B5. Equazioni di primo grado

Risolvere una equazione significa trovare il valore da mettere al posto dell'incognita (di solito si utilizza la lettera x) in modo che l'uguaglianza risulti verificata.
Ciò che si trova a sinistra dell'uguale è detto **primo membro**, ciò che si trova a destra è detto **secondo membro**.

Per esempio in $\overbrace{x+3}^{1°\text{membro}} = \overbrace{8}^{2°\text{ membro}}$ la soluzione dell'equazione è x=5.
Infatti mettendo 5 al posto della x si ha 5+3=8 che è una uguaglianza valida.
Se si fosse messo al posto della x il valore 6 si sarebbe ottenuta l'uguaglianza 6+3=8 che non è vera, quindi 6 non è una soluzione per l'equazione x+3=8.

B5.1 Intere

Le equazioni intere sono quelle in cui **l'incognita** (ossia la lettera di cui si deve determinare il valore) si trova solo al numeratore.

PROCEDIMENTO

- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a 1° membro e quelli senza la x a secondo membro.
  I termini che si spostano da un membro all'altro devono essere cambiati di segno, quelli che non si spostano restano con lo stesso segno.
- Si sommano i termini simili.
- Se la x va via ci sono due casi possibili:
  0=0 l'equazione è indeterminata (tutti i valori possibili della x sono soluzioni).
  0=altro numero l'equazione è impossibile (nessun valore della x è soluzione).
- Si dividono ambo i membri per il numero davanti alla x.

Esempio B5.1: $(x-2)^2-(x+3)(x-2)=5(x-3)$

$(x-2)^2-(x+3)(x-2)=5(x-3)$
$x^2+4-4x-(x^2-2x+3x-6)=5x-15$

- Si svolgono i calcoli.

$x^2+4-4x-x^2+2x-3x+6=5x-15$

- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.

$-4x+2x-3x-5x=-4-6-15$
$-10x=-25$

- Si sommano i termini simili.

$\frac{\cancel{-10}x}{\cancel{-10}}=\frac{\cancel{-25}}{\cancel{-10}}$

- Si divide per il numero davanti alla x.

$\boxed{x=\frac{5}{2}}$

Verifica:

$\left(\frac{5}{2}-2\right)^2-\left(\frac{5}{2}+3\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)=5\left(\frac{5}{2}-3\right) \longrightarrow \left(\frac{5-4}{2}\right)^2-\left(\frac{5+6}{2}\right)\left(\frac{5-4}{2}\right)=5\left(\frac{5-6}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=5\left(\frac{-1}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}-\frac{11}{4}=\frac{-5}{2}$

$\frac{1-11}{4}=-\frac{5}{2} \longrightarrow \frac{\cancel{-10}}{\cancel{4}}=-\frac{5}{2} \longrightarrow -\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}$

Si sostituisce il valore trovato x=5/2 al posto della x. Se il primo membro viene uguale al secondo membro allora viene la verifica.

Esempio B5.2: $\frac{x+2}{3}+\frac{6-x}{4}=\frac{3x+13}{6}$

$\frac{x+2}{3}+\frac{6-x}{4}=\frac{3x+13}{6}$
$\frac{4(x+2)+3(6-x)=2(3x+13)}{\cancel{12}}$

- Se ci sono denominatori si effettua subito il DENOMINATORE COMUNE e quindi si TOGLIE IL DENOMINATORE.

$4x+8+18-3x=6x+26$

- Si svolgono i calcoli.

$4x-3x-6x=-8-18+26$

- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.

$-5x=0$

- Si sommano i termini simili.

$\frac{-5x}{-5}=\frac{0}{-5}$

- Si divide per il numero davanti alla x.

