B7. Problemi di primo grado

B7.1 Problemi a una incognita

Per la risoluzione di problemi è possibile usare le equazioni di primo grado.
Il procedimento può essere solo indicativo; è fondamentale fare molta pratica nello svolgimento degli esercizi.

PROCEDIMENTO

- Scegliere l'incognita.
- Tradurre il problema in una equazione di primo grado.
- Risolvere l'equazione di primo grado.
- Controllare che le soluzioni siano accettabili per il problema.
- Rispondere alla domanda posta dal problema.

Per quanto riguarda l'accettabilità di una soluzione si consideri il caso in cui si debba determinare l'età di alcune persone. Non è possibile accettare come risultato un'età di -10 anni, perché le età sono sempre indicate con numeri positivi.

Esempio B7.1:
Trovare un numero intero il cui triplo, diminuito di 5, sia uguale a 16.

Si chiami x il numero cercato.
Il suo triplo (indicato con 3x), diminuito di 5 (-5) è uguale a 16 (=16)
L'equazione è quindi 3x-5=16. La si risolve con i procedimenti visti precedentemente.
$3x=16+5$
$3x=21$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{\cancel{21}}{\cancel{3}}$$
$x=7$
Il numero cercato è 7, ed essendo un numero intero soddisfa le condizioni date nel testo dell'equazione.
Se il risultato fosse stato un numero con una parte decimale diversa da zero non sarebbe stato accettabile in quanto numero non intero. Il problema non avrebbe avuto soluzione.

Esempio B7.2:
Trovare due numeri interi pari consecutivi la cui metà della somma dà come risultato 13.

Si chiami x il numero pari più piccolo dei due richiesti. Il numero successivo pari sarà indicato con x+2.
L'equazione è quindi:
$$\frac{1}{2}(x+x+2)=13$$
$$\frac{1}{2}(2x+2)=13$$
$x+1=13$
$x=13-1=12$
Il primo numero è quindi 12, quello successivo pari è 14.
I due numeri cercati sono 12 e 14.
Se si fosse lasciata come risposta x=12 l'esercizio non sarebbe stato considerato terminato in quanto la richiesta era "*trovare due numeri interi*" e non uno solo.

Esempio B7.3:
Dividere il numero 68 in due parti in modo che i due terzi della prima parte corrispondano ai tre quarti della seconda.

Si chiami x la prima parte. L'altra sarà indicata con 68-x, perché le due parti sommate devono dare 68.
Si può quindi scrivere l'equazione $\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}(68-x)$.
$$\frac{8x}{\cancel{12}}=\frac{9(68-x)}{\cancel{12}}$$
$8x=612-9x$
$9x+8x=612$
$17x=612$
$$\frac{\cancel{17}}{\cancel{17}}x=\frac{\cancel{612}}{\cancel{17}}$$
$x=36$
Ora si risponde alla domanda del problema, ossia trovare le due parti richieste.
La prima è 36, la seconda è 68-36=32. Le due parti sono quindi 32 e 36.
Anche qui se ci si fosse fermati a scrivere x=36 non si sarebbe completato il problema, perciò LEGGERE BENE COSA E' RICHIESTO NEL TESTO DEL PROBLEMA.

Esempio B7.4:

Due fratelli hanno 4 anni di differenza e tra 3 anni il fratello minore avrà la metà degli anni del fratello maggiore. Qual è l'età dei due fratelli?

Si indichi con x l'età del fratello minore e con x+4 l'età del fratello maggiore.
Tra tre anni il minore avrà età x+3, il fratello maggiore avrà età x+4+3 ossia x+7.
Quindi si può impostare la seguente equazione:

$$x+3=\frac{1}{2}(x+7)$$

ossia l'età del fratello minore è metà di quella del fratello maggiore.

Si risolve con un denominatore comune: $\frac{2x+6=x+7}{\cancel{2}}$

2x-x=7-6
x=1
Quindi l'età del fratello minore è 1 e quella del fratello maggiore è 1+4=5

Esempio B7.5:
Trovare i lati di un triangolo isoscele, sapendo che il lato obliquo è i tre quarti della base e che il perimetro è 30 cm.

