B6. Sistemi di primo grado

Nelle equazioni l'obiettivo è determinare il valore dell'incognita che verifica l'equazione. Tale valore, se c'è, è detto soluzione.
In un sistema di equazioni l'obiettivo è trovare i valori delle incognite che verifichino tutte le equazioni.
Di solito, se ci sono due incognite, le lettere utilizzate sono x e y.
Si vogliono trovare i valori delle x e delle y che verifichino tutte le equazioni.
Il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono; pertanto un sistema di primo grado è un sistema in cui tutte le incognite hanno esponente uno.
Un sistema avrà come numero massimo di soluzioni possibili il grado del sistema stesso.

B6.1 Metodo di sostituzione

PROCEDIMENTO

- Si trova una lettera da una delle due equazioni
- Si sostituisce nell'altra equazione
- Si trova l'altra lettera dall'altra equazione
- Si sostituisce nella prima equazione

Esempio B6.1:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 3x-2y+13=0 \end{cases}$$

La scelta della lettera di cui determinare il valore è importante perché se si sceglie una lettera 'scomoda' i calcoli si allungano.
In questo caso la scelta migliore è determinare la y dalla prima equazione (perché il coefficiente della lettera y nella prima equazione è uno).

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ 3x-2(-2x+3)+13=0 \end{cases}$$

Si lascia la y da sola a primo membro e si sostituisce ciò che si è trovato nella seconda equazione.
Ora si cerca x dalla seconda equazione.

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ 3x+4x-6+13=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x+3 \\ 7x+7=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x+3 \\ 7x=-7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x+3 \\ x=-\frac{7}{7}=-1 \end{cases}$$

Avendo trovato x=-1 si sostituisce tale valore nella equazione di partenza.

$$\begin{cases} y=-2(-1)+3 \\ x=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=+2+3 \\ x=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=+5 \\ x=-1 \end{cases}$$

Il risultato del sistema è quindi (-1,+5).
[si scrive così: prima la x e poi la y, separati da virgola o punto e virgola, tra parentesi tonde]

Esempio B6.2:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-2y-2=0 \end{cases}$$

La y nella prima equazione è già stata isolata a primo membro, basta sostituire il suo valore nella seconda.

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-2(2x-1)-2=0 \end{cases}$$

Si trova x dalla seconda equazione e si svolgono i calcoli.

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ 4x-4x+2-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x-1 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \text{INDETERMINATA}$$

Esempio B6.3:

$$\begin{cases} 5x-2y+3=0 \\ \frac{15}{2}x-3y-4=0 \end{cases}$$

Nessuna lettera è particolarmente facile da trovare.
Si trova x dalla prima equazione e si calcola il denominatore comune nella seconda.

$$\begin{cases} 5x=2y-3 \\ \frac{15x-6y-8}{2}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{2y-3}{5} \\ \cancel{15}\left(\frac{2y-3}{\cancel{5}}\right)-6y+8=0 \end{cases}$$

Si è trovata x nella prima equazione e si è sostituito il suo valore nella seconda.

$$\begin{cases} x=\frac{2y-3}{5} \\ 3(2y-3)-6y+8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{2y-3}{5} \\ 6y-9-6y+8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{2y-3}{5} \\ -1=0 \end{cases} \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

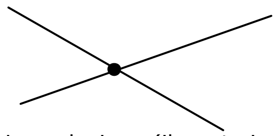
I SISTEMI DI PRIMO GRADO POSSONO QUINDI:

- Avere una soluzione.
- Essere indeterminati; in questo caso esistono infinite coppie di numeri che soddisfino le equazioni. Attenzione: ciò non significa che ogni coppia di numeri è soluzione!
- Essere impossibili; in questo caso non esiste alcuna coppia di numeri che soddisfi le equazioni.

B6.2 Risoluzione grafica (intersezione di rette)

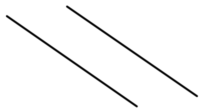
Ogni equazione di primo grado a due incognite (ad es. 2x+y-3=0) è una retta sul piano cartesiano.
E' possibile quindi disegnare tali equazioni nel piano. La soluzione del sistema altro non è che l'intersezione delle due rette, ossia il punto che le due rette hanno in comune.
Ci sono tre casi:

RETTE SECANTI



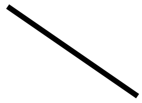
Una soluzione (il punto in comune)

RETTE PARALLELE



Impossibile

RETTE COINCIDENTI



Indeterminato (infiniti punti in comune)

Disegnando le rette e trovandone dal grafico il punto di intersezione è quindi possibile ricavare il risultato del sistema senza svolgere calcoli.

DISEGNO DI RETTE – PRIMO METODO

RETTE ORIZZONTALI

Le equazioni del tipo y=k rappresentano rette orizzontali.

Esempio B6.1: ecco la rappresentazione delle rette y=2; y=0 (asse x); $y=-\frac{3}{2}$; y=-4.

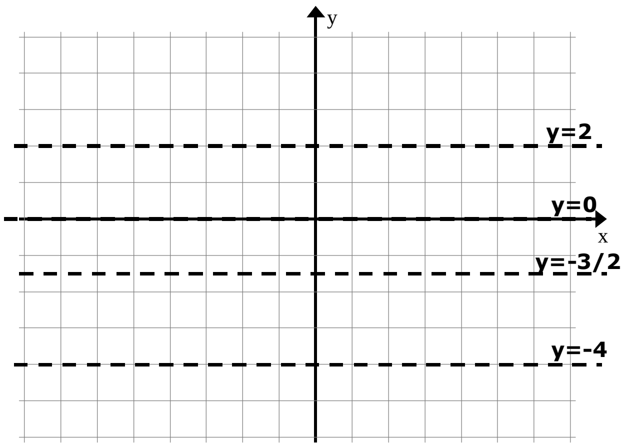


Figura B6.1 - Rette orizzontali

RETTE VERTICALI

Le equazioni del tipo x=k rappresentano rette verticali.

Esempio B6.2: ecco la rappresentazione delle rette x=2; x=0 (asse y); $x=-\frac{3}{2}$; x=-4.

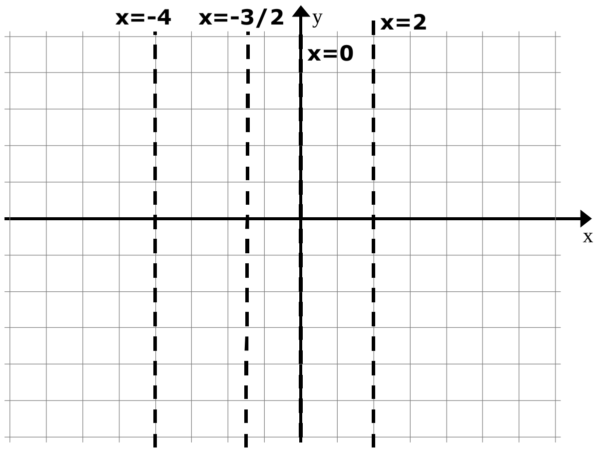


Figura B6.2 – Rette verticali

RETTE OBLIQUE

Le rette oblique sono rappresentate da equazioni della forma y=mx+q.

- q è l'intersezione della retta con l'asse y.

- Se m è positivo la retta sale.
- Se m è negativo la retta scende.

- m è una frazione: $\dfrac{\text{di quanto si va in su o in giù}}{\text{di quanto ci si sposta verso dx}}$

Esempio B6.3: $y=-\frac{1}{2}x+1$

Si parte da +1 sull'asse y perché q=1.
Si scende (m negativo) di 1 e ci si sposta verso dx di 2.