$\boxed{x=0}$

Verifica:

$\frac{0+2}{3}+\frac{6-0}{4}=\frac{3\cdot 0+13}{6} \longrightarrow \frac{2}{3}+\frac{6}{4}=\frac{13}{6}$

$\frac{4\cdot 2+3\cdot 6=2\cdot 13}{12} \longrightarrow \frac{8+18=26}{12}$ OK

Si sostituisce il valore trovato x=0 al posto della x.

Esempio B5.3: $(2x+3)^2-(3x-2)^2=(5x+1)(5-x)$

$(2x+3)^2-(3x-2)^2=(5x+1)(5-x)$
$4x^2+9+12x-(9x^2+4-12x)=25x-5x^2+5-x$
$4x^2+9+12x-9x^2-4+12x=25x-5x^2+5-x$
$4x^2+12x-9x^2+12x-25x+5x^2+x=-9+4+5$
$0=0$

- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.

Quindi l'equazione è $\boxed{\text{INDETERMINATA}}$. Ciò significa che tutti i numeri sono soluzioni. Provare per credere. Basta prendere un qualunque numero e sostituirlo al posto della x e verificare che è soluzione.

Esempio B5.4: $3(2-x)(2+x)+(x+5)(3x+2)=8(x+3)+9x$

$3(2-x)(2+x)+(x+5)(3x+2)=8(x+3)+9x$
$3(4-x^2)+3x^2+2x+15x+10=8x+24+9x$
$12-3x^2+3x^2+2x+15x+10=8x+24+9x$
$-3x^2+3x^2+2x+15x-8x-9x=-12-10+24$
$0=2$

- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.

Quindi l'equazione è $\boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$. Ciò significa che non ci sono soluzioni. Non c'è dunque alcun numero che, sostituito al posto della x, verifichi l'equazione.

F.2 Fratte

Le equazioni fratte sono quelle in cui al denominatore è presente l'incognita.

Osservazione: si rammenta che 6:2=3. Infatti si può fare la verifica 2·3=6.
Anche 10:5=2. Infatti si può fare la verifica 5·2=10.
E dunque quanto viene 5:0? Serve trovare un numero per cui venga la verifica. Si cerca il numero che moltiplicato per zero dia risultato 5. Non c'è alcun numero che moltiplicato per 0 dà risultato 5! Quindi E' VIETATO DIVIDERE PER ZERO.

La scrittura $\frac{5}{0}$ non ha pertanto alcun senso.

Bisogna quindi escludere dalle possibili soluzioni tutti i valori che annullano il denominatore.

PROCEDIMENTO
- Si scompongono in fattori i denominatori.
- Si effettua il denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il campo di esistenza, indicato con C.E.
  Per calcolare il C.E. bisogna indicare con x≠… quali sono i valori della x che annullano il denominatore. Per fare ciò si pone il denominatore diverso da zero.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
  I termini che si spostano devono essere cambiati di segno,
  quelli che non si spostano restano con lo stesso segno.
- Si sommano i termini simili.
- Se la x va via ci sono due casi possibili:
  0=0 l'equazione è indeterminata (tutti i valori possibili della x sono soluzioni).
  0=altro numero l'equazione è impossibile (nessun valore della x è soluzione).
- Si dividono ambo i membri per il numero davanti alla x.
- Si verifica che la soluzione non sia una di quelle escluse con il campo di esistenza.
  Se la soluzione è una di quelle escluse l'equazione è impossibile.

Esempio B5.5: $\frac{x+2}{2x+1}=\frac{x-2}{2x-1}-\frac{2x-8}{4x^2-1}$

C.E.

