B2. Polinomi

B2.1 Cos'è un polinomio

Un **POLINOMIO** è la somma di due o più monomi.

Se ha due termini, come $a+b^2$ è detto binomio
Se ha tre termini, come $2a-3b+cx$ è detto trinomio, eccetera

GRADO DI UN POLINOMIO
Ogni monomio all'interno del polinomio ha un suo grado.
Si dice **GRADO** del polinomio **rispetto a una lettera** il grado massimo con cui tale lettera appare.
Si dice **GRADO COMPLESSIVO** del polinomio il grado del monomio che lo compone di grado più alto.

Esempio B2.1: dire il grado del monomio seguente rispetto ad ogni lettera e il suo grado complessivo:
$3a^2xy^2 - 5x^3y + 2ax - y^3$

Il grado rispetto alla a è 2, perché è il grado più alto con cui appare.
Il grado rispetto alla x è 3, perché è il grado più alto con cui appare.
Il grado rispetto alla y è 3, perché è il grado più alto con cui appare.
Il grado rispetto alla b è 0, perché la lettera b non appare nel polinomio.

$$\underbrace{3a^2xy^2}_{\text{grado } 5} \quad \underbrace{-5x^3y}_{\text{grado } 4} \quad \underbrace{+2ax}_{\text{grado } 2} \quad \underbrace{-y^3}_{\text{grado } 3}$$

Il grado complessivo è 5, perché è il grado più alto dei monomi che lo compongono.

Un polinomio è detto **omogeneo** se tutti i termini sono dello stesso grado.

POLINOMI ORDINATI
Un polinomio è ordinato secondo le potenze decrescenti di una lettera se i monomi sono ordinati da quello in cui la lettera ha il grado più alto a quello in cui la lettera ha il grado più basso.

Esempio B2.2: il polinomio $3a^2xy^2 - 5x^3y + 2ax - y^3$ dell'esempio precedente può essere ordinato rispetto alle varie lettere che lo compongono.

Ordinato rispetto alla x $\quad -5x^3y + 3a^2xy^2 + 2ax - y^3$
Ordinato rispetto alla y $\quad -y^3 + 3a^2xy^2 - 5x^3y + 2ax$
Ordinato rispetto alla a $\quad 3a^2xy^2 + 2ax - 5x^3y - y^3$

Quando si ordina un polinomio rispetto a una lettera se più monomi hanno lo stesso grado rispetto alla lettera per cui si sta ordinando il polinomio li possiamo mettere nell'ordine che si preferisce.

B2.2 Somma e sottrazione

Per effettuare somma e sottrazione di polinomi si deve:

1. Levare le parentesi
   - Se davanti alla parentesi c'è il + restano tutti gli addendi uguali
   - Se davanti alla parentesi c'è il – si cambiano i segni di tutti gli addendi che si trovano tra le parentesi
2. Sommare i monomi simili

Esempio B2.3:

$$\begin{aligned}
&(2a - 3b + c) - (a + 5b - 2c) + (5a - 3c) = \\
&= \underline{2a} \; \underline{\underline{-3b}} \; + c \; \underline{-a} \; \underline{\underline{-5b}} \; + 2c \; \underline{+5a} \; - 3c = \\
&= (2 - 1 + 5)a + (-3 - 5)b + (1 + 2 - 3)c = \\
&= 6a - 8b
\end{aligned}$$

Nel primo passaggio si sono levate le parentesi.
Nel secondo passaggio si sono sottolineati i monomi simili e li si è sommati tra di loro.
Nel terzo passaggio si è scritto il risultato
Si noti come la c non appare nel risultato poiché (1+2-3)c fa 0c ossia 0 e quindi la c non si scrive.

B2.3 Prodotto

- **Prodotto di un monomio per un polinomio**
  Si moltiplica il monomio per ogni termine del polinomio.