Si indichi con x la base e con $\frac{3}{4}x$ il lato obliquo.

L'equazione è quindi: $\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}x+x=30$.

$$\frac{3x+3x+4x=120}{\cancel{4}}$$

10x=120
x=12
La base ha lunghezza 12 cm. Il lato obliquo è i tre quarti di 12 cm ossia 9 cm.

Esempio B7.6:
In un rombo la diagonale minore è i tre quarti della diagonale maggiore. Sapendo che l'area è 216 cm^2 trovare il perimetro del rombo.

Si indichi con x la diagonale maggiore. La diagonale minore è indicata con $\frac{3}{4}x$.

Poiché l'area del rombo si calcola con la formula "*diagonale maggiore per diagonale minore diviso due*" si può impostare la seguente equazione:

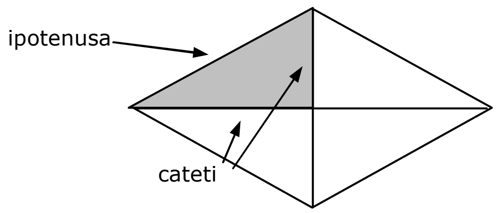

Figura B7.1 Rombo.

$$x\cdot\frac{3}{4}x\cdot\frac{1}{2}=216$$

$$\frac{3x^2=1728}{\cancel{8}}$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}x^2=\frac{\cancel{1728}}{\cancel{3}}$$

x^2=576
Esistono due numeri che elevati alla seconda danno 576, ossia 24 e –24.
x_1=24 x_2=-24

Non essendo possibile che un lato di una figura geometrica abbia lunghezza negativa si deve scartare la soluzione –24.
Pertanto la diagonale maggiore è lunga 24 cm e quella minore, che è i tre quarti della maggiore, avrà lunghezza 18 cm.
Per calcolare il perimetro si deve calcolare un lato e poi moltiplicarlo per 4. Si nota dalla figura B7.1 che si può applicare il teorema di Pitagora ad uno dei quattro triangoli delimitati dalle diagonali.

Ogni triangolo ha come cateti la metà delle diagonali, ossia 12 cm e 9 cm. L'ipotenusa è il lato del rombo.
$Ipotenusa^2 = 12^2+9^2$
$Ipotenusa^2$ = 144+81 = 225
$Ipotenusa_1$ = 15 $Ipotenusa_2$ = -15
Anche qui si scarta la soluzione negativa.
Il perimetro è dato dalla lunghezza del lato moltiplicata per quattro, ossia 15·4=60 cm.

Esempio B7.7:
Trovare il numero intero il cui triplo sommato a 15 dia come risultato 23.

Si indichi con x il numero. L'equazione è quindi 3x+15=23.
3x=23-15
3x=8
x=8/3
Il numero non può essere 8/3 perché nel testo si richiede un NUMERO INTERO.
L'unica soluzione determinata è non accettabile, perciò il problema non ha soluzioni.

B7.2 Problemi a più incognite

Nel caso che gli oggetti da trovare siano due o più e siano in relazione tra loro servono tante relazioni quante le incognite da trovare.

PROCEDIMENTO
- Scegliere le incognite e specificarne bene il significato.
- Tradurre il problema in alcune equazioni a più incognite.
- Risolvere il sistema.
- Controllare che le soluzioni siano accettabili per il problema.
- Rispondere alle richieste del testo.

Esempio B7.8:
In un'aia ci sono in tutto 60 bestie tra galline e maiali; in tutto ci sono 140 zampe. Quante sono le galline e quanti i maiali?

Sia x il numero delle galline e y il numero dei maiali. In tutto sono 60 bestie, pertanto x+y=60.
Le galline hanno due zampe e i maiali quattro, da cui segue che il numero totale di zampe è dato da 2x+4y=140.
Si hanno due equazioni e due incognite.