$2x+1\neq 0 \quad 2x\neq -1 \quad \frac{2x}{2}\neq\frac{-1}{2} \quad x\neq -\frac{1}{2}$

$2x-1\neq 0 \quad 2x\neq 1 \quad \frac{2x}{2}\neq\frac{1}{2} \quad x\neq +\frac{1}{2}$

$$\frac{x+2}{2x+1}=\frac{x-2}{2x-1}-\frac{2x-8}{4x^2-1}$$
$$\frac{x+2}{2x+1}=\frac{x-2}{2x-1}-\frac{2x-8}{(2x+1)(2x-1)}$$
$$\frac{(x+2)(2x-1)=(x-2)(2x+1)-1\cdot(2x-8)}{\cancel{(2x+1)(2x-1)}}$$
$$2x^2-x+4x-2=2x^2+x-4x-2-2x+8$$
$$2x^2-x+4x-2x^2-x+4x+2x=2-2+8$$
$$8x=8$$
$$\frac{8x}{8}=\frac{8}{8}$$
$x=1$ ACCETTABILE

- Si scompongono i denominatori.
- Denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il C.E.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si dividono ambo i membri per il numero davanti alla x.
- La soluzione x=1 non è una di quelle escluse dal C.E. quindi è accettabile.

Esempio B5.6: $\frac{3x^2-2}{x^2-x-6}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{2x-1}{3-x}=0$

C.E.

$x-3\neq 0 \quad x\neq 3$

$x+2\neq 0 \quad x\neq -2$

$$\frac{3x^2+2}{x^2-x-6}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{2x-1}{3-x}=0$$
$$\frac{3x^2+2}{(x-3)(x+2)}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{2x-1}{3-x}=0$$
$$\frac{1\cdot(3x^2+2)-(x-3)(x-2)-(x+2)(2x-1)}{\cancel{(x-3)(x+2)}}=0$$
$$3x^2+2-(x^2-2x-3x+6)-(2x^2-x+4x-2)=0$$
$$3x^2+2-x^2+2x+3x-6-2x^2+x-4x+2=0$$
$$3x^2-x^2+2x+3x-2x^2+x-4x=-2+6+2$$
$$2x=6$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2}$$
$x=3$ IMPOSSIBILE

- Si scompongono i denominatori.
- Denominatore comune.
- Si leva il denominatore e si calcola il C.E.
- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si dividono ambo i membri per il numero davanti alla x.

La soluzione x=3 è una di quelle escluse dal C.E. quindi non è accettabile.
L'EQUAZIONE E' IMPOSSIBILE.

F.3 Letterali

Le equazioni letterali sono quelle in cui compaiono altre lettere oltre all'incognita.
Il procedimento è lo stesso che per le equazioni intere e fratte.
Ci sono soltanto un paio di differenze:

- Quando si sono portate le x da una parte e il resto dall'altra si deve raccogliere la x prima di dividere per ciò che è davanti alla x.
- Nel risultato spesso ci sono delle lettere al denominatore. In questi casi bisogna discutere la soluzione. Si vedrà come effettuare la discussione negli esempi che seguono.

Esempio B5.7: $a(x-5)+2x(a+3)=2(1-2a)$

$$a(x-5)+2x(a+3)=2(1-2a)$$
$$ax-5a+2ax+6x=2-4a$$
$$ax+2ax+6x=5a+2-4a$$
$$3ax+6x=a+2$$
$$3x(a+2)=a+2$$
$$\frac{\cancel{3}x\cancel{(a+2)}}{\cancel{3}\cancel{(a+2)}}=\frac{\cancel{a+2}}{3\cancel{(a+2)}}$$
$$x=\frac{1}{3}$$

discussione

Se $a\neq -2$ $x=\frac{1}{3}$

Se a=-2 indeterminata

- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si raccoglie a primo membro 3x.
- Si dividono ambo i membri per 3(a+2).

<u>DISCUSSIONE</u>

Se a=−2 tale valore non si può mettere al denominatore perché non si può dividere per zero.
In tal caso si sostituisce tale valore nell'equazione prima di effettuare la divisione per 3(a+2):

3x(-2+2)=-2+2

0=0 indeterminata

Se a è diverso da −2 allora la soluzione è quella che si è trovata, ossia x=1/3.

Esempio B5.8: $(a-3)x+b(2-x)=-3x$

$$(a-3)x+b(2-x)=-3x$$
$$ax-3x+2b-bx=-3x$$
$$ax-3x-bx+3x=-2b$$
$$ax-bx=-2b$$
$$x(a-b)=-2b$$
$$\frac{x(a-b)}{a-b}=\frac{-2b}{a-b}$$
$$x=\frac{-2b}{a-b}$$

Se $a \neq b$ allora $x=\frac{-2b}{a-b}$

Se $a=b\neq 0$ allora è impossibile

Se $a=b=0$ allora è indeterminata

- Si svolgono i calcoli.
- Si spostano i termini con la x a primo membro e quelli senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.
- Si raccoglie a primo membro x.
- Si dividono ambo i membri per (a-b).

DISCUSSIONE

Se a=b non si può mettere al denominatore (a-b) perché non si può dividere per zero.

Se a=b si sostituisce nell'equazione prima della divisione per (a-b):

x(b-b)=-2b

0=-2b

Se b=0 è indeterminata (0=0)

altrimenti è impossibile (0=numero div. da 0)

Se a è diverso da b allora la soluzione è quella che si è trovata precedentemente.

F.4 Disequazioni di primo grado

Le disequazioni di primo grado (o lineari), si risolvono in maniera analoga alle equazioni di primo grado. Il fatto che al posto dell'uguale ci sia uno dei seguenti simboli: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ non influisce "quasi" per niente nel procedimento. Le disequazioni fratte, ossia contenenti l'incognita al denominatore, saranno trattate in altro capitolo.

PROCEDIMENTO:

Si svolgono i calcoli

- Si portano i termini con la x a primo membro e i termini senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.
- **Se davanti alla x c'è un numero negativo si cambiano i segni e si gira il verso.**
- Si dividono ambo i membri per il numero davanti alla x.

QUESTA E' L'UNICA DIFFERENZA DALLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO.

E' un procedimento talmente simile a quello per risolvere le equazioni di primo grado che ci si dimentica troppo spesso questa unica piccola differenza; quindi attenzione!!

Esempio B5.9:

$$(2x-1)^2<(2x+3)(2x-3)$$
$$4x^2+1-4x<4x^2-9$$
$$4x^2-4x^2-4x<-1-9$$
$$-4x<-10$$
$$4x>10$$
$$x>\frac{10}{4}\Rightarrow x>\frac{5}{2}$$

Esempio B5.10:

$$\frac{x-3}{2}+\frac{1-2x}{4}-1\leq\frac{x}{6}$$
$$\frac{6(x-3)+3(1-2x)-1(12)}{12}\leq\frac{2x}{12}$$
$$6x-18+3-6x-12\leq 2x$$
$$6x-6x-2x\leq 18-3+12$$
$$-2x\leq 27$$
$$2x\geq -27$$
$$x\geq\frac{-27}{2}$$

SE IL DENOMINATORE FOSSE STATO NEGATIVO PER LEVARLO SI SAREBBE DOVUTO GIRARE IL VERSO.

SE AL DENOMINATORE CI FOSSE STATA LA x NON LO SI SAREBBE POTUTO TOGLIERE!!!

CASO PARTICOLARE: Il termine con la x scompare.

Resta da trattare il caso in cui sommando i termini simili la x va via e a primo membro resta zero. In questo caso a primo membro c'è lo zero ed a secondo membro un numero.

Si hanno due possibilità:

- La disequazione che ne risulta è vera (ad esempio $0<3$, $0\geq-3$ oppure $0\geq0$). In tal caso tutti i valori della x sono soluzioni. (Si scrive "$\forall x\in\Re$" o "sempre verificata").

- La disequazione che ne risulta è falsa (ad esempio $0 \leq -5$, $0>2$ oppure $0>0$). In tal caso nessun valore della x è soluzione. (Si dice che la disequazione è “impossibile” o “mai verificata”).