B3. Scomposizione di polinomi

Quando si calcola una espressione contenente solo prodotti di polinomi si ottiene un polinomio, che è il risultato dell'espressione. La scomposizione in fattori di polinomi è il passaggio inverso: si parte da un polinomio e lo si vuole esprimere come prodotto di polinomi.
E' detta scomposizione in fattori perché al termine dell'esercizio ci saranno soltanto prodotti (o potenze).
Se al termine dell'esercizio sono presenti ancora addizioni o sottrazioni tra una parentesi e l'altra l'esercizio non è terminato oppure è stato svolto in maniera non corretta!

Per scomporre in fattori un polinomio è possibile utilizzare i seguenti 4 metodi:
- raccoglimento totale o parziale
- prodotti notevoli
- trinomio di secondo grado
- regola di Ruffini

B3.1 Raccoglimento totale e parziale

RACCOGLIMENTO TOTALE

Quando TUTTI i termini del polinomio hanno qualcosa in comune andrà scritto ciò che è in comune; ciò che tutti i monomi hanno in comune è il MCD dei monomi. Accanto a ciò che si è raccolto vanno aperte le parentesi.
Dentro le parentesi va messo ciò che resta di ogni monomio "levando" ciò che si è scritto davanti alla parentesi.
In realtà l'operazione che si effettua è la divisione: ogni monomio del polinomio di partenza viene diviso per il termine che abbiamo raccolto e il risultato di ogni divisione va messo tra parentesi.

Esempio B3.1: $AX + AY + A = A(X + Y + 1)$

A è presente in tutti e tre i termini del trinomio e pertanto lo si raccoglie. Dentro la parentesi va ciò che resta di ogni termine del trinomio "levando" la A. In realtà ciò che si effettua è la divisione: AX:A=X, AY:A=Y, A:A=1. I tre termini dentro le parentesi saranno dunque X, Y e Z.
Se si raccoglie un monomio per intero allora dentro le parentesi si metterà 1. Infatti nell'esempio appena visto A:A=1.
Si noti che si può fare agevolmente la verifica moltiplicando il termine che è stato raccolto per ogni termine dentro le parentesi e controllando che il risultato sia il testo dell'esercizio.
Sin noti che ciò che è stato raccolto è il MCD dei tre monomi.

Esempio B3.2: $5a^2 - 10ab = 5a(a - 2b)$

Il MCD di $5a^2$ e di -10ab è 5a. Lo si raccoglie scrivendolo e successivamente accanto ad esso si aprono le parentesi.
$5a^2$:5a=a, -10ab:5a=-2b. Dentro le parentesi andrà (a-2b).

Esempio B3.3: $4x^2z^3 + 16x^2yz^3 - 8x^3z^5 + 12x^4yz^4 = 4x^2z^3(1 + 4y - 2xz^2 + 3x^2yz)$

Il MCD dei 4 monomi considerati è $4x^2z^3$.
$4x^2z^3 : 4x^2z^3 = 1$
$16x^2yz^3 : 4x^2z^3 = 4y$
$-8x^3z^5 : 4x^2z^3 = -2xz^2$
$12x^4yz^4 : 4x^2z^3 = 3x^2yz$
I quattro risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi.

Esempio B3.4: $\frac{2}{5}xy + \frac{4}{15}xy^2 - \frac{6}{25}x = \frac{2}{5}x\left(y + \frac{2}{3}y^2 - \frac{3}{5}\right)$

In questo esempio sono presenti delle frazioni. Al numeratore si raccoglie il MCD dei denominatori 2, 4, 6, che è 2. Al denominatore si raccoglie il MCD dei denominatori 5, 15, 25, che è 5. x è presente in tutti e tre i termini del polinomio e quindi lo si raccoglie.

$\frac{2}{5}xy : \frac{2}{5}x = y$

$\frac{4}{15}xy^2 : \frac{2}{5}x = \frac{2}{3}y^2$

$-\frac{6}{25}x : \frac{2}{5}x = -\frac{3}{5}$

I tre risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi

Esempio B3.5: $a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$

In questo caso (x-y) viene considerato come un oggetto a sé stante, e non come due oggetti "x" e "–y" separati tra loro. Per questa ragione si può considerare che siano presenti solo due termini: "a(x-y)" e "b(x-y)".

(x-y) è presente in tutti e due i termini, per cui lo si può raccogliere.
a(x-y):(x-y)=a
b(x-y):(x-y)=b
I due risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi.

Esempio B3.6: $2a(2a-3b)-b(2a-3b)=(2a-3b)(2a-b)$

Si ragiona in maniera analoga all'esempio precedente raccogliendo (2a-3b).
2a(2a-3b):(2a-3b)=2a
-b(2a-3b):(2a-3b)=-b
I due risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi.

Esempio B3.7: $x(x+1)^3-(x+1)^2+x+1=(x+1)\left[x(x+1)^2-(x+1)+1\right]$

Si ragiona in maniera analoga agli esempi precedenti e si raccoglie (x+1).
$x(x+1)^3:(x+1)= x(x+1)^2$
$-(x+1)^2:(x+1)=-(x+1)$
(x+1):(x+1)=1
I tre risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi.

Esempio B3.8: $9a^{m+2}+6a^m=3a^m(3a^2+2)$

Il MCD di 9 e 6 è 3. Per le proprietà delle potenze si può considerare $a^{m+2}=a^m\cdot a^2$. I due termini hanno dunque in comune a^m. Si raccoglie $3a^m$.
$9a^{m+2}:3a^m=3a^2$ Quando c'è la divisione si sottraggono gli esponenti, e m+2-m=2
$6a^m:3a^m=2$
I due risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi.

Esempio B3.9: $x^{n+1}+x^n+x=x(x^n+x^{n-1}+1)$

La x è presente in tutti e tre i monomi e la si raccoglie. Per le proprietà delle potenze, come già visto nell'esempio precedente, si sottraggono gli esponenti.
$x^{n+1}:x=x^n$
$x^n:x=x^{n-1}$
x:x=1
I tre risultati delle divisioni vanno messi tra parentesi.

RACCOGLIMENTO PARZIALE

Il raccoglimento totale si effettua in un solo passaggio. Per il raccoglimento parziale servono due passaggi o più.
Si deve raccogliere a gruppi, in modo che dopo il primo passaggio le parentesi contengano lo stesso polinomio che può successivamente essere raccolto.

Esempio B3.10:
$$\begin{aligned}&AX+BX+AY+BY=\\&=X(A+B)+Y(A+B)=\\&=(A+B)(X+Y)\end{aligned}$$

<u>Non dimenticare</u> di mettere nel primo passaggio il segno più oppure il segno meno tra X(A+B) e Y(A+B)!

Nel primo passaggio si raccoglie X tra i primi due termini e Y tra i secondi due. Dopo il primo passaggio si ottengono due termini: X(A+B) e Y(A+B). Nel secondo passaggio si raccoglie (A+B) tra questi due termini.
Se dopo il primo passaggio dentro le parentesi non c'è lo stesso polinomio allora NON SI PUO' PROSEGUIRE.
Può darsi che si debba cambiare qualche segno affinché il contenuto delle parentesi sia lo stesso; in tal caso l'esercizio è risolvibile. Se non si riesce invece a fare in modo che le parentesi contengano lo stesso polinomio allora non si può utilizzare il metodo del raccoglimento parziale.

IMPORTANTE: Visto che è errore comune dimenticare il segno è fondamentale insistere sul fatto che bisogna sempre mettere un segno (+ o -) nel primo passaggio dopo aver chiuso la prima parentesi!

Ecco qualche altro esempio:

Esempio B3.11: $5x^2-3x+10xy-6y=x(5x-3)+2y(5x-3)=(5x-3)(x+2y)$
Qui si è raccolta la x tra i primi due termini e 2y tra i secondi due termini.
Dopo il primo passaggio dentro le parentesi c'è lo stesso polinomio, quindi lo si può raccogliere ulteriormente.

Esempio B3.12: $3a^2-3a-2ab+2b=3a(a-1)-2b(a-1)=(a-1)(3a-2b)$
Qui si è raccolto 3a tra i primi due termini e −2b tra i secondi due.

Si noti che se si fosse raccolto 2b tra i secondi due anziché –2b allora dentro le seconde parentesi ci sarebbe stato il polinomio (-a+1) che non è uguale ad (a-1) e non sarebbe stato possibile andare avanti! (infatti 5-3 non è uguale a –5+3).
Quando si raccoglie un fattore negativo bisogna cambiare i segni di tutti i termini che vengono messi dentro le parentesi.

Esempio B3.13: $ax - a + x^2 + x = a(x-1) + x(x+1)$ NON SI PUO' SCOMPORRE

Dopo il primo passaggio si trovano dentro le parentesi due fattori diversi (x-1) e (x+1)
Infatti 5+3 è diverso da 5-3!
In questo caso non si può utilizzare il raccoglimento parziale, e si deve scrivere che il polinomio non è scomponibile. Esistono alcuni polinomi che non sono scomponibili in fattori, e quando se ne trova uno è necessario indicare che non lo si può scomporre.

Esempio B3.14: $a^3 + ax - a^2 - x = a(a^2 + x) - (a^2 + x) = (a^2 + x)(a-1)$

Qui si è raccolto a tra i primi due termini e –1 tra i secondi due termini.
Quando due termini hanno solo il segno meno in comune è possibile raccogliere solamente il segno meno; sarà necessario mettere dentro le parentesi tutti i termini cambiati di segno.

Esempio B3.15: $ax^2 - 2 + x^2 - 2a = x^2(a+1) - 2(1+a) = (a+1)(x^2 - 2)$

Qui si è raccolto x^2 tra il primo e il terzo termine, e –2 tra il primo e il quarto termine.
Non è quindi necessario raccogliere per forza tra i primi due termini e tra i secondi due termini.
Dentro le parentesi si hanno (a+1) e (1+a) che sono uguali (infatti 5+3 è uguale a 3+5) e quindi si può raccogliere (a+1) che è in comune.

Esempio B3.16: $AX + BX + CX + AY + BY + CY = X(A+B+C) + Y(A+B+C) = (A+B+C)(X+Y)$

Qui si è raccolto tra i primi tre termini la X e tra i secondi tre la Y.
Il raccoglimento parziale può quindi essere usato anche in caso che i termini siano 6, oppure 8 ecc.

RICAPITOLANDO: Per utilizzare il raccoglimento parziale si deve:
- RACCOGLIERE A GRUPPI
- RICORDARSI DI SEPARARE CON UN SEGNO IL PRIMO ADDENDO DAL SECONDO
- DENTRO LE PARENTESI DOPO IL PRIMO PASSAGGIO DEVE ESSERCI LO STESSO POLINOMIO
- RACCOGLIERE TALE POLINOMIO COME FATTORE COMUNE

B3.2 Prodotti notevoli

Per scomporre in fattori utilizzando i prodotti notevoli si devono utilizzare (al contrario) le regole sui prodotti notevoli già viste nel capitolo B2.

ECCOLE:

- Quadrato di un binomio: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- Differenza di quadrati: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- Somma di quadrati: $a^2 + b^2$ NON SI SCOMPONE
- Quadrato di un trinomio: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$
- Cubo di un binomio: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
- Somma e differenza di cubi: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Nei casi del quadrato del binomio, del quadrato del trinomio, del cubo del binomio è necessario effettuare la verifica.
Se facendo la verifica il risultato non è il polinomio di partenza allora il polinomio dato non si può scomporre.

QUADRATO DI UN BINOMIO

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

<u>Se ci sono 3 termini allora se ne scrivono due tra parentesi e si eleva alla seconda.</u>

Si devono trovare nel testo dei prossimi esercizi due quadrati e un doppio prodotto.

