B4. Frazioni algebriche

Per svolgere gli esercizi sulle frazioni algebriche E' NECESSARIO saper scomporre in fattori i polinomi.
Chi pertanto non è in grado di scomporre in fattori i polinomi da questo punto in poi avrà molte difficoltà nello svolgimento degli esercizi e nella comprensione degli argomenti.
Si consiglia di aver appreso BENE i procedimenti del capitolo B3 prima di affrontare il presente capitolo.

B4.1 Semplificazione

PROCEDIMENTO

- Scomporre in fattori numeratore e denominatore.
- Semplificare i fattori.

Esempio B4.1: $\dfrac{4a^2-b^2}{6a^2+3ab} = \dfrac{(2a-b)\cancel{(2a+b)}}{3a\cancel{(2a+b)}} = \dfrac{(2a-b)}{3a}$

PRIMO: Scomporre numeratore (differenza di quadrati) e denominatore (raccoglimento totale).

SECONDO: Semplificare i fattori.

SI

UN ERRORE GRAVISSIMO E' QUELLO DI SEMPLIFICARE SENZA AVER SCOMPOSTO.

Esempio B4.1 SBAGLIATO: $\dfrac{4a^2-b^2}{6a^2+3ab} = \dfrac{\cancel{4}\cancel{a^2}-b^{\cancel{2}}}{\cancel{6}\cancel{a^2}+3a\cancel{b}} = \dfrac{2-b}{3+3a}$

Qui si è semplificato il 4 con il 6, a^2 con a^2 e b^2 con b.
E' UN ERRORE GRAVISSIMO

NO

Da questo si capisce che:

- PRIMA DI SEMPLIFICARE SI DEVE SCOMPORRE

Il secondo passaggio dice inoltre di semplificare i fattori.
Nell'esempio sbagliato svolto qui sopra si sono invece semplificati degli addendi.

- NON SI POSSONO SEMPLIFICARE GLI ADDENDI

Esempio B4.2: $\dfrac{a^2-4a+4}{a^2+3a-10} = \dfrac{(a-2)^{\cancel{2}}}{(a+5)\cancel{(a-2)}} = \dfrac{a-2}{a+5}$

PRIMO: Scomporre numeratore (quadrato di un binomio) e denominatore (trinomio di secondo grado).
SECONDO: Semplificare i fattori.

Esempio B4.3: Semplificare $\dfrac{2x^3+x^2-5x+2}{x^2+xy-x-y}$

Il NUMERATORE si scompone con la regola di Ruffini.

$p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2 = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$ VIENE ZERO pertanto il numero cercato è 1.

Si costruisce la tabella:

	2	1	-5	2
1		2	3	-2
	2	3	-2	0

Si scrive il risultato: $2x^3+x^2-5x+2 = (x-1)(2x^2+3x-2)$.

Si deve ancora scomporre $2x^2+3x-2$; si utilizza il trinomio di secondo grado (II metodo).

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(2)(-2)}}{2(2)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm5}{4}=$$

$$=\frac{-3+5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-3-5}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$2x^2+3x-2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=\cancel{2}\left(\frac{2x-1}{\cancel{2}}\right)(x+2)=(2x-1)(x+2)$$

Pertanto il numeratore si scompone: $2x^3+x^2-5x+2=(x-1)\left(2x^2+3x-2\right)=(x-1)(2x-1)(x+2)$

Il DENOMINATORE si scompone con il raccoglimento parziale:

$$x^2+xy-x-y=x(x+y)-(x+y)=(x+y)(x-1)$$

Adesso si può semplificare:

$$\frac{2x^3+x^2-5x+2}{x^2+xy-x-y}=\frac{\cancel{(x-1)}(2x-1)(x+2)}{(x+y)\cancel{(x-1)}}=\frac{(2x-1)(x+2)}{x+y}$$

B4.2 Prodotto

PROCEDIMENTO

- Scomporre in fattori numeratori e denominatori.
- Semplificare i fattori (anche in croce).

Il procedimento è quindi identico a quello della semplificazione a parte il fatto che si può semplificare anche in croce, in maniera analoga a quanto appreso alle scuole medie.

Esempio B4.4: $\frac{x^2-x}{5x^2-10x}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2-1}$

$$\frac{x^2-x}{5x^2-10x}\cdot\frac{x^2+2x-8}{x^2-1}=$$

$$=\frac{\cancel{x}\cancel{(x-1)}}{5\cancel{x}\cancel{(x-2)}}\cdot\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=$$

$$=\frac{x+4}{5(x+1)}$$

PRIMO: Scomporre i numeratori:

x^2-x	raccogliere la x
x^2+2x-8	trinomio I metodo

Scomporre i denominatori:

$5x^2-10x$	raccogliere 5x
x^2-1	diff. di quadrati

SECONDO: Semplificare i fattori

B4.3 Divisione

PROCEDIMENTO

- Invertire la seconda frazione e mettere il per.
- Scomporre in fattori numeratori e denominatori.
- Semplificare i fattori (anche in croce).

Esempio B4.5: $\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}:\frac{1-4x^2}{12x^2}$

$$\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}:\frac{1-4x^2}{12x^2}=$$

$$=\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}\cdot\frac{12x^2}{1-4x^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(2x-1)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{3x}\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{12}x\cancel{^2}}{\cancel{(1-2x)}(1+2x)}=$$

$$=-\frac{4x}{1+2x}$$

PRIMO: Invertire la seconda frazione e mettere il per

SECONDO: Scomporre i numeratori

$2x^2+x-1$	trinomio II metodo
$12x^2$	non si scompone

Scomporre i denominatori

$3x^2+3x$	raccogliere 3x
$1-4x^2$	diff. di quadrati

TERZO: Semplificare i fattori

Si noti che 1-2x e 2x-1 non sono uguali ma cambia il segno. Quando li si semplifica si deve quindi cambiare il segno davanti alla frazione. Ecco perché c'è il meno davanti al risultato.

B4.4 Potenza

PROCEDIMENTO

- Elevare a potenza sia il numeratore che il denominatore.

Esempio B4.6: $\left(\frac{4a-b-1}{3a-b}\right)^2$

$$\left(\frac{4a-b-1}{3a-b}\right)^2 =$$
$$= \frac{(4a-b-1)^2}{(3a-b)^2} =$$
$$= \frac{9a^2+b^2+1-8ab-8a+2b}{9a^2+b^2-6ab}$$

PRIMO: Distribuire l'esponente ambo i membri.

SECONDO: Svolgere i calcoli
$(4a-b-1)^2$ quadrato di un trinomio
$(3a-b)^2$ quadrato di un binomio

B4.5 Somma e sottrazione

PROCEDIMENTO

- Scomporre i denominatori.
- Denominatore comune.
- Svolgere i calcoli al numeratore.
- Scomporre il numeratore.
- Semplificare.

E' FONDAMENTALE ESEGUIRE QUESTI CINQUE PASSI IN ORDINE.
SE NON SI SEGUE L'ORDINE L'ESERCIZIO NON VIENE!

Esempio B4.7: $\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-2x}-\frac{2x+5}{x^2+x-6}$

$$\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-2x}-\frac{2x+5}{x^2+x-6} =$$
$$= \frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x(x-2)}-\frac{2x+5}{(x+3)(x-2)} =$$
$$= \frac{x(x+3)(1)+(x+3)\cdot 2x-(2x+5)\cdot x}{x(x+3)(x-2)} =$$
$$= \frac{x^2+3x+2x^2+6x-2x^2-5x}{x(x+3)(x-2)} =$$
$$= \frac{x^2+4x}{x(x+3)(x-2)} =$$
$$= \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}(x+3)(x-2)} =$$
$$= \frac{x+4}{(x+3)(x-2)}$$

PRIMO: Scomporre i denominatori:

x-2	non si scompone
x^2-2x	raccogliere x
x^2+x-6	trinomio di 2° grado I metodo

SECONDO: Denominatore comune.