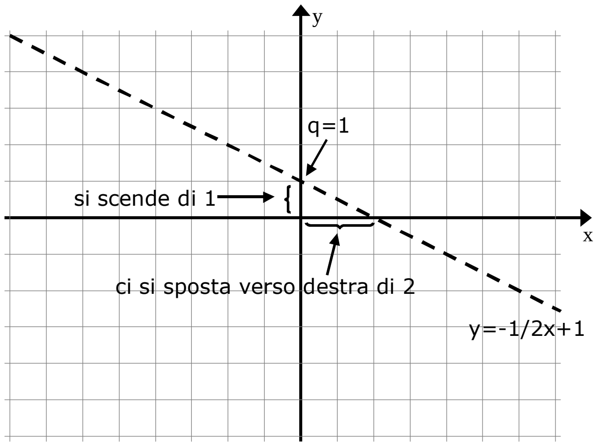


Figura B6.3 – Retta obliqua $y=-\frac{1}{2}x+1$

Esempio B6.4: y=3x-2

Si parte da –2 perché q=-2.
Si sale (m positivo) di 3 e ci si sposta di 1 (m è 3/1).

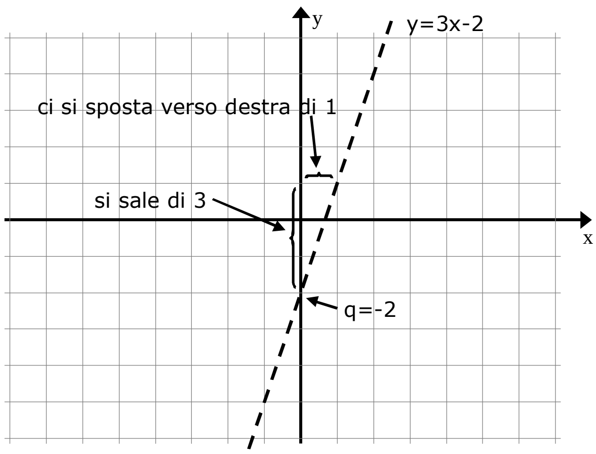


Figura B6.4 – Retta obliqua y=3x-2

<u>DISEGNO DI RETTE</u> – SECONDO METODO

Si danno due valori qualunque alla x e si determinano due valori delle y.
Si trovano così due punti. Si uniscono e si disegna la retta.

Esempio B6.5: Tracciare sugli assi cartesiani la retta $y=-\frac{1}{2}x+1$ (la stessa dell'esempio B6.3).

x	y
0	(-1/2)·0+1=1 si è trovato il punto (0;1)
2	(-1/2)·2+1=-1+1=0 si è trovato il punto (2;0)

Si tracciano questi due punti sul piano cartesiano e si disegna la retta passante per i due punti.

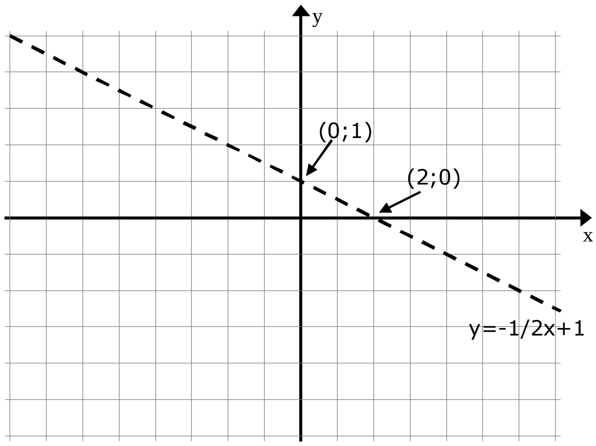


Figura B6.5 – Retta obliqua $y=-\frac{1}{2}x+1$

Esempio B6.6: Tracciare sugli assi cartesiani la retta y=3x-2 (la stessa dell'esempio B6.4).

x	y	
1	3·1-2=1	si è trovato il punto (1;1)
2	3·2-2=4	si è trovato il punto (2;4)

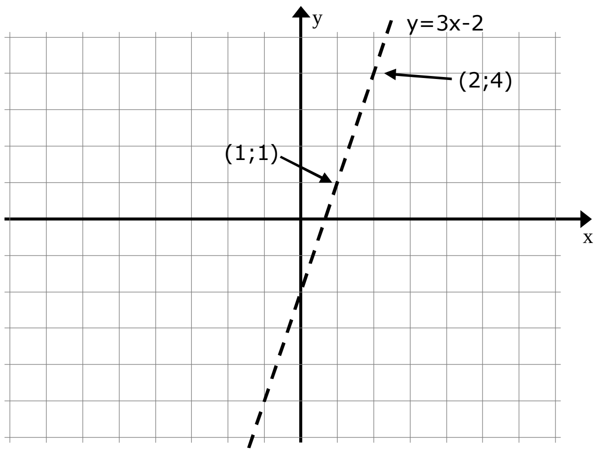


Figura B6.6 – Retta obliqua y=3x-2

Si tracciano questi due punti sul piano cartesiano e si disegna la retta passante per i due punti.

Le rette disegnate con i due metodi sono le stesse e ovviamente anche i grafici risultano identici.

N.B. Se la retta non è data in forma esplicita (y=mx+q) si deve portare la y a primo membro e tutto il resto a secondo membro PRIMA di disegnarla! Ciò è detto "scrivere la retta in forma esplicita".

RISOLUZIONE GRAFICA DI SISTEMI

Esempio B6.7: Determinare graficamente la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 3x-2y+13=0 \end{cases}$$

(sono le stesse rette dell'esempio B6.1, in quel caso si era risolto il sistema per via algebrica)

Per prima cosa si portano le rette in forma esplicita, lasciando solo la y a primo membro e portando tutto il resto a secondo membro.

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ -2y=-3x-13 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x+3 \\ \frac{-2}{-2}y=\frac{-3}{-2}x-\frac{13}{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x+3 \\ y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2} \end{cases}$$

Ora si disegnano le due rette nello stesso grafico.

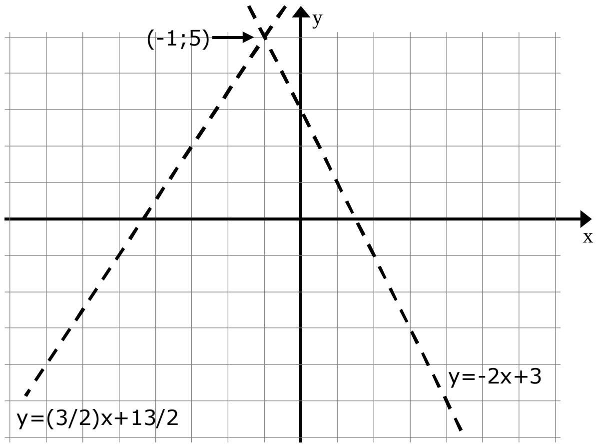


Figura B6.7 – Risoluzione grafica di un sistema di equazioni di primo grado.

Le due rette si incontrano nel punto (-1;5), che è quindi la soluzione del sistema.
Essendo le stesse rette dell'esempio B6.1 anche la soluzione è la stessa.

Esempio B6.8: Determinare graficamente la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} -2x+3y=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

Per prima cosa si portano le rette in forma esplicita.

$$\begin{cases} 3y=2x \\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{3}y=\frac{2}{3}x \\ y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ y=-2 \end{cases}$$

Ora si disegnano le due rette nello stesso grafico

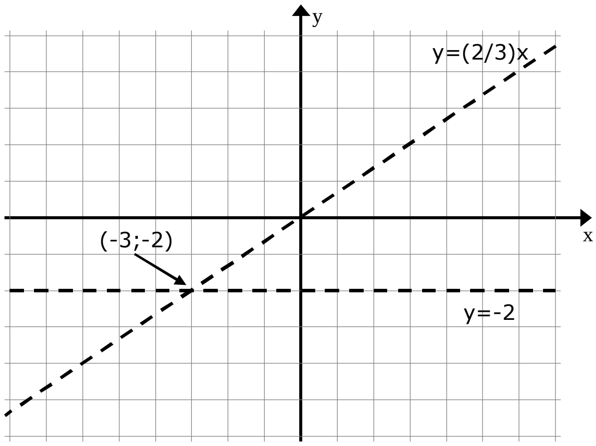


Figura B6.8 – Risoluzione grafica di un sistema di equazioni di primo grado.

Le due rette si incontrano nel punto (-3;-2), che è quindi la soluzione del sistema.
Risolvendo il sistema con i calcoli si sarebbe trovata la stessa soluzione.

B6.3 Sistemi a più variabili

Per risolvere un sistema a 3 variabili (per esempio x, y, z) <u>ci devono essere 3 equazioni.</u>
L'obiettivo è trovare il valore di delle tre variabili che verifichino tutte e 3 le equazioni.

PROCEDIMENTO

- Si trova il valore di una lettera da una delle tre equazioni.
- Si sostituisce nelle altre due equazioni.
  Non considerando la prima equazione utilizzata si può immaginare il sistema non più a tre variabili e tre equazioni ma a due variabili e due equazioni perciò:
- Si risolve il sistema a due variabili come visto precedentemente.
- Si sostituiscono questi valori nell'equazione utilizzata all'inizio.

In questo caso il risultato avrà la forma (x, y, z).
E' necessario scrivere i valori trovati nell'ordine corretto all'interno delle parentesi tonde.

Esempio B6.9:

$$\begin{cases} x-2y=2z-1 \\ x-y+z=6 \\ z-x+y=0 \end{cases}$$

In questo caso è abbastanza ininfluente la scelta della lettera più comoda: va bene determinare x dalla prima, x, y oppure z dalla seconda o dalla terza equazione.
Per esempio si trova z dalla terza equazione e si sostituisce il suo valore (TRA PARENTESI) nelle altre due equazioni.

$$\begin{cases} x-2y=2z-1 \\ x-y+z=6 \\ [z=x-y] \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=2(x-y)-1 \\ x-y+(x-y)=6 \\ \quad " \end{cases}$$

Si noti che se l'equazione z=x-y la si mette tra quadre si evita di ricopiarla innumerevoli volte.
Ora si risolve il sistema con le prime due equazioni con incognite x e y.

$$\begin{cases} x-2y=2x-2y-1 \\ x-y+x-y=6 \\ \quad " \end{cases} \quad \begin{cases} x-2x-2y+2y=-1 \\ 2x-2y=6 \\ \quad " \end{cases} \quad \begin{cases} -x=-1 \\ 2x-2y=6 \\ \quad " \end{cases} \quad \begin{cases} [x=1] \\ 2x-2y=6 \\ \quad " \end{cases} \quad \begin{cases} [x=1] \\ 2(1)-2y=6 \\ \quad " \end{cases} \quad \begin{cases} [x=1] \\ -2y=6-2 \\ \quad " \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x=1] \\ \dfrac{-2y}{-2}=\dfrac{4}{-2} \\ \quad " \end{cases} \qquad \begin{cases} [x=1] \\ [y=-2] \\ \quad " \end{cases}$$

Infine si sostituiscono i due valori di x e y nella prima equazione utilizzata.

$$\begin{cases} [x=1] \\ [y=-2] \\ z=(1)-(-2)=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

La soluzione è quindi (1, -2, 3). **(x, y, z) IN ORDINE**

Così come le equazioni di primo grado in due incognite rappresentano delle rette nel piano, le equazioni di primo grado in tre incognite rappresentano piani nello spazio.
Tre piani, se non sono paralleli o perpendicolari, si incontrano in un punto nello spazio, che è la soluzione del sistema.
Non è richiesta la soluzione grafica disegnando i piani nello spazio!