Si risolve il sistema: $\begin{cases} x+y=60 \\ 2x+4y=140 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=60-y] \\ 2(60-y)+4y=140 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=60-y] \\ 120-2y+4y=140 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=60-y] \\ 2y=140-120 \end{cases}$

$\begin{cases} [x=60-y] \\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}y=\frac{\cancel{20}}{\cancel{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} [x=60-y] \\ y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=60-10 \\ y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=50 \\ y=10 \end{cases}$

Nell'aia ci sono dunque 50 galline e 10 maiali.

Esempio B7.9:
La somma di due numeri interi è 29, la loro differenza è 13. Quali sono i due numeri?

Detti x e y i due numeri le due equazioni sono ovviamente x+y=29 e x-y=13.

$\begin{cases} x+y=29 \\ x-y=13 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=29-y] \\ (29-y)-y=13 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=29-y] \\ 29-2y=13 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=29-y] \\ -2y=13-29 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=29-y] \\ \frac{-2}{-2}y=\frac{-16}{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} [x=29-y] \\ y=8 \end{cases}$

$\begin{cases} x=29-8=21 \\ y=8 \end{cases}$

I due numeri interi sono pertanto 8 e 21.

Esempio B7.10:
Un ragazzo ha il doppio dell'età di suo fratello, e la differenza delle loro età è 10 anni.
Che età hanno i due fratelli?

Dette x e y le età dei due fratelli è abbastanza evidente che x=2y (quindi x è il maggiore).
La differenza è quindi x-y=10. Scrivere y-x=10 è errore perché se x è il maggiore l'espressione y-x darebbe risultato un numero negativo!

$\begin{cases} x=2y \\ x-y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=2y] \\ 2y-y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=2y] \\ y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\cdot 10=20 \\ y=10 \end{cases}$

Le età dei due fratelli sono quindi 10 e 20 anni.

Esempio B7.11:
In un garage ci sono 22 mezzi di trasporto tra motociclette e autovetture. In tutto ci sono 65 ruote. Quante sono le autovetture e quante le motociclette?

Sia x il numero delle auto e y il numero delle moto. Di sicuro x+y=22, questa è la prima equazione.
Poiché le auto hanno 4 ruote e le motociclette 2 (sidecar esclusi) la seconda equazione è 4x+2y=65.

$\begin{cases} x+y=22 \\ 4x+2y=65 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=22-y] \\ 4(22-y)+2y=65 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=22-y] \\ 88-4y+2y=65 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=22-y] \\ -2y=65-88 \end{cases}$ $\begin{cases} [x=22-y] \\ \frac{-2}{-2}y=\frac{-23}{-2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=22-\frac{23}{2}=\frac{44-23}{2}=\frac{21}{2} \\ y=\frac{23}{2} \end{cases}$

Le auto sono 21/2 e le moto sono 23/2?!
Poiché il numero delle auto e delle moto deve essere un numero intero il problema è impossibile.
Del resto ci si poteva accorgere dell'impossibilità del problema perché il numero delle ruote non poteva essere un numero DISPARI!

<u>Esempio B7.12:</u>
In un trapezio isoscele la base maggiore è il doppio della base minore, e l'altezza è un terzo della base maggiore. Sapendo che l'area è 36 m^2 trovare il perimetro del trapezio.

Si indichi con x la base maggiore, con y la minore e con z l'altezza.
Essendoci 3 incognite è necessario trovare 3 equazioni.
Le prime due sono x=2y e $z=\frac{1}{3}x$.

L'area del trapezio è pari alla somma delle basi per l'altezza diviso due, pertanto la terza equazione è $\frac{(x+y)\cdot z}{2}=36$

Nell'ultima equazione calcolare subito il denominatore comune semplifica i calcoli.

$$\begin{cases} x=2y \\ z=\frac{1}{3}x \\ \frac{(x+y)\cdot z}{2}=36 \end{cases} \quad \begin{cases} [x=2y] \\ z=\frac{1}{3}(2y) \\ \frac{(2y+y)\cdot z=72}{\cancel{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} [x=2y] \\ \left[z=\frac{2}{3}y\right] \\ (\cancel{3}y)\cdot\frac{2}{\cancel{3}}y=72 \end{cases} \quad \begin{cases} [x=2y] \\ \left[z=\frac{2}{3}y\right] \\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}y^2=\frac{\cancel{72}}{\cancel{2}}=36 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2\cdot 6=12 \\ z=\frac{2}{3}\cdot 6=4 \\ y=6 \end{cases}$$

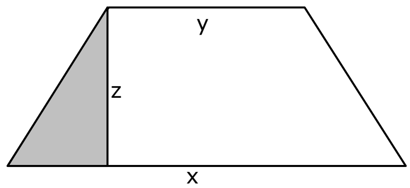

Figura B7.2 Trapezio.