TERZO: Svolgere i calcoli al numeratore.

QUARTO: Scomporre il numeratore:
x^2+4x raccogliere x

QUINTO: Semplificare.

Esempio B4.8: $\frac{a-b}{a}-\frac{3}{4}+\frac{13b-3a}{12a-4b}$

$$\frac{a-b}{a}-\frac{3}{4}+\frac{13b-3a}{12a-4b} =$$
$$= \frac{a-b}{a}-\frac{3}{4}+\frac{13b-3a}{4(3a-b)} =$$
$$= \frac{4(3a-b)(a-b)-3\cdot a(3a-b)+(13b-3a)\cdot a}{4a(3a-b)} =$$
$$= \frac{4(3a^2-3ab-ab+b^2)-3a(3a-b)+13ab-3a^2}{4a(3a-b)} =$$
$$= \frac{12a^2-12ab-4ab+4b^2-9a^2+3ab+13ab-3a^2}{4a(3a-b)} =$$
$$= \frac{\cancel{4}b^2}{\cancel{4}a(3a-b)} =$$
$$= \frac{b^2}{a(3a-b)}$$

PRIMO: Scomporre i denominatori:

a	non si scompone
4	non si scompone
12a-4b	si raccoglie il 4

SECONDO: Denominatore comune.

TERZO: Svolgere i calcoli al numeratore.

QUARTO: Scomporre il numeratore:
$4b^2$ non si scompone

QUINTO: Semplificare.

Esempio B4.9: $\frac{a+3}{a^2+a}-\frac{a-3}{a^2-a}+\frac{3-a}{1-a^2}$

$$\frac{a+3}{a^2+a}-\frac{a-3}{a^2-a}+\frac{3-a}{1-a^2}=$$

$$=\frac{a+3}{a(a+1)}-\frac{a-3}{a(a-1)}+\frac{3-a}{(1+a)(1-a)}=$$

$$=\frac{(a-1)(a+3)-(a+1)(a-3)-a(3-a)}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+3a-a-3-\left(a^2-3a+a-3\right)-3a+a^2}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+3a-a-3-a^2+3a-a+3-3a+a^2}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+a}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{\cancel{a}\cancel{(a+1)}}{\cancel{a}\cancel{(a+1)}(a-1)}=\frac{1}{a-1}$$

PRIMO: Scomporre i denominatori:

a^2+a	raccogliere a
a^2-a	raccogliere a
$1-a^2$	diff. di quadrati

SECONDO: Denominatore comune.
Poiché a-1 e 1-a hanno segno diverso si deve cambiare il segno all'ultima frazione

TERZO: Svolgere i calcoli al numeratore.

QUARTO: Scomporre il numeratore:
a^2+a raccoglimento totale

QUINTO: Semplificare.

Esempio B4.10: $\frac{x}{ax-a^2}-\frac{a+x}{x^2-2ax+a^2}+\frac{1}{a}$

$$\frac{x}{ax-a^2}-\frac{a+x}{x^2-2ax+a^2}+\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{x}{a(x-a)}-\frac{a+x}{(x-a)^2}+\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{x\cdot(x-a)-a\cdot(a+x)+(x-a)^2}{a(x-a)^2}=$$

$$=\frac{x^2-ax-a^2-ax+x^2-2ax+a^2}{a(x-a)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-4ax}{a(x-a)^2}=$$

$$=\frac{2x(x-2a)}{a(x-a)^2}$$

PRIMO: Scomporre i denominatori:

$ax-a^2$	raccogliere a
$x^2-2ax+a^2$	quadrato di un binomio
a	non si scompone

SECONDO: Denominatore comune:
Tra (x-a) e $(x-a)^2$ si mette a denominatore comune il termine di grado più alto ossia $(x-a)^2$

TERZO: Svolgere i calcoli al numeratore.

QUARTO: Scomporre il numeratore:
a^2+2a-3 trinomio 2° grado I metodo

QUINTO: Semplificare – non si semplifica nulla perché numeratore e denominatore non hanno fattori in comune.