a \cdot b \cdot c=0$ allora $a=0$ oppure $b=0$ oppure $c=0$.

Pertanto se $x \cdot (x-1) \cdot (x+2)=0$ allora sarà zero:
- il primo fattore x oppure
- il secondo fattore $(x-1)$ oppure
- il terzo fattore $(x+2)$

- primo fattore $x=0$ per $x_1=0$
- secondo fattore $(x-1)=0$ per $x_2=1$
- terzo fattore $(x+2)=0$ per $x_3=-2$

Le soluzioni di $x \cdot (x-1) \cdot (x+2)=0$ sono quindi tre: $x_1=0$, $x_2=1$ e $x_3=-2$.
Questo esercizio era particolarmente semplice perché il polinomio $x \cdot (x-1) \cdot (x+2)$ è già scomposto in fattori.
Se il polinomio non è scomposto in fattori lo si deve prima scomporre.

PROCEDIMENTO:
- Portare tutto a primo membro.
- Scomporre in fattori il polinomio.
- Trovare i valori che sostituiti al posto dell'incognita annullino i singoli fattori.

Esempio B9.1:

$x^3-4x=0$
$x(x^2-4)=0$
$x(x-2)(x+2)=0$

$x_1=0$, $x_2=2$ $x_3=-2$

Esempio B9.2:

$2x^4-6x^3=0$
$2x^3(x-3)=0$

$x_1=0$ $x_2=3$

Esempio B9.3:

$4x^3-4x^2+x=0$
$x(4x^2-4x+1)=0$
$x(2x-1)^2=0$

$x_1=0$ $x_2=\frac{1}{2}$

Esempio B9.4:

$x^3+5x^2+3x-9=0$
utilizzando la regola di Ruffini si ottiene
$(x-1)(x^2+6x+9)=0$
$(x-1)(x+3)^2=0$

$x_1=1$, $x_2=-3$

Esempio B9.5:

$5x^7=0$

$x=0$

Esempio B9.6:

$x^3-5x^2-4x+20=0$

$x^2(x-5)-4(x-5)=0$

$(x-5)(x^2-4)=0$

$(x-5)(x-2)(x+2)=0$

$x_1=5 \quad x_2=2 \quad x_3=-2$

B9.2 Equazioni binomie

Le equazioni binomie sono (lo dice il nome) quelle composte da due termini, di cui uno dei due non contiene l'incognita. Si possono classificare in quattro categorie in base all'esponente della x (pari o dispari), e al segno del numero a secondo membro (positivo o negativo).

Esponente \ Numero a secondo membro	POSITIVO	NEGATIVO
PARI	$16x^4-1=0$ $16x^4=1$ $x^4=\frac{1}{16}$ $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\pm\frac{1}{2}$	$x^6+1=0$ $x^6=-1$ $x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{-1}$ impossibile la radice pari di un numero negativo non esiste quindi l'equazione è impossibile.
DISPARI	$x^3-5=0$ $x^3=5$ $x=\sqrt[3]{5}$	$x^3+27=0$ $x^3=-27$ $x=\sqrt[3]{-27}=-3$

Se ne deduce che le equazioni binomie con esponente pari possono avere 2 soluzioni o nessuna.
Quelle con esponente dispari hanno invece sempre 1 sola soluzione.

B9.3 Equazioni trinomie

Le equazioni trinomie sono quelle (lo dice il nome) composte da tre termini.
Anche in questo caso va portato tutto a primo membro e ordinato il polinomio dal grado più alto al più basso.
Il primo termine (di grado più alto) ha il grado doppio del secondo termine, e il terzo termine non contiene la x.

Per risolvere queste equazioni si effettua una sostituzione in maniera da ricondursi ad una equazione di secondo grado.

Esempio B9.7:

$x^4-5x^2+4=0$ Si pone $t=x^2$

$t^2-5t+4=0$

$(t-1)(t-4)=0$

$t_1=1 \quad x^2=1 \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{1}=\pm1$

$t_2=4 \quad x^2=4 \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{4}=\pm2$

Esempio B9.8:

$x^4+4x^2+4=0$ Si pone $t=x^2$

$t^2+4t+4=0$

$(t+2)^2=0$

$t_1=-2 \quad x^2=-2 \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-2}$

non accettabile, quindi l'equazione, non avendo soluzioni, è IMPOSSIBILE

Esempio B9.9:

$16x^8-63x^4-4=0$ Si pone $t=x^4$

$16t^2-63t-4=0$

$$t_{1,2}=\frac{63\pm\sqrt{(63)^2-4(16)(-4)}}{2(16)}=\frac{63\pm\sqrt{3969+256}}{32}=$$

$$=\frac{63\pm\sqrt{4225}}{32}=\frac{63\pm65}{32}$$

$t_1 = \frac{63+65}{32} = \frac{128}{32} = 4$ $\qquad x^4=4 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt[4]{2^2} = \pm\sqrt{2}$

$t_2 = \frac{63-65}{32} = -\frac{2}{32} = -\frac{1}{16}$ $\qquad x^4= -\frac{1}{16} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{1}{16}}$ non accettabile

Quando la sostituzione è del tipo $t=x^{pari}$ ci possono essere zero soluzioni, due soluzioni o quattro soluzioni.

Esempio B9.10:

$x^6+7x^3-8=0$ $\qquad$ Si pone $t=x^3$

$t^2+7t-8=0$

$(t+8)(t-1)=0$

$t_1=-8 \qquad x^3=-8 \qquad x_1 = \sqrt[3]{-8} = -2$

$t_2=1 \qquad x^3=1 \qquad x_2 = \sqrt[3]{1} = 1$

Esempio B9.11:

$x^{10}+34x^5+64=0$ $\qquad$ Si pone $t=x^5$

$t^2+34t+64=0$

$(t+32)(t+2)=0$

$t_1=-32 \qquad x^3=-32 \qquad x_1 = \sqrt[5]{-32} = -2$

$t_2=-2 \qquad x^3=-2 \qquad x_2 = \sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}$

Quando la sostituzione è del tipo $t=x^{dispari}$ ci saranno sempre esattamente due soluzioni.

B9.4 Equazioni irrazionali

Le equazioni irrazionali sono quelle in cui l'incognita si trova anche sotto la radice.

PROCEDIMENTO

- Si isola la radice.
- Si elevano al quadrato tutti e due i membri, così facendo si elimina una radice.
- Si risolve l'equazione.
- Si verificano i risultati sostituendoli nell'equazione di partenza.

Se ci sono più radici il procedimento va ripetuto più volte, in modo da eliminare ogni volta la radice che si trova da sola.
Le soluzioni vanno verificate: **si deve sostituire** il valore trovato al posto dell'incognita nell'equazione di partenza e **si deve controllare** che tale valore soddisfi l'equazione.
La verifica è necessaria perché ogni volta che si eleva al quadrato c'è il rischio di aggiungere all'equazione soluzioni FALSE, ossia valori che sono soluzioni dell'equazione elevata alla seconda ma <u>non sono</u> soluzioni dell'equazione di partenza. Se nessuna delle soluzioni è accettabile allora l'equazione è IMPOSSIBILE.

Esempio B9.12:

$x-\sqrt{x+5} = -3$

$x+3 = \sqrt{x+5}$

$(x+3)^2 = \left(\sqrt{x+5}\right)^2$

$x^2+6x+9 = x+5$

$x^2+6x+9-x-5 = 0$

$x^2+5x+4 = 0$

$(x+4)(x+1) = 0$

$x_1=-4 \quad x_2=-1$

Verifica $x_1=-4$

$-4-\sqrt{-4+5} = -3$

$-4-\sqrt{1} = -3$

$-5 = -3$

NON ACCETTABILE

Verifica $x_2=-1$

$-1-\sqrt{-1+5} = -3$

$-1-\sqrt{4} = -3$

$-1-2 = -3$

ACCETTABILE

Questa equazione ha una sola soluzione, $x=-1$

Esempio B9.13:

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=2$$
$$\sqrt{2+x}=2-\sqrt{2-x}$$
$$\left(\sqrt{2+x}\right)^2=\left(2-\sqrt{2-x}\right)^2$$
$$2+x=4+2-x-4\sqrt{2-x}$$
$$2+x-4-2+x=-4\sqrt{2-x}$$
$$(2x-4)^2=\left(-4\sqrt{2-x}\right)^2 \qquad x_1=2 \quad x_2=-2$$
$$4x^2-16x+16=16(2-x)$$
$$4x^2-16x+16=32-16x$$
$$4x^2-16x+16-32+16x=0$$
$$4x^2-16=0$$
$$4\left(x^2-4\right)=0$$
$$4(x-2)(x+2)=0$$

Verifica $x_1=2$

$$\sqrt{2+2}+\sqrt{2-2}=2$$
$$\sqrt{4}+\sqrt{0}=2$$
$$2+0=2$$

ACCETTABILE

Verifica $x_1=-2$

$$\sqrt{2-2}+\sqrt{2+2}=2$$
$$\sqrt{0}+\sqrt{4}=2$$
$$0+2=2$$

ACCETTABILE

Questa equazione ha due soluzioni, $x_1=2$ e $x_2=-2$, in quanto entrambi i valori trovati sono accettabili.