La base maggiore è 12 m, la base minore è 6 m e l'altezza è 4 m.
Per trovare il perimetro abbiamo bisogno di trovare il lato obliquo.
Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo evidenziato che ha i due cateti di lunghezza 4 (l'altezza) e 3.
[(12-6):2, ossia la differenza delle basi diviso due]
Lato obliquo^2 = 4^2+3^2
Lato obliquo^2 =16+9 = 25
Lato obliquo = 5
Il perimetro è quindi la somma dei lati. Perimetro = 12+6+5+5 = 28 metri.

<u>Esempio B7.13:</u>
Trovare due numeri sapendo che la metà del primo addizionata al doppio del secondo è uguale a 54 e la differenza tra il secondo e il primo è 17.

Si indichino i due numeri con x e y, x il minore e y il maggiore. Si avrà quindi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+2y=54 \\ y-x=17 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+4y=108}{\cancel{2}} \\ [y=17+x] \end{cases} \quad \begin{cases} x+4(17+x)=108 \\ [y=17+x] \end{cases} \quad \begin{cases} x+68+4x=108 \\ [y=17+x] \end{cases} \quad \begin{cases} 5x=108-68 \\ [y=17+x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{40}{5} \\ [y=17+x] \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=17+8=25 \end{cases}$$

I due numeri sono 8 e 25.

<u>Esempio B7.14:</u>
Nella figura a lato AH è i 5/12 di BH e la somma di questi due segmenti è 34. Trovare il perimetro della figura.

Siano x il segmento AH e y il segmento BH.

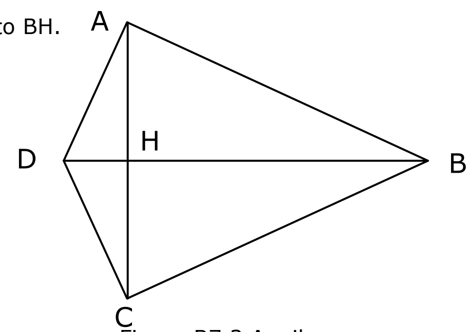

Figura B7.3 Aquilone.

$\begin{cases} x=\frac{5}{12}y \\ x+y=34 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{5}{12}y \\ \frac{5}{12}y+y=34 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{5}{12}y \\ \frac{5y+12y=408}{\cancel{12}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{5}{12}y \\ 17y=408 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{5}{12}y \\ \frac{\cancel{17}y}{\cancel{17}}=\frac{408}{\cancel{17}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{5}{12}y \\ y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{5}{\cancel{12}}\cdot\cancel{24} \\ y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=10 \\ y=24 \end{cases}$

I due segmenti sono AH=10 e BH=24.
Con il teorema di Pitagora si trova AB.

$AB=\sqrt{10^2+24^2}=\sqrt{100+576}=\sqrt{676}=26$

Con il secondo teorema di Euclide si trova DH ($AH^2=DH\cdot BH$ da cui $DH=AH^2/BH$).
$DH=10^2/24=100/24=25/6$.
Con il teorema di Pitagora relativo al triangolo AHD si trova AD.

$AD=\sqrt{10^2+\left(\frac{25}{6}\right)^2}=\sqrt{100+\left(\frac{625}{36}\right)}=\sqrt{\frac{3600+625}{36}}=\sqrt{\frac{4225}{36}}=\frac{65}{6}$

Il perimetro è quindi 2AD+2AB.

$Perimetro=2\cdot\frac{65}{6}+2\cdot 26=\frac{65}{3}+52=\frac{65+156}{3}=\frac{221}{3}$.