Esempio B2.4: $-2xy^2\left(3x - xy + 5x^2y^2\right) = -6x^2y^2 + 2x^2y^3 - 10x^3y^4$

Esempio B2.5: $\left(a - 3b + 2ab\right) \cdot 5a = 5a^2 - 15ab + 10a^2b$

Per ogni moltiplicazione ci si deve ricordare di scrivere prima il **segno**, poi il **numero** e poi le **lettere.**
Per determinare il segno si usa la regola dei segni, per determinare il coefficiente numerico si moltiplicano i numeri, per determinare gli esponenti delle lettere si sommano gli esponenti con cui ogni lettera appare.
Il monomio può trovarsi prima del polinomio (es. 1) o dopo il polinomio (es. 2). Il procedimento non cambia!

- **Prodotto di un polinomio per un polinomio**
  Si moltiplica ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo polinomio.
  E' importante andare in ordine per evitare di dimenticare qualche termine.
  Al termine del prodotto si devono sommare i termini simili.

Esempio B2.6:

$$\left(2a - b\right)\left(a - 5b + 2ab\right) =$$
$$= 2a^2 - 10ab + 4a^2b - ab + 5b^2 - 2ab^2 =$$
$$= 2a^2 - 11ab + 4a^2b + 5b^2 - 2ab^2$$

<u>Per andare in ordine si moltiplica così:</u>
il primo termine per il primo
il primo termine per il secondo
il primo termine per il terzo
il secondo termine per il primo
il secondo termine per il secondo
il secondo termine per il terzo

Esempio B2.7:

$$\left(a - b\right)\left(a^2 - 2ab - b^2\right) =$$
$$= a^3 - 2a^2b - ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$$

- **Prodotto di tre o più polinomi**
  Si moltiplicano due polinomi e si copia il resto,
  poi si moltiplica il risultato per l'altro polinomio.

PRODOTTO DI TRE POLINOMI

(………)(………)(………)=

=(………)(…………………..)=

=………………………………

Esempio B2.8:

$$\left(x + 2y\right)\left(x - 3y\right)\left(2x - 3\right) =$$
$$= \left(x + 2y\right)\left(2x^2 - 3x - 6xy + 9y\right) =$$
$$= 2x^3 - 3x^2 \underline{-6x^2y}\ \underline{\underline{+9xy}}\ \underline{+4x^2y}\ \underline{\underline{-6xy}} - 12xy^2 + 18y^2 =$$
$$= 2x^3 - 3x^2 - 2x^2y + 3xy - 12xy^2 + 18y^2$$

Se uno dei tre termini è un monomio il procedimento non cambia.

monomio(………)(………)=

=monomio(…………………..)=

=………………………………

Esempio B2.9:

$$3\left(x - y\right)\left(2 - xy\right) =$$
$$= 3\left(2x - x^2y - 2y + xy^2\right) =$$
$$= 6x - 3x^2y - 6y + 3xy^2$$

Se davanti a un prodotto di monomi c'è il segno meno SI DEVE:
- COPIARE IL SEGNO
- MOLTIPLICARE I DUE POLINOMI E SCRIVERE IL RISULTATO TRA PARENTESI
- CAMBIARE I SEGNI

- (………)(………)=
si copia il meno, si moltiplicano i polinomi e si mette il ris. tra parentesi
= - (…………………..)=
= si cambiano i segni

Esempio B2.10:

$$-(ax-b)(ax-3)=$$
$$=-(a^2x^2-3ax-abx+3b)=$$
$$=-a^2x^2+3ax+abx-3b$$

B2.4 Potenze

Per calcolare la potenza di un polinomio basta moltiplicare il polinomio per se stesso tante volte quanto è l'esponente.

Esempio B2.11:

$$(x+2y)^2=$$
$$=(x+2y)(x+2y)=$$
$$=x^2+\underline{2xy}+\underline{2xy}+4y^2=$$
$$=x^2+4xy+4y^2$$

Esempio B2.12:

$$(a-2)^3=$$
$$=(a-2)(a-2)(a-2)=$$
$$=(a^2-2a-2a+4)(a-2)=$$
$$=a^3\ \underline{-2a^2}\ \underline{-2a^2}\ \underline{\underline{+4a}}\ \underline{-2a^2}\ \underline{\underline{+4a}}\ \underline{\underline{+4a}}\ -8=$$
$$=a^3-6a^2+12a-8$$

Questo procedimento è particolarmente lungo.
Si immagini di calcolare $(a+b)^{18}$ scrivendo 18 volte (a+b)!
Per questa ragione sono state inventate alcune scorciatoie che si chiamano prodotti notevoli.

NOTA BENE: $\boxed{\begin{array}{l}(x+2y)^2 \text{ NON E', RIPETO NON E' } x^2+4y^2\\ (a-2)^3 \text{ NON E', RIPETO NON E' } a^3-8\end{array}}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **<u>GRAVE.</u>**

B2.5 Prodotti notevoli

- **Quadrato di un binomio**

Si consideri il significato delle parole. Binomio vuol dire un polinomio di due termini, come ad esempio (a+b).
Quadrato vuol dire che bisogna elevarlo alla seconda.

REGOLA: $\boxed{\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{array}}$

Si devono calcolare
1) il quadrato del primo termine
2) il doppio prodotto
3) il quadrato del secondo termine

I **QUADRATI** HANNO SEMPRE IL SEGNO **PIU'**.
IL **DOPPIO PRODOTTO** E' COMPOSTO DA TRE PARTI:
- IL <u>SEGNO</u> (si moltiplicano i segni dei due termini)
- IL <u>NUMERO</u> (si moltiplicano i due numeri tra loro e si moltiplica il risultato per due). Infatti doppio prodotto vuol dire moltiplicare tra di loro i due termini (prodotto) e poi moltiplicare per due (doppio)
- LE <u>LETTERE</u>

Esempio B2.13: $(3x+2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$ il primo termine è 3x, il secondo è 2y

1) il quadrato di 3x è $9x^2$
2) il doppio prodotto
   - SEGNO + per + è +
   - NUMERO 2 per 3 fa 6 e il doppio di 6 è 12

- LETTERE le lettere dei due termini sono x e y

Il doppio prodotto è quindi + 12 xy

3) il quadrato di 2y è $4y^2$

NOTA BENE: $\boxed{(3x+2y)^2 \text{ NON E', RIPETO NON E' } 9x^2+4y^2}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **GRAVE,** infatti manca il doppio prodotto.

Esempio B2.14: $\left(\frac{3}{2}a-2bc^2\right)^2=\frac{9}{4}a^2-6abc^2+4b^2c^4$ il primo termine è $\frac{3}{2}a$, il secondo è $-2bc^2$

1) il quadrato di $\frac{3}{2}a$ è $\frac{9}{4}a^2$

2) il doppio prodotto
- SEGNO + per - è -
- NUMERO $\frac{3}{2}$ per 2 fa 3 e il doppio di 3 è 6
- LETTERE le lettere dei due termini sono a e bc^2

Il doppio prodotto è quindi - 6 abc^2

3) il quadrato di $-2bc^2$ è $+4b^2c^4$

N. B.: $\boxed{\left(\frac{3}{2}a-2bc^2\right)^2 \text{ NON E', RIPETO NON E' } \frac{9}{4}a^2+4b^2c^4}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **GRAVE,** infatti manca il doppio prodotto.

Esempio B2.15: $\left(-\frac{1}{3}a^3-\frac{5}{4}ab\right)^2=\frac{1}{9}a^6+\frac{5}{6}a^4b+\frac{25}{16}a^2b^2$ il primo termine è $-\frac{1}{3}a^3$, il secondo è $-\frac{5}{4}ab$

1) il quadrato di $-\frac{1}{3}a^3$ è $+\frac{1}{9}a^6$

2) il doppio prodotto
- SEGNO - per - è +
- NUMERO moltiplico $\frac{1}{3}$ per $\frac{5}{4}$ per 2 $\rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot 2=\frac{5}{6}$
- LETTERE le lettere dei due termini sono a^3 e ab che moltiplicate danno a^4b

Il doppio prodotto è quindi $+\frac{5}{6}a^4b$

3) il quadrato di $-\frac{5}{4}ab$ è $+\frac{25}{16}a^2b^2$

N.B.: $\boxed{\left(-\frac{1}{3}a^3-\frac{5}{4}ab\right)^2 \text{ NON E', RIPETO NON E' } \frac{1}{9}a^6+\frac{25}{16}a^2b^2}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **GRAVE,** infatti manca il doppio prodotto.

- **Somma per differenza**

Quando si moltiplicano due binomi che sono uguali tranne che per un segno, è possibile usare la seguente scorciatoia

REGOLA: $\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

Si moltiplicano quindi soltanto il primo per il primo ed il secondo per il secondo, senza calcolare tutti i prodotti.
Il motivo per cui è permesso usare questa scorciatoia è il seguente:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Ci sono due termini che vanno via… tanto vale non scriverli!

Esempio B2.16: $(3a-2b)(3a+2b)=9a^2-4b^2$

Esempio B2.17: $\left(\frac{3}{2}a^3-1\right)\left(\frac{3}{2}a^3+1\right)=\frac{9}{4}a^6-1$

Esempio B2.18: $(-a+2b)(a+2b)=-a^2+4b^2$

Esempio B2.19: $(a^2-5b)(2a^2+5b)=2a^4\ \underline{+5a^2b}\ \underline{-10a^2b}-25b^2=2a^4-5a^2b-25b^2$

I due polinomi non hanno solo un segno diverso ma anche un coefficiente nuerico, quindi si devono svolgere tutti i calcoli.

Esempio B2.20: $(-x-3y)(x+3y)=-x^2\ \underline{-3xy}\ \underline{-3xy}\ -9y^2=-x^2-6xy-9y^2$

I due polinomi non hanno solo un segno diverso ma tutti e due, quindi si devono svolgere tutti i calcoli.

- **Quadrato di un trinomio**

Se si eleva un trinomio alla seconda si devono calcolare:

1. TRE QUADRATI a^2, b^2, c^2

2. TRE DOPPI PRODOTTI 2ab, 2ac, 2bc

REGOLA: $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$

Esempio B2.21: $(x+2y-3)^2 = x^2+4y^2+9+4xy-6x-12y$

I quadrati sono:	$x \to x^2$	$2y \to 4y^2$	$-3 \to 9$
I doppi prodotti sono	$x \cdot 2y \cdot 2 = 4y$	il primo per il secondo per due	
	$x \cdot -3 \cdot 2 = -6x$	il primo per il terzo per due	
	$2y \cdot -3 \cdot 2 = -12y$	il secondo per il terzo per due	

N. B. : $\boxed{(x+2y-3)^2 \text{ NON E', RIPETO NON E' } x^2+4y^2+9}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **GRAVE** perché mancano i doppi prodotti

- **Cubo di un binomio**

Se si eleva un binomio alla terza si devono calcolare quattro termini:
1. Il cubo del primo termine
2. Il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo
3. Il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo
4. Il cubo del secondo

REGOLA: $\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$

Esempio B2.22: $(a-2)^3 = a^3-6a^2+12a-8$ (E' lo stesso es. del B2.12 sulle potenze)

Il cubo del primo è	$a \to a^3$	
Il primo triplo prodotto è	$3 \cdot a^2 \cdot -2 = -6a^2$	tre per il primo alla seconda per il secondo
Il secondo triplo prodotto è	$3 \cdot a \cdot 4 = 12a$	tre per il primo per il secondo alla seconda
Il cubo del secondo	$-2 \to -8$	

N. B. : $\boxed{(a-2)^3 \text{ NON E', RIPETO NON E' } a^3-8}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **GRAVE** perché mancano i tripli prodotti.

Esempio B2.23: $\left(2a^2+\frac{2}{3}ab\right)^3 = 8a^6+8a^5b+\frac{8}{3}a^4b^2+\frac{8}{27}a^3b^3$

Il cubo del primo è	$2a^2 \to 8a^6$	
Il primo triplo prodotto è	$3 \cdot 4a^4 \cdot \frac{2}{3}ab = 8a^5b$	tre <u>per</u> il primo alla seconda <u>per</u> il secondo
Il secondo triplo prodotto è	$3 \cdot 2a^2 \cdot \frac{4}{9}a^2b^2 = \frac{8}{3}a^4b^2$	tre <u>per</u> il primo <u>per</u> il secondo alla seconda
Il cubo del secondo	$\frac{2}{3}ab \to \frac{8}{27}a^3b^3$	

N. B. : $\boxed{\left(2a^2+\frac{2}{3}ab\right)^3 \text{ NON E', RIPETO NON E' } 8a^6+\frac{8}{27}a^3b^3}$ E QUESTO E' UN ERRORE PARTICOLARMENTE **GRAVE** perché mancano i tripli prodotti.

- **Somma e differenza di cubi**

In un caso particolare il prodotto di un binomio per un trinomio si calcola in maniera particolarmente comoda.

REGOLA: $$\boxed{\begin{array}{l}(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3\end{array}}$$

Per utilizzare la scorciatoia il trinomio deve essere composto dai quadrati dei termini del binomio e dal prodotto dei termini del binomio cambiato di segno. In tal caso posso moltiplicare semplicemente il primo con il primo e l'ultimo con l'ultimo!

Infatti
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3 = a^3-b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = a^3-b^3$$

Esempio B2.24: $(x^2+3y)(x^4-3x^2y+9y^2) = x^6+27y^3$

In questo caso si può usare la regola in quanto il trinomio è composto da tre termini che sono rispettivamente il quadrato del primo, il prodotto del primo per il secondo cambiato di segno e il quadrato del secondo.
la scorciatoia mi permette di moltiplicare il primo con il primo e l'ultimo con l'ultimo.

Esempio B2.25: $\left(\frac{1}{2}a-2\right)\left(\frac{1}{4}a^2+a+4\right) = \frac{1}{8}a^3-8$

In questo caso posso usare la regola in quanto il trinomio è composto da tre termini che sono rispettivamente il quadrato del primo, il prodotto del primo per il secondo cambiato di segno e il quadrato del secondo.
La scorciatoia permette di moltiplicare il primo con il primo e l'ultimo con l'ultimo.

Esempio B2.26: $(a-2)(a^2+4a+4) = a^3+4a^2+4a-2a^2-8a-8 = a^3+2a^2-4a-8$

In questo caso non si può usare la regola in quanto il trinomio è composto da tre termini che sono:
il quadrato del primo, il **doppio** prodotto del primo per il secondo cambiato di segno
e il quadrato del secondo. Basta tale piccolissima differenza e non si può usare la scorciatoia!
Si devono quindi calcolare tutti i prodotti.

Potenza di un binomio

La regola che si spiega in questo paragrafo permette di calcolare (a+b) elevato a qualsiasi numero intero.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
....

SEGNI
$(+\ +)^{\text{qualunque esponente}} \rightarrow$ + + ... + + (tutti più)
$(+\ -)^{\text{qualunque esponente}} \rightarrow$ + - + - + ... (si parte con un più dall'inizio)
$(-\ +)^{\text{qualunque esponente}} \rightarrow$ ...... + - + - + (si parte con un più dalla fine)
$(-\ -)^{\text{pari}} \rightarrow$ + + ... + + (tutti più)
$(-\ -)^{\text{dispari}} \rightarrow$ - - ...... - - (tutti meno)

COEFFICIENTI
Si vede dallo schema precedente che i coefficienti seguono una regola detta "TRIANGOLO DI TARTAGLIA" dal matematico Nicolò Tartaglia (1500-1557).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Ogni riga si ottiene dalla precedente sommando i due numeri superiori.

LETTERE
Si parte dall'esponente più alto possibile per il primo monomio e si va a scalare.
Si parte dalla fine con l'esponente più alto possibile per il secondo monomio e si va a scalare.

Esempio B2.27: $(a-b)^6$
SEGNI + - + - + - +
COEFFICIENTI – si prendono quelli della corrispondente riga del triangolo di Tartaglia
+1 -6 +15 -20 +15 -6 +1
LETTERE – si parte dall'esponente più alto per a^6 e si scala; si parte dalla fine per l'esponente di b^6 e si scala.
$+1a^6$ $-6a^5b$ $+15a^4b^2$ $-20a^3b^3$ $+15a^2b^4$ $-6ab^5$ $+1b^6$

Quindi $(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$

Esempio B2.28: $(-2x+3y)^5$
Prima ci si deve ricavare la regola di $(-a+b)^5$
SEGNI - + - + - +
COEFFICIENTI – si prendono quelli della corrispondente riga del triangolo di Tartaglia
-1 +5 -10 +10 -5 +1
LETTERE – si parte dall'esponente più alto per a^6 e si scala; si parta dalla fine per l'esponente di b^6 e si scala.
$-1a^5$ $+5a^4b$ $-10a^3b^2$ $+10a^2b^3$ $-5ab^4$ $+1b^5$

Quindi $(-a+b)^5 = -a^5+5a^4b-10a^3b^2+10a^2b^3-5ab^4+b^5$

Ora al posto di a e b si mettono rispettivamente 2x e 3y:

$$(-2x+3y)^5 = -(2x)^5 + 5(2x)^4(3y) - 10(2x)^3(3y)^2 + 10(2x)^2(3y)^3 - 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5 =$$
$$= -32x^5 + 5(16x^4)(3y) - 10(8x^3)(9y^2) + 10(4x^2)(27y^3) - 5(2x)(81y^4) + 243y^5 =$$
$$= -32x^5 + 240x^4y - 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 - 810xy^4 + 243y^5$$

A questo punto si possono calcolare le **espressioni**.
Si ricorda che:
PRIMA SI CALCOLANO LE POTENZE,
POI SI CALCOLANO LE MOLTIPLICAZIONI E LE DIVISIONI,
ALLA FINE SI CALCOLANO LE SOMME E LE SOTTRAZIONI.

Se c'è un meno davanti a una potenza SI DEVE

- Svolgere la potenza e lasciare il risultato tra parentesi.
- Al passaggio dopo cambiare i segni.

- (………)^{potenza}=
si copia il meno, si calcola la potenza e
si mette il ris. tra parentesi
= - (…………………..)=
= si cambiano i segni

Se c'è un numero davanti a una potenza SI DEVE

- Svolgere la potenza e lasciare il risultato tra parentesi.
- Al passaggio dopo moltiplicare per il numero.

num (………)^{potenza}=
si copia il numero, si calcola la potenza e
si mette il ris. tra parentesi
= num (…………………..)=
= si moltiplica per il numero

Se c'è un prodotto di un polinomio per una potenza SI DEVE

- Copiare il polinomio, svolgere la potenza e lasciare il risultato tra parentesi
- Al passaggio dopo moltiplicare per il polinomio

(……) (………)^{potenza}=
copio il polinomio, calcolo la potenza e
metto il ris. tra parentesi
= (……) (…………………..)=
= moltiplico per il polinomio

TABELLA RIASSUNTIVA PRODOTTI NOTEVOLI

- Quadrato di un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Somma per differenza: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Quadrato di un trinomio: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- Cubo di un binomio: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- Somma e differenza di cubi: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$; $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

B2.6 Divisione tra polinomi

Divisione euclidea

La divisione tra i numeri interi è detta divisione euclidea.
Si consideri la divisione a:b.
a è detto **dividendo**, b è detto **divisore**.
Per trovare il risultato della divisione si suddivide a in gruppi formati da b elementi. Il numero dei gruppi formati è il risultato della divisione ed è detto **quoziente**.
Il numero di elementi che rimangono è detto **resto**.
E' possibile effettuare la divisione se il divisore è diverso da zero.

<u>Teorema (divisione euclidea)</u>
Dati due numeri interi a e b, con $b \neq 0$, esiste un'unica coppia di interi q ed r tale che:

$$\mathbf{a=b \cdot q+r}$$

con $0 \leq r < |b|$. $|b|$ è il valore assoluto del divisore.
Si dