B8. Equazioni di secondo grado

B8.1 Legge di annullamento del prodotto

Sapendo che $a \cdot b=0$ si può dedurre che $a=0$ oppure $b=0$. Questa è la **legge di annullamento del prodotto**.
Pertanto sapendo che $(x-1)\cdot(x+2)=0$ allora dovrà valere zero il primo fattore $(x-1)$ o il secondo fattore $(x+2)$.
Il primo fattore $(x-1)=0$ per $x_1=1$; il secondo fattore $(x+2)=0$ per $x_2=-2$.
Le soluzioni dell'equazione $(x-1)\cdot(x+2)=0$ sono quindi $x_1=1$ e $x_2=-2$
Questo esercizio era particolarmente semplice perché $(x-1)\cdot(x+2)$ è già scomposto in fattori.
Se il polinomio di partenza non è scomposto in fattori bisogna prima scomporlo e poi applicare il procedimento appena visto.
PROCEDIMENTO:

- Portare tutto a primo membro.
- Scomporre in fattori il polinomio.
- Determinare i valori che messi al posto della x annullano i singoli fattori.

Esempio B8.1:

$x^2-4=0$
$(x-2)(x+2)=0$

$x_1=2$ $\quad$ $x_2=-2$

Esempio B8.2:

$x^2-3x=0$
$x(x-3)=0$

$x_1=0$ $\quad$ $x_2=3$

Esempio B8.3:

$4x^2-2x=0$
$2x(2x-1)=0$

$x_1=0$ $\quad$ $x_2=1/2$

Esempio B8.4:

$x^2+6x+9=0$
$(x+3)^2=0$

$x=-3$

Esempio B8.5:

$5x^2=0$

$x=0$

Esempio B8.6:

$x^2-3x-10=0$
$(x-5)(x+2)=0$

$x_1=5$ $\quad$ $x_2=-2$

Esempio B8.7:

$x^2+9=0$
non si scompone per la regola a^2+b^2

impossibile

Esempio B8.8:

$2x^2-3x-5=0$
$(2x-5)(x+1)=0$ $\quad$ Ruffini

$x_1=5/2$ $\quad$ $x_2=-1$

Esempio B8.9:
$x^2+4x+8=0$

Esempio B8.10:
$x^2-4x-6=0$

In questi ultimi due casi non si riesce a scomporre con le regole studiate nel capitolo B3.

Nell'esempio B8.8 per scomporre si è usata la regola di Ruffini, ma si poteva utilizzare anche la formula risolvente già vista nel paragrafo B3.3. Nell'esempio B8.9 e nell'esempio B8.10 non si è ancora visto come affrontare il problema, ed in questi casi converrà usare la formula risolvente, che si vedrà più avanti. Utilizzando la formula risolvente il B8.9 risulterà essere impossibile, mentre il B8.10 risulterà avere 2 soluzioni.

Quindi le soluzioni possono essere nessuna (esempi B8.7 e B8.9), una (esempi B8.4 e B8.5) oppure due (esempi B8.1, B8.2, B8.3, B8.6, B8.8, B8.10)

B8.2 Formula risolvente

La formula risolvente funziona per tutte le equazioni di secondo grado. Se possibile conviene però scomporre in fattori perché è un metodo più veloce, e usare la formula solo quando non si riesce a scomporre rapidamente.

Per trovare x_1 e x_2 si usa la formula $$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

che è da imparare a memoria PER SEMPRE, perché si userà in tutti i prossimi anni di scuola e all'università.

Si presti attenzione che:

- **a è il coefficiente della x^2.**
- **b è il coefficiente della x.**
- **c è il coefficiente senza la x, detto termine noto.**

Ecco la risoluzione di un'equazione sia con la scomposizione in fattori che con la formula risolvente. Si nota come sia più veloce il metodo che fa uso della scomposizione in fattori.

Esempio B8.1 risolto con la scomposizione in fattori:
$x^2-4=0$
$(x-2)(x+2)=0$
$x_1=2$ $\quad x_2=-2$

Esempio B8.1 risolto con la formula risolvente: a=1 b=0 c=-4

$$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{0\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{\pm4}{2}=\begin{cases}=\frac{4}{2}=2\\[4pt]=\frac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

Come già detto non tutte le equazioni si possono risolvere con la scomposizione in fattori.
Si mostrano ora gli esempi per cui non si utilizza la scomposizione in fattori:

Esempio B8.9:
$x^2+4x+8=0$ a=1 b=4 c=8

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(8)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2}$$

La radice di un numero negativo non si può calcolare quindi l'equazione è impossibile.

Esempio B8.10:
$x^2-4x-6=0$ a=1 b=-4 c=-6

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-6)}}{2(1)}=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{2}=\frac{\cancel{2}\cdot\left(2\pm\sqrt{10}\right)}{\cancel{2}}=\begin{cases}=2+\sqrt{10}\\=2-\sqrt{10}\end{cases}$$

In questo caso le soluzioni sono due. Per passare da $\sqrt{40}$ a $2\sqrt{10}$ si è scomposto il 40 in fattori e si è portato fuori.

Esempio B8.11:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \qquad a=2 \qquad b=2\sqrt{2} \quad c=1$$

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-8}}{4} = \frac{2\sqrt{2} \pm 0}{4} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

In questo caso sotto la radice c'è zero per cui c'è solamente una soluzione.

Le soluzioni possono dunque essere 0, 1 o 2, e il numero dipende da quello che si trova sotto la radice nella formula risolvente.
Quello che si trova sotto la radice è detto discriminante e si indica con la lettera greca DELTA (Δ).
Pertanto $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- Se il $\Delta<0$ non ci sono soluzioni e l'equazione è impossibile.
- Se il $\Delta=0$ c'è una soluzione.
- Se il $\Delta>0$ ci sono due soluzioni.

E' quindi possibile, calcolando il discriminante, capire quante soluzioni ha una equazione di secondo grado.

B8.3 Equazioni frazionarie

Le equazioni fratte sono quelle in cui c'è l'incognita al denominatore.
Si ricorda che E' VIETATO DIVIDERE PER ZERO.
Pertanto $\frac{5}{0}$ è una scrittura che non ha senso. Bisogna quindi escludere dalle possibili soluzioni tutti i valori che annullano il denominatore. Tale problema è stato già affrontato per le equazioni di primo grado.
Il procedimento è quindi molto simile a quello per risolvere le equazioni di primo grado fratte.

PROCEDIMENTO

- Si scompongono in fattori i denominatori.
- Si calcola il denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il campo di esistenza.
  Bisogna indicare con x≠… quali sono i valori della x che annullano il denominatore.
  Per fare ciò si pone il denominatore diverso da zero.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano TUTTI I TERMINI A PRIMO MEMBRO.
- Si sommano i termini simili.
- Si risolve l'equazione.
- Si verifica che le soluzioni non siano quelle escluse con il campo di esistenza.
  - Se una soluzione era stata esclusa è detta non accettabile.
  - Se tutte le soluzioni sono non accettabili allora l'equazione è impossibile.

Vengono ora svolti tre esempi.

- In uno di questi una delle due è accettabile e l'altra no (es. B8.12).
- In uno di questi tutte e due le soluzioni sono accettabili (es. B8.13).
- In uno di questi tutte e due le soluzioni sono non accettabili e l'equazione è impossibile (es. B8.14).

Esempio B8.12: $\frac{x^2+8}{x^2-4} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2}$

C.E.

$x+2 \neq 0 \quad x \neq -2$

$x-2 \neq 0 \quad x \neq 2$

$$\frac{x^2+8}{x^2-4} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2}$$

$$\frac{x^2+8}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2}$$

$$\frac{1 \cdot \left(x^2+8\right) = 3 \cdot (x+2) - 2 \cdot (x-2)}{\cancel{(x-2)(x+2)}}$$

$$x^2 + 8 = 3x + 6 - 2x + 4$$

$$x^2 + 8 - 3x - 6 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$x_1 = 2$ NON ACCETTABILE

$x_2 = -1$ ACCETTABILE

- Si scompongono i denominatori.
- Denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il C.E.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano tutti i termini a primo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si risolve l'equazione, in questo caso con la scomposizione con il trinomio di secondo grado.
- La soluzione x=2 è una di quelle escluse dal C.E. quindi è non accettabile.
  La soluzione x=-1 non è una di quelle escluse dal campo di esistenza quindi è accettabile.

Esempio B8.13: $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{4-x} = \frac{3x+18}{x^2-3x-4}$

C.E.

$x+1 \neq 0 \quad x \neq -1$

$x-4 \neq 0 \quad x \neq 4$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{4-x}=\frac{3x+18}{x^2-3x-4}$$
$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{4-x}=\frac{3x+18}{(x-4)(x+1)}$$
$$\frac{x\cdot(x-4)-2x\cdot(x+1)=(3x+18)\cdot 1}{\cancel{(x-4)(x+1)}}$$
$$x^2-4x-2x^2-2x=3x+18$$
$$x^2-4x-2x^2-2x-3x-18=0$$
$$-x^2-9x-18=0$$
$$-(x^2+9x+18)=0$$
$$-(x+6)\cdot(x+3)=0$$
$x_1=-6$ ACCETTABILE

$x_2=-3$ ACCETTABILE

- Si scompongono i denominatori.
- Denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il C.E.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano tutti i termini a primo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si risolve l'equazione, in questo caso con il raccoglimento e il trinomio di secondo grado.
- Le soluzioni non sono quelle escluse dal campo di esistenza pertanto sono entrambe accettabili.

Esempio B8.14: $1-\frac{x+2}{2x^2-4x}=\frac{x+1}{2x}-\frac{x-1}{x-2}$

C.E.

$2x\neq 0 \quad x\neq 0$

$x-2\neq 0 \quad x\neq 2$

$$1-\frac{x+2}{2x^2-4x}=\frac{x+1}{2x}-\frac{x-1}{x-2}$$
$$1-\frac{x+2}{2x(x-2)}=\frac{x+1}{2x}-\frac{x-1}{x-2}$$
$$\frac{1\cdot 2x(x-2)-(x+2)\cdot 1=(x+1)(x-2)-2x\cdot(x-1)}{\cancel{2x(x-2)}}$$
$$2x^2-4x-x-2=x^2-2x+x-2-2x^2+2x$$
$$2x^2-4x-x-2-x^2+2x-x+2+2x^2-2x=0$$
$$3x^2-6x=0$$
$$3x\cdot(x-2)=0$$
$x_1=0$ NON ACCETTABILE

$x_2=2$ NON ACCETTABILE

L'EQUAZIONE E' IMPOSSIBILE

- Si scompongono i denominatori.
- Denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il C.E.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano tutti i termini a primo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si risolve l'equazione, in questo caso con il raccoglimento.
- Le soluzioni sono quelle escluse dal campo di esistenza pertanto sono entrambe NON accettabili. L'equazione è impossibile.

B8.4 Equazioni letterali

Le equazioni letterali sono equazioni nelle quali oltre all'incognita sono presenti altre lettere.
Al termine della risoluzione è necessario discutere le soluzioni.
Ecco alcuni esempi.

Esempio B8.15: $abx^2-2bx=0$

$abx^2-2bx=0$

$x(abx-2b)=0$

$x_1=0$ $\quad$ $abx=2b$

$$x_2=\frac{2\cancel{b}}{a\cancel{b}}=\frac{2}{a}$$

Discussione:
Al denominatore della seconda soluzione si trova ab.
Il denominatore deve risultare diverso da zero, ossia $ab\neq 0$, da cui:
- Se $a\neq 0$ e $b\neq 0$ le soluzioni sono quelle trovate, ossia $x_1=0$ e $x_2=2/a$.
- Se $b=0$ sostituendo tale valore in $abx^2-2bx=0$ si ottiene $0=0$ ossia indeterminata.
- Se $a=0$ e $b\neq 0$ sostituendo tali valori in $abx^2-2bx=0$ si ottiene $x=0$ quindi c'è una sola soluzione, $x=0$.

Esempio B8.16: $a^2(x-1)^2-1=0$

Per iniziare si svolgono i calcoli per scrivere l'equazione nella forma $ax^2+bx+c=0$
$$a^2(x^2-2x+1)-1=0$$
$$a^2x^2-2a^2x+a^2-1=0$$
$$a=a^2 \quad b=-2a^2 \quad c=a^2-1$$
$$x_{1,2}=\frac{2a^2\pm\sqrt{(-2a^2)-4(a^2)(a^2-1)}}{2(a^2)}=\frac{2a^2\pm\sqrt{4a^4-4a^4+4a^2}}{2a^2}=$$
$$=\frac{2a^2\pm\sqrt{4a^2}}{2a^2}=\frac{2a^2\pm 2a}{2a^2}=\frac{2a(a\pm 1)}{2a^2}=\frac{a\pm 1}{a}$$

Discussione:

al denominatore nella formula risolvente si trova $2a^2$.
Il denominatore deve essere diverso da zero, ossia $a\neq 0$, da cui:

- Se $a\neq 0$ le soluzioni sono quelle trovate, ossia $x_1=(a+1)/a$ e $x_2=(a-1)/a$
- Se $a=0$ sostituendo tale valore in $a^2(x-1)^2-1=0$ si ottiene $-1=0$ quindi l'equazione è impossibile.

<u>Esempio B8.17:</u> $x(a^2x+1)+1=ax(x+2)$

Per iniziare si svolgono i calcoli per scrivere l'equazione nella forma $ax^2+bx+c=0$

$$a^2x^2+x+1=ax^2+2ax$$

$$a^2x^2+x+1-ax^2-2ax=0$$

$$(a^2-a)x^2+x(1-2a)+1=0$$

$a=a^2$-a b=1-2a c=1

$$x_{1,2}=\frac{-1+2a\pm\sqrt{(1-2a)^2-4(a^2-a)\cdot 1}}{2(a^2-a)}=\frac{-1+2a\pm\sqrt{1+4a^2-4a-4a^2+4a}}{2a(a-1)}=$$

$$=\frac{-1+2a\pm\sqrt{1}}{2a(a-1)}=\frac{-1+2a\pm 1}{2a(a-1)}=$$

$$=\frac{-1+2a+1}{2a(a-1)}=\frac{2a}{2a(a-1)}=\frac{1}{a-1}$$

$$=\frac{-1+2a-1}{2a(a-1)}=\frac{2a-2}{2a(a-1)}=\frac{2(a-1)}{2a(a-1)}=\frac{1}{a}$$

Discussione:

al denominatore nella formula risolvente si trova 2a(a-1) quindi le condizioni affinché il denominatore sia diverso da zero sono $a\neq 0$ e $a\neq 1$.

- Se $a\neq 0$ e $a\neq 1$ le soluzioni sono quelle trovate, ossia $x_1=1/(a-1)$ e $x_2=1/a$.
- Se $a=0$ sostituendo in
  $(a^2-a)x^2+x(1-2a)+1=0$ si ottiene $x+1=0$, da cui $x=-1$ e si trova una sola soluzione.
- Se $a=1$ sostituendo in
  $(a^2-a)x^2+x(1-2a)+1=0$ si ottiene $-x+1=0$, da cui $x=1$ e quindi si trova una sola soluzione.

<u>Esempio B8.18:</u> $\frac{2x}{2a+1}+\frac{a}{x(2a+1)}+1=0$

Prima di tutto si svolgono i calcoli per scrivere l'equazione nella forma $ax^2+bx+c=0$

$$\frac{2x}{2a+1}+\frac{a}{x(2a+1)}+1=0$$

$$\frac{2x\cdot x+a+1\cdot x(2a+1)}{\cancel{x(2a+1)}}=0$$

C.E.
$x\neq 0$
$2a+1\neq 0$
$a\neq -1/2$

$$2x^2+x(2a+1)+a=0$$

$a=2$ $b=2a+1$ $c=a$

$$x_{1,2}=\frac{-2a-1\pm\sqrt{(2a+1)^2-4(2)\cdot(a)}}{2(2)}=\frac{-2a-1\pm\sqrt{4a^2+4a+1-8a}}{4}=$$

$$=\frac{-2a-1\pm\sqrt{4a^2-4a+1}}{4}=\frac{-2a-1\pm\sqrt{(2a-1)^2}}{4}=$$

$$=\frac{-2a-1\pm(2a-1)}{4}=$$

$$=\frac{-2a-1+2a-1}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-2a-1-2a+1}{4}=\frac{-4a}{4}=-a$$

Discussione:

al denominatore nella formula risolvente si trova 4 che è sempre diverso da zero.

L'unica discussione è quella relativa al C.E.

- Se $a=-1/2$ l'equazione perde di significato.

L'equazione perde di significato anche per $x=0$.

- Se $a=0$ la seconda sol. diventa $x=0$ perciò se $a=0$ è accettabile solo la soluzione $x=-1/2$

B8.5 Equazioni parametriche

I parametri sono lettere che si trovano nell'incognita oltre all'incognita.
Nelle equazioni parametriche viene posta la seguente domanda:
per quali valori dei parametri si verificano determinate condizioni?
Per rispondere a queste domande bisogna prima studiare alcuni concetti:

1) Relazioni fra coefficienti e soluzioni di una equazione di secondo grado.
Chiamando x_1 e x_2 le soluzioni di una equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ valgono le seguenti relazioni:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$

2) Significato del $\Delta=b^2-4ac$

- Se il $\Delta<0$ non ci sono soluzioni e l'equazione è impossibile.
- Se il $\Delta=0$ c'è una soluzione (ossia due radici coincidenti).
- Se il $\Delta>0$ ci sono due soluzioni.

3) Una soluzione è nulla se c =0.
Infatti sostituendo il valore x=0 in $ax^2+bx+c=0$ si ottiene c=0.

4) Le soluzioni sono opposte se $x_1=-x_2$ ossia $x_1+x_2=0$ da cui $-\frac{b}{a}=0$ e quindi b=0.

5) Le soluzioni sono inverse se $x_1=\frac{1}{x_2}$ con il den comune $x_1 \cdot x_2=1$ ossia $\frac{c}{a}=1$.

6) Se è data una soluzione basta sostituirla nell'equazione e trovare il valore del parametro.

Esempio B8.19:
Data l'equazione $kx^2-(k+1)x+1=0$ (quindi a=k, b=-(k+1) e c=1) dire per quali valori di k sono soddisfatte le condizioni seguenti:

a) *Ci siano soluzioni coincidenti.*
Perché ci siano sol. coincidenti è necessario che $\Delta=0$.
$b^2-4ac=0$ $\quad$ $(k+1)^2-4k=0$ $\quad$ $k^2+2k+1-4k=0$ $\quad$ $k^2-2k+1=0$ $\quad$ $(k-1)^2=0$ $\quad$ $\boxed{k=1}$

b) *La somma delle soluzioni vale 2.*
La somma delle sol. è –b/a perciò:
$-\frac{b}{a}=2$ $\quad$ $-\frac{-(k+1)}{k}=2$ $\quad$ $\frac{k+1}{k}=2$ $\quad$ $\frac{k+1=2k}{k}$ $\quad$ $-2k+k+1=0$ $\quad$ $-k+1=0$ $\quad$ $-k=-1$ $\quad$ $\boxed{k=1}$

c) *Il prodotto delle soluzioni vale 3.*
Il prodotto delle soluzioni è c/a perciò:
$\frac{c}{a}=3$ $\quad$ $\frac{1}{k}=3$ $\quad$ $\frac{1=3k}{k}$ $\quad$ $-3k+1=0$ $\quad$ $-3k=-1$ $\quad$ $\boxed{k=\frac{1}{3}}$

d) *Una soluzione vale -1.*
Si sostituisce il valore –1 al posto della x nell'equazione.
$k(-1)^2-(k+1)\cdot(-1)+1=0$ $\quad$ $k+k+1+1=0$ $\quad$ $2k+2=0$ $\quad$ $2k=-2$ $\quad$ $\boxed{k=-1}$

e) *Una soluzione è nulla.*
Una soluzione è nulla se c=0.
In questo caso c=1 da cui 1=0 impossibile.
Quindi non ci sono valori di k per cui l'equazione data ha una soluzione nulla.

f) *Ci sono due soluzioni opposte.*
Per il punto 4 ci sono due soluzioni opposte se b=0.
In questo caso $-(k+1)=0$ $\quad$ $\boxed{k=-1}$

g) *Ci sono due soluzioni inverse.*
Per il punto 5 ci sono due sol. inverse se c/a=1.
$\frac{c}{a}=1$ $\quad$ $\frac{1}{k}=1$ $\quad$ $\frac{1=k}{k}$ $\quad$ $\boxed{k=1}$

h) *La somma dei quadrati delle soluzioni è 10.*
La condizione si può esprimere così: $x_1^2+x_2^2=10$.
Poiché $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$ allora $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.
Si può quindi scrivere $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$ ossia:
$\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=10$ $\quad$ $\left(-\frac{-(k+1)}{k}\right)^2-2\frac{1}{k}=10$ $\quad$ $\frac{k^2+2k+1-2k=10k^2}{k^2}$
$-9k^2+1=0$ $\quad$ $9k^2-1=0$ $\quad$ $(3k-1)(3k+1)=0$
I possibili valori di k risultano essere due:
$\boxed{k_1=\frac{1}{3} \qquad k_2=-\frac{1}{3}}$

i) *La somma degli inversi delle radici è 5.*

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5 \qquad \frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=5 \qquad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=5 \qquad -\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{c}=5 \qquad -\frac{b}{c}=5 \qquad \frac{k+1}{1}=5 \qquad k=5-1 \qquad \boxed{k=4}$$

Sono possibili molte altre domande che vanno affrontate caso per caso.