Esempio B3.17: $9a^2 + 6ab + b^2$

I quadrati sono $9a^2$ e b^2, il doppio prodotto è 6ab.
$9a^2$ è il quadrato di 3a.

b^2 è il quadrato di b.
Utilizzando la regola si deve mettere tra parentesi il polinomio 3a+b ed elevarlo alla seconda.

$$9a^2 + 6ab + b^2 = (3a + b)^2$$

E' necessario effettuare la verifica. Se la verifica non viene allora il polinomio non si può scomporre.
Ecco la verifica:

- il quadrato di 3a è $9a^2$ OK.
- il quadrato di b è b^2 OK.
- il doppio prodotto è $(3a)\cdot(b)\cdot 2=+6ab$ OK.

Si noti che si sarebbe potuto mettere il meno sia davanti al primo termine che davanti al secondo, e la verifica sarebbe venuta lo stesso: $9a^2 + 6ab + b^2 = (-3a - b)^2$. In effetti $(-3a - b)^2$ è uguale a $(3a + b)^2$.

Esempio B3.18: $16x^2 - 8x + 1 = (4x - 1)^2$

I quadrati sono $16x^2$ e 1, il doppio prodotto è $-8x$.
$16x^2$ è il quadrato di 4x.
1 è il quadrato di 1.
Il doppio prodotto è negativo quindi il segno da mettere tra i due termini dentro le parentesi è il meno.
Ecco la verifica:

- il quadrato di 4x è $16x^2$ OK.
- il quadrato di 1 è 1 OK.
- il doppio prodotto è $(4x)\cdot(-1)\cdot 2=-8x$ OK.

Si noti che si sarebbe potuto mettere il meno davanti al primo termine anziché davanti al secondo, e la verifica sarebbe venuta lo stesso: $16x^2 - 8x + 1 = (-4x + 1)^2$.

Esempio B3.19: $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

I quadrati sono a^2 e 1, il doppio prodotto è 2a.
a^2 è il quadrato di a.
1 è il quadrato di 1.
Ecco la verifica:

- il quadrato di a è a^2 OK.
- il quadrato di 1 è 1 OK.
- il doppio prodotto è $(a)\cdot(1)\cdot 2=+2a$ OK.

Esempio B3.20: $4 + 9x^2a^4 - 6xa^2 = (2 - 3xa^2)^2$ MA ATTENZIONE CHE NON VIENE LA VERIFICA $\rightarrow$ NON SI SCOMPONE

I quadrati sono 4 e $9x^2a^4$, il doppio prodotto è $-6xa^2$.
4 è il quadrato di 2.
$9x^2a^4$ è il quadrato di $3xa^2$.
Ecco la verifica:

- il quadrato di 2 è 4 OK.
- il quadrato di $3xa^2$ è $9x^2a^4$ OK.
- il doppio prodotto è $(2)\cdot(-3xa^2)\cdot 2=-12xa^2$ e non $-6xa^2$ quindi NON VIENE LA VERIFICA

In questo caso il polinomio NON SI PUO' SCOMPORRE.

Esempio B3.21: $a^{2m} + 2a^{m+1} + a^2 = (a^m + a)^2$

I quadrati sono a^{2m} e a^2, il doppio prodotto è $2a^{m+1}$.
a^{2m} è il quadrato di a^m.
a^2 è il quadrato di a.
Ecco la verifica:

- il quadrato di a^m è a^{2m} OK (si ricorda che nelle potenze si moltiplicano gli esponenti).
- il quadrato di a è a^2 OK
- il doppio prodotto è $(a^m)\cdot(a)\cdot 2=2a^{m+1}$ OK (si ricorda che quando si effettuano i prodotti si sommano gli esponenti delle lettere)

Esempio B3.22: $a^2x - 2abx + b^2x = x(a^2 - 2ab + b^2) = x(a - b)^2$

In questo caso per prima cosa si deve RACCOGLIERE la x. Dopo aver raccolto ci si accorge che si può scomporre ciò che si trova dentro le parentesi con la regola del quadrato di un binomio. Nel secondo passaggio non dimenticarsi di ricopiare la x <u>prima</u> di scomporre $(a^2 - 2ab + b^2)$.

DIFFERENZA DI QUADRATI

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

<u>Se ci sono 2 quadrati separati da un meno allora si mettono due parentesi ognuna con due termini dentro.</u>

Esempio B3.23: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$

$4x^2$ è il quadrato di 2x.
9 è il quadrato di 3.
Basta mettere tra parentesi 2x e 3, una volta separati da un più e una volta separati da un meno.

Esempio B3.24: $a^2-6=\left(a-\sqrt{6}\right)\left(a+\sqrt{6}\right)$

In questo caso a^2 è il quadrato di a, ma 6 non è il quadrato di un numero intero.
Ma così come 5⋅5=25 e 25 è il quadrato di 5, anche $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{36}=6$ quindi 6 è il quadrato di $\sqrt{6}$
Si può quindi scomporre utilizzando le radici quadrate.

Esempio B3.25: $2a^2x-2x=2x\left(a^2-1\right)=2x(a+1)(a-1)$

Prima di usare la regola si deve prima raccogliere ciò che è in comune tra tutti i termini come nell'esempio B3.22. In questo caso si raccoglie 2x.

Esempio B3.26: $(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$

In questo esempio si considera (x+y) come se fosse un termine unico.

Esempio B3.27: $a^{2m}-a^2=\left(a^m-a\right)\left(a^m+a\right)$

a^{2m} è il quadrato di a^m ; a^2 è il quadrato di a.

Esempio B3.28: $25x^2-1=(5x-1)(5x+1)$

Esempio B3.29: $25x^2+1$ NON SI PUO' SCOMPORRE

In questo caso non si ha una differenza di quadrati ma una SOMMA di quadrati.
La somma di quadrati non si scompone!

$$a^2+b^2 \qquad \text{NON SI SCOMPONE}$$

Esempio B3.30: $a^4-2a^2+1=\left(a^2-1\right)^2=(a-1)^2(a+1)^2$

In questo caso si utilizza la regola del quadrato di un binomio. Dopo averla utilizzata ci si accorge che dentro le parentesi c'è una differenza di quadrati: $\left(a^2-1\right)$ che si scompone come $(a-1)(a+1)$.

$\left(a^2-1\right)^2$ è però elevato alla seconda, pertanto l'esponente due va riportato in tutti e due i termini della scomposizione $(a-1)^2(a+1)^2$ per la regola 4 nelle proprietà delle potenze (paragrafo A1.6).

QUADRATO DI UN TRINOMIO

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

Se ci sono 6 termini allora se ne scrivono tre tra parentesi e si eleva alla seconda.

Esempio B3.31: $a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc=(a+2b+3c)^2$

I quadrati sono a^2 . $4b^2$ e $9c^2$, i doppi prodotti sono 4ab, 6ac, 12bc.
a^2 è il quadrato di a.
$4b^2$ è il quadrato di 2b.
$9c^2$ è il quadrato di 3c.
Ecco la verifica:

- il quadrato di a è a^2 , il quadrato di 2b è $4b^2$, il quadrato di 3c è $9c^2$ OK.
- il primo doppio prodotto è (a)⋅(2b)⋅2 = +4ab OK.
- il secondo doppio prodotto è (a)⋅(3c)⋅2 = +6ac OK.
- il terzo doppio prodotto è (2b)⋅(3c)⋅2 = +12bc OK.

I segni dell'esercizio sono tutti più, pertanto dentro la parentesi si metteranno tutti più.

Esempio B3.32: $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc=(a-b+c)^2$

I quadrati sono a^2 . b^2 e c^2 , i doppi prodotti sono -2ab, +2ac, -2bc.
La b nei doppi prodotti ha il segno – per due volte, pertanto nel risultato andrà con il segno meno.
a^2 è il quadrato di a, $4b^2$ è il quadrato di 2b e $9c^2$ è il quadrato di 3c.
Ecco la verifica:

- il quadrato di a è a^2, il quadrato di 2b è $4b^2$, il quadrato di 3c è $9c^2$ OK.
- il primo doppio prodotto è (a)⋅(-b)⋅2 = -2ab OK.
- il secondo doppio prodotto è (a)⋅(c)⋅2 = +2ac OK.
- il terzo doppio prodotto è (-b)⋅(c)⋅2 = -2bc OK.

Si noti che avremmo potuto mettere il – alla a ed alla c, lasciando la b con il segno più e la verifica sarebbe venuta ugualmente: $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc=(-a+b-c)^2$.

Esempio B3.33: $x^2+1+y^2-2x+2y+2xy$ NON E' $(x-1+y)^2$ PERCIO' NON SI SCOMPONE.

I quadrati sono x^2 . 1 e y^2 , i doppi prodotti sono $-2x$, $+2y$, $+2xy$.
C'è solo un doppio prodotto con il segno – pertanto non si può scomporre!
NON SI SCOMPONE.

RIASSUMENDO RIGUARDO AI SEGNI:

- I QUADRATI SONO SEMPRE POSITIVI
- SE I DOPPI PRODOTTI SONO POSITIVI, ALLORA TUTTI I TERMINI VANNO COL PIU'
- SE CI SONO DUE DOPPI PRODOTTI NEGATIVI, ALLORA UN TERMINE VA COL MENO
- SE C'E' UN DOPPIO PRODOTTO NEGATIVO, OPPURE TUTTI E TRE ALLORA NON SI PUO' SCOMPORRE

CUBO DI UN BINOMIO

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Se ci sono 4 termini allora se ne scrivono due tra parentesi e si eleva alla terza.

Esempio B3.34: $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 = (a+1)^3$

I cubi sono $8a^3$ e 1.
I segni sono tutti positivi pertanto tutti e due i termini vanno con il più.
$8a^3$ è il cubo di 2a, 1 è il cubo di 1.
Ecco la verifica:

- il cubo di 2a è $8a^3$, il cubo di 1 è 1 OK.
- il primo triplo prodotto è $(2a)^2\cdot(1)\cdot 3 = (4a^2)\cdot(1)\cdot 3 = +12a^2$ OK.
- il secondo triplo prodotto è $(2a)\cdot(1)^2\cdot 3 = +6a$ OK.

Esempio B3.35: $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = (x-3)^3$

I cubi sono x^3 e $-27y^3$.
Hanno il meno il cubo del secondo termine e un doppio prodotto pertanto il secondo termine va con il meno.
x^3 è il cubo di x, $-27y^3$ è il cubo di $-3y$.
Ecco la verifica:

- il cubo di x è x^3, il cubo di $-3y$ è $-27y^3$ OK.
- il primo triplo prodotto è $(x)^2\cdot(-3y)\cdot 3 = (x^2)\cdot(-3y)\cdot 3 = -3x^2y$ OK.
- il secondo triplo prodotto è $(x)\cdot(-3y)^2\cdot 3 = (x)\cdot(9y^2)\cdot 3 = +27xy^2$ OK.

Esempio B3.36: $-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = (-x-1)^3$

I cubi sono $-x^3$ e -1.
Tutti i termini hanno il segno meno, pertanto tra parentesi vanno tutti e due con il segno meno.
$-x^3$ è il cubo di $-x$, -1 è il cubo di -1.
Ecco la verifica:

- il cubo di $-x$ è $-x^3$, il cubo di -1 è -1 OK.
- il primo triplo prodotto è $(-x)^2\cdot(-1)\cdot 3 = (x^2)\cdot(-1)\cdot 3 = -3x^2$ OK.
- il secondo triplo prodotto è $(-x)\cdot(-1)^2\cdot 3 = (-x)\cdot(1)\cdot 3 = -3x$ OK.

Esempio B3.37: $\frac{1}{27}a^3 - \frac{1}{3}a^2b + ab^2 - b^3 = \left(\frac{1}{3}a - b\right)^3$.

I cubi sono $\frac{1}{27}a^3$ e $-b^3$.

Hanno il meno il cubo del secondo termine e un doppio prodotto pertanto il secondo termine va con il meno.
$\frac{1}{27}a^3$ è il cubo di $\frac{1}{3}a$, $-b^3$ è il cubo di $-b$.
Ecco la verifica:

- il cubo di $\frac{1}{3}a$ è $\frac{1}{27}a^3$, il cubo di $-b$ è $-b^3$ OK.
- il primo triplo prodotto è $\left(\frac{1}{3}a\right)^2\cdot(-b)\cdot 3 = \frac{1}{9}a^2\cdot(-b)\cdot 3 = -\frac{1}{3}a^2b$ OK.
- il secondo triplo prodotto è $\left(\frac{1}{3}a\right)\cdot(-b)^2\cdot 3 = \left(\frac{1}{3}a\right)\cdot(b^2)\cdot 3 = ab^2$ OK.

Esempio B3.38: $x^3 - 9x^2y - 27xy^2 - 27y^3$ NON E' $(x-3)^3$ NON SI PUO' SCOMPORRE

L'esempio è uguale all'es. B3.35, con una decisiva differenza. I cubi sono x^3 e $-27y^3$.
Ci sono però 3 meno e non 2! Non si può scomporre!

RIASSUMENDO RIGUARDO AI SEGNI:

- SE IL CUBO E' POSITIVO (NEGATIVO) IL TERMINE SARA' POSITIVO (NEGATIVO)
- SE CI SONO UN CUBO E UN TRIPLO PRODOTTO NEGATIVO, ALLORA UN TERMINE VA COL MENO
- SE TUTTI I TERMINI SONO NEGATIVI ALLORA VANNO TUTTI CON IL MENO
- SE C'E' UN TERMINE OPPURE TRE TERMINI COL MENO ALLORA NON SI PUO' SCOMPORRE

SOMMA E DIFFERENZA DI CUBI

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Esempio B3.39: $8x^3 - y^3 = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

$8x^3$ è il cubo di 2x, $-y^3$ è il cubo di –y. Dentro la prima parentesi si mette quindi (2x-y).
Nella seconda parentesi vanno:

- Il quadrato del primo ossia $(2x)^2 = +4x^2$.
- Il prodotto dei due cambiato di segno ossia $(2x)\cdot(y) = +2xy$.
- Il quadrato del secondo $(-y)^2 = +y^2$.

Esempio B3.40: $\frac{27}{8}a^3 + 64 = \left(\frac{3}{2}a + 4\right)\left(\frac{9}{4}a^2 - 6a + 16\right)$

$\frac{27}{8}a^3$ è il cubo di $\frac{3}{2}a$, 64 è il cubo di 4. Dentro la prima parentesi si mette quindi $\left(\frac{3}{2}a + 4\right)$.
Nella seconda parentesi vanno:

- Il quadrato del primo ossia $\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2$.
- Il prodotto dei due cambiato di segno ossia $-\left(\frac{3}{2}a\right)\cdot 4 = -\frac{12}{2}a = -6a$.
- Il quadrato del secondo $4^2 = 64$.

Esempio B3.41:

$$\begin{aligned} & x^6 - y^6 = \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

Nel primo passaggio si usa la differenza di quadrati.
x^3-y^3 è una differenza di cubi, x^3+y^3 è una somma di cubi e si possono usare le regole di questo paragrafo.

Esempio B3.42: $27a^3 - 2 = \left(3a - \sqrt[3]{2}\right)\left(9a^2 + 3a\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

$27a^3$ è il cubo di 3a, 2 è il cubo di $\sqrt[3]{2}$ (Infatti $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$)

Dentro la prima parentesi si mette quindi $\left(3a - \sqrt[3]{2}\right)$

Nella seconda parentesi vanno:

- Il quadrato del primo ossia $(3a)^2 = +9a^2$.
- Il prodotto dei due cambiato di segno ossia $(3a)\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3a\sqrt[3]{2}$.
- Il quadrato del secondo $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$.

B3.3 Trinomio di 2° grado

I METODO:

$$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$$

IMPORTANTE: Per usare questo metodo è necessario che davanti alla x ci sia il numero 1.

Se si svolge $(x+2)(x+3)$ si ottiene $(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

Quindi $(x+2)(x+3)$ è uguale a $x^2 + 5x + 6$

La scomposizione del trinomio di secondo grado è il passaggio inverso, ossia come passare da $x^2 + 5x + 6$ a $(x+2)(x+3)$

Si noti che il 6 non è altro che $3\cdot2$, e che 5 non è altro che 3+2, e 3 e 2 sono proprio i numeri che si trovano tra parentesi in $(x+2)(x+3)$.

Da questa osservazione si può quindi ricavare il seguente procedimento:

Per scomporre $x^2 + sx + p$ si devono trovare due numeri interi la cui somma è s e il cui prodotto è p.
Una volta trovati questi due numeri si scrive (x + il primo numero)(x + il secondo numero).

Non è sempre possibile trovare questi numeri, e anche quando è possibile non è sempre immediato.

Esempio B3.43: Scomporre $x^2+7x+12$

Bisogna trovare due numeri che moltiplicati diano 12.

Ecco tutti i casi possibili:

x_1	x_2	Somma
1	12	13
-1	-12	-13
2	6	8
-2	-6	-8
3	4	7
-3	-4	-7

La somma è +7 con i numeri +3 e +4

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$$

Si noti che la verifica può garantire la correttezza dell'esercizio: $(x+3)(x+4)=x^2+3x+4x+12=x^2+7x+12$

Negli esempi successivi non la scriveremo esplicitamente, ma è da ricordarsi che si può sempre effettuare la verifica.

Esempio B3.44: Scomporre $x^2+3x-10$

Bisogna trovare due numeri che moltiplicati diano –10.

Ecco tutti i casi possibili:

x_1	x_2	somma
1	-10	-9
-1	10	9
2	-5	-3
-2	5	3

La somma è +3 con i numeri -2 e +5

$$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$$

Esempio B3.45: Scomporre x^2-2x-3

Bisogna trovare due numeri che moltiplicati diano –3.

Ecco tutti i casi possibili:

x_1	x_2	Somma
1	-3	-2
-1	3	2

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

Esempio B3.46: Scomporre $x^2-8x+15$

Bisogna trovare due numeri che moltiplicati diano 15.

Ecco tutti i casi possibili:

x_1	x_2	somma
1	15	16
-1	-15	-16
3	5	8
-3	-5	-8

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$

Esempio B3.47: Scomporre $-x^2-2x+8$

Non si può usare la regola perché davanti alla x^2 non c'è 1 ma –1.

Per poter utilizzare la regola si raccoglie il segno meno cambiando i segni di tutti i termini del polinomio.

$$-x^2-2x+8=-\left(x^2+2x-8\right).$$

Bisogna trovare due numeri che moltiplicati danno -8

Ecco tutti i casi possibili:

x_1	x_2	somma
1	-8	-7
-1	8	7
2	-4	-2
-2	4	2

$$-x^2-2x+8=-\left(x^2+2x-8\right)=-(x-2)(x+4)$$

ECCO UNO SCHEMA PER QUANTO RIGUARDA I SEGNI:

Se i segni sono	+	+	+	dentro le parentesi vanno	(+)(+)
Se i segni sono	+	-	+	dentro le parentesi vanno	(-)(-)
Se i segni sono	+	-	-	dentro le parentesi vanno	(+)(-)
					Il numero più grande con il meno
Se i segni sono	+	+	-	dentro le parentesi vanno	(+)(-)

II METODO:
IMPORTANTE: Questo metodo funziona sempre, ma è più lungo del precedente.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Per trovare x_1 e x_2 si usa la formula $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

che si userà anche per risolvere successivamente le equazioni di secondo grado.

Esempio B3.48: Scomporre $2x^2-5x+3$

a=2, b=-5, c=3. Si usa la formula:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(2)(3)}}{2(2)}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{5\pm1}{4}=\begin{cases}=\frac{5+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[2ex]=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1\end{cases}$$

Ora che si sono trovati i due numeri 3/2 e 1 si può scomporre.

$$\begin{aligned}&2x^2-5x+3=\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)=\\&=2\left(\frac{2x-3}{2}\right)(x-1)=\\&=(2x-3)(x-1)\end{aligned}$$

Nel primo passaggio si sostituiscono a=2, x_1=3/2 e x_2=1 nella formula.
Poiché nella formula c'è il meno si cambia di segno alle soluzioni trovate.
Nel secondo passaggio si effettua il denominatore comune dentro le parentesi che contengono frazioni.
Nel terzo passaggio si semplifica e si scrive il risultato.

Esempio B3.49: Scomporre $-12x^2+5x+3$
a=-12, b=5, c=3. Si usa la formula:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{(-5)^2-4(-12)(3)}}{2(-12)}=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{-24}=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{-24}=\frac{-5\pm13}{-24}=\begin{cases}=\frac{-5+13}{-24}=\frac{8}{-24}=-\frac{1}{3}\\[2ex]=\frac{-5-13}{-24}=\frac{-18}{-24}=+\frac{3}{4}\end{cases}$$

Ora che si sono trovati i due numeri -1/3 e +3/4 si può scomporre.

$$\begin{aligned}&-12x^2+5x+3=\\&=-12\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=\\&=-12\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{4x-3}{4}\right)=\\&=-(3x+1)(4x-3)\end{aligned}$$

Nel primo passaggio si sostituiscono a=-12, x_1=-1/3 e x_2=3/4 nella formula.
Poiché nella formula c'è il meno si cambia di segno alle soluzioni trovate.
Nel secondo passaggio si fa il denominatore comune dentro le parentesi che contengono frazioni.
Nel terzo passaggio si semplifica e si scrive il risultato.

Esempio B3.50: Scomporre $3x^2-x+2$

a=3, b=-1, c=2. Si usa la formula:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(3)(2)}}{2(3)}=\frac{1\pm\sqrt{1-24}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{-23}}{6}$$

La radice di un numero negativo non esiste QUINDI $3x^2-x+2$ NON SI PUO' SCOMPORRE.

Esempio B3.51: Scomporre $16x^2-8x+1$

a=16, b=-8, c=1. Si usa la formula:

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(16)(1)}}{2(16)}=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{32}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{32}=\frac{8\pm 0}{32}=\frac{1}{4}$$

$$16x^2-8x+1=16\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=16\left(\frac{4x-1}{4}\right)\left(\frac{4x-1}{4}\right)=(4x-1)^2$$

E' altresì vero che svolgere in questo modo un esercizio semplice come il B3.18 (che abbiamo già svolto in maniera decisamente più semplice con il quadrato di un binomio) è da masochisti!

<u>SE DENTRO LA RADICE VIENE ZERO E' MEGLIO USARE LA REGOLA DEL QUADRATO DI UN BINOMIO.</u>

Esempio B3.52: Scomporre x^2-x-1

a=1, b=-1, c=-1. Si usa la formula:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\[2ex]=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Può anche venire un'espressione con le radici, mica è vietato!

B3.4 Regola di Ruffini

La regola di Ruffini è un po' lunga ma ha due pregi:

- E' molto più breve del procedimento che veniva utilizzato prima che questo procedimento fosse inventato da Ruffini.
- Funziona quando gli altri metodi visti fin qui falliscono.

La regola permette di abbassare un polinomio di un grado. Se ho un polinomio di 4° grado la regola mi permette di scomporlo in un polinomio di 1° grado e in uno di 3°.

PROCEDIMENTO

1. Trovare un numero che messo al posto dell'incognita annulli il polinomio (faccia venire zero) I possibili numeri che annullano il polinomio sono i divisori del termine noto fratto i divisori del coefficiente del termine di grado massimo.
2. Costruire la tabella.
3. Usare la tabella per scrivere il risultato.

Esempio B3.53: Scomporre $x^3+2x^2-11x-12$

1) <u>Trovare un numero che messo al posto dell'incognita annulli il polinomio</u>

I numeri da provare sono i divisori del termine noto 12, ossia 1, 2, 3, 4, 6, 12, fratto i divisori del coefficiente del termine di grado massimo 1, ossia 1.

I NUMERI POSSIBILI SONO $\pm\frac{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12}{1}$ cioè +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +6, -6, +12, -12.

Si mettono questi valori al posto della x e si vede se il polinomio vale zero

$p(1)=(1)^3+2(1)^2-11(1)-12=1+2-11-12=-20$ Non viene zero

$p(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-11(-1)-12=-1+2+11-12=0$ Viene zero quindi il numero è -1

(in realtà ci sono anche altri numeri che in questo caso danno risultato zero, l'esercizio ha lo stesso risultato anche se si utilizzano altri numeri diversi da −1, basta che annullino il polinomio).

2) <u>Tabella</u>

Per riempire la tabella si eseguono alternativamente somme e moltiplicazioni

Ecco come si riempie la tabella passaggio per passaggio

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Si porta giù l'1

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Si moltiplica l'1 per il −1

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

Si sommano 2 e −1

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

Si moltiplica l'1 per il −1

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & -1 & -1 & 12\\ \hline & 1 & 1 & -12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & -11 & -12\\ -1 & & -1 & -1 & 12\\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0\end{array}$$

Si sommano −11 e −1 Si moltiplicano −12 e −1 Si sommano −12 e 12 DEVE VENIRE ZERO

Se non viene zero nell'ultima casella in basso a destra conviene svolgere nuovamente l'esercizio dall'inizio perché c'è sicuramente un errore!

Ecco la tabella completa:

Qui vanno i numeri del testo dell'esercizio

Qui va il numero trovato al passaggio precedente
In questo caso è -1

	1	2	-11	-12
-1		-1	-1	12
	1	1	-12	0

3) <u>Scrivere il risultato</u>

Il polinomio era di terzo grado pertanto si scompone in una parte di primo grado e in una parte di secondo.

$x^3+2x^2-11x-12=(x\qquad)(\quad x^2\quad x\qquad)$

Qui va il numero trovato nel primo passaggio cambiato di segno (nel nostro caso −1 diventa +1)

Qui vanno i numeri che si trovano nell'ultima riga della tabella, (nel nostro caso 1, 1 e −12)

Pertanto $x^3+2x^2-11x-12=(x+1)(x^2+x-12)$

L'esercizio non è finito perché il trinomio tra parentesi si può scomporre con il primo metodo del trinomio di secondo grado trovando due numeri che moltiplicati danno −12 e sommati +1. I numeri sono +4 e −3.
L'esercizio completo è quindi

$$x^3+2x^2-11x-12=(x+1)(x^2+x-12)=(x+1)(x+4)(x-3)$$

Esempio B3.54: Scomporre $4x^3-13x+6$

1) <u>Trovare un numero che messo al posto dell'incognita annulli il polinomio</u>

I numeri da provare sono i divisori del termine noto 6, ossia 1, 2, 3, 6, fratto i divisori del coefficiente del termine di grado massimo 4, ossia 1, 2, 4.

I NUMERI POSSIBILI SONO $\pm\frac{1,\ 2,\ 3,\ 6}{1,\ 2,\ 4}$ cioè

+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6, +1/2, -1/2, +1/4, -1/4, +3/2, -3/2, +3/4, -3/4.

Si mettono questi valori al posto della x e si vede se il polinomio vale zero:

$p(1)=4(1)^3-13(1)+6=4-13+6=-3$ Non viene zero.

$p(-1)=4(-1)^3-13(-1)+6=-4+13+6=+16$ Non viene zero.

$p(2)=4(2)^3-13(2)+6=32-26+6=+12$ Non viene zero.

$p(-2)=4(-2)^3-13(-2)+6=-32+26+6=0$ EVVIVA viene zero il numero è −2.

2) <u>Tabella</u>

Stavolta, visto che non c'è il termine con x^2, si metterà zero nella casella ad esso corrispondente.
Ecco come si riempie la tabella passaggio per passaggio:

	4	0	-13	6
-2				
	4			

Si porta giù il 4

	4	0	-13	6
-2		-8		
	4			

Si moltiplica il 4 per il −2

	4	0	-13	6
-2		-8		
	4	-8		

Si sommano 0 e −8

	4	0	-13	6
-2		-8	16	
	4	-8		

Si moltiplica il -8 per il −2

	4	0	-13	6
-2		-8	16	
	4	-8	3	

Si sommano −13 e 16

	4	0	-13	6
-2		-8	16	-6
	4	-8	3	

Si moltiplicano 3 e −2

	1	2	-11	-12
-1		-1	-1	12
	1	1	-12	0

Si sommano 6 e −6 E' VENUTO ZERO OK

Ecco la tabella completa:

Qui vanno i numeri del testo dell'esercizio

Qui va il numero trovato al passaggio precedente
In questo caso è -2

	4	0	-13	6
-2		-8	16	-6
	4	-8	3	0

3) <u>Scrivere il risultato</u>

Il polinomio era di terzo grado pertanto si scompone in una parte di primo grado e in una parte di secondo.

$4x^3 - 13x + 6 = (x \quad)(\quad x^2 \quad x \quad).$

Qui va il numero trovato nel primo passaggio cambiato di segno (nel nostro caso –2 diventa +2).

Qui vanno i numeri che si trovano nell'ultima riga della tabella, (nel nostro caso 4, -8 e +3).

Pertanto $4x^3 - 13x + 6 = (x+2)(4x^2 - 8x + 3)$

L'esercizio non è finito perché il trinomio tra parentesi si può risolvere con il secondo metodo del trinomio di secondo grado oppure nuovamente con Ruffini. Utilizzando nuovamente Ruffini si ha:

1) Trovare un numero che annulli $4x^2 - 8x + 3$
(non serve provare di nuovo i numeri che non funzionavano prima)

$p(3) = 4(3)^2 - 8(3) + 3 = 4 \cdot 9 - 8 \cdot 3 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$ non viene zero.

$p(-3) = 4(-3)^2 - 8(-3) + 3 = 4 \cdot 9 - 8 \cdot -3 + 3 = 36 + 24 + 3 = 63$ non viene zero.

$p(6) = 4(6)^2 - 8(6) + 6 = 4 \cdot 36 - 8 \cdot 6 + 3 = 144 - 48 + 3 = 99$ non viene zero.

$p(-6) = 4(-6)^2 - 8(-6) + 6 = 4 \cdot 36 - 8 \cdot -6 + 3 = 144 + 48 + 3 = 195$ non viene zero.

$p\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$ VIENE ZERO quindi il numero è ½.

(NB: se non funziona alcun numero di quelli possibili non si può scomporre in fattori).

2) Tabella
Stavolta visto che ci sono solo 3 termini la tabella sarà più piccola.
Ecco come si riempie passaggio per passaggio:

	4	-8	3
1/2			
	4		

Si porta giù il 4

	4	-8	3
1/2		2	
	4		

Si moltiplica il 4 per 1/2

	4	-8	3
1/2		2	
	4	-6	

Si sommano -8 e 2

	4	-8	3
1/2		2	-3
	4	-6	

Si moltiplica il -6 per 1/2

	4	-8	3
1/2		2	-3
	4	-6	0

Si sommano 3 e –3

E' VENUTO ZERO OK

Ecco la tabella completa:

Qui vanno i numeri del testo dell'esercizio

Qui va il numero trovato al passaggio precedente
In questo caso è 1/2

	4	-8	3
1/2		2	-3
	4	-6	0

3) <u>Scrivere il risultato</u>

Il polinomio era di secondo grado pertanto si scompone in una parte di primo grado e in una parte di primo.

$4x^2 - 8x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x\text{-}6) = \left(\frac{2x-1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (2x\text{-}3) = (2x-1) \cdot (2x - 3)$

Qui va il numero trovato nel primo passaggio cambiato di segno (nel nostro caso –1/2 diventa +1/2).

Qui vanno i numeri che si trovano nell'ultima riga della tabella, (nel nostro caso 4 e -6).

Nella prima parentesi effettua il denominatore comune, nella seconda si raccoglie il 2.

Si semplificano i due e si scrive il risultato.

Pertanto $4x^2 - 8x + 3 = (2x-1)(2x-3)$

L'esercizio completo è quindi:

$$4x^3 - 13x + 6 = (x+2)\left(4x^2 - 8x + 3\right) = (x+2)(2x-1)(2x-3)$$

Il polinomio è di terzo grado quindi il risultato è dato da tre fattori di primo grado. Moltiplicando il risultato si effettua agevolmente la verifica.

B3.5 Tabella riepilogativa

Il procedimento qui esposto è una traccia da seguire per scegliere il metodo più adatto per scomporre in fattori il polinomio dato.

I. Effettuare il raccoglimento totale (se possibile).

II. Contare quanti sono i termini.

2 termini

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — DIFFERENZA DI QUADRATI
- $a^2 + b^2$ NON SI SCOMPONE — SOMMA DI QUADRATI
- $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ — DIFFERENZA DI CUBI
- $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ — SOMMA DI CUBI

3 termini

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ — QUADRATO DI BINOMIO
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ — QUADRATI DI BINOMIO
- $x^2 + sx + p = (x+x_1)(x+x_2)$ con $x_1+x_2=s$ e $x_1 \cdot x_2=p$ — TRINOMIO 2°GRADO I metodo
- $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ con $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ — TRINOMIO 2°GRADO II metodo

4 termini

- $AX + BX + AY + BY = X(A+B) + Y(A+B) = (A+B)(X+Y)$ — RACCOGLIMENTO PARZIALE
- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ — CUBO DI UN BINOMIO

6 termini

- $AX + BX + AY + BY + AZ + BZ = X(A+B) + Y(A+B) + Z(A+B) = (A+B)(X+Y+Z)$ — RACCOGLIMENTO PARZIALE
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$ — QUADRATO DI UN TRINOMIO

III. Se non funziona nessuno dei metodi visti finora si usa la regola di RUFFINI.

IV. Se si possono ancora scomporre alcuni fattori lo si deve fare utilizzando nuovamente questa tabella dall'inizio.

B3.6 MCD e mcm di polinomi

Procedimento per trovare il MCD di polinomi

- Si scompongono in fattori i polinomi.
- Si prendono i fattori comuni con il minimo esponente.

Procedimento per trovare il mcm di polinomi

- Si scompongono in fattori i polinomi.
- Si prendono tutti i fattori (comuni e non comuni) con il massimo esponente.

ESEMPIO B3.55: Trovare MCD e mcm dei seguenti polinomi:

$$x^2 - x - 6 \qquad x^2 - 3x \qquad x^2 - 9$$

- Si scompongono i polinomi in fattori:
  - $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ — TRINOMIO DI SECONDO GRADO I metodo
  - $x^2 - 3x = x(x-3)$ — RACCOGLIMENTO TOTALE
  - $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ — DIFFERENZA DI QUADRATI
- MCD = x-3 — è l'unico fattore in comune.
- mcm= $x(x-3)(x+3)(x-2)$ — si prendono tutti i fattori.

ESEMPIO B3.56: Trovare MCD e mcm dei seguenti polinomi:

$x^2 + 2xy + y^2$ $\qquad$ $ax + ay - x - y$

- Si scompongono i polinomi in fattori:

  $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ $\qquad$ QUADRATO DI UN BINOMIO

  $ax + ay - x - y = a(x + y) - (x + y) = (x + y)(a - 1)$ $\qquad$ RACCOGLIMENTO PARZIALE

- MCD = $x+y$ $\qquad$ è l'unico fattore in comune.
- mcm= $(x + y)^2 (a - 1)$ $\qquad$ si prendono tutti i fattori col max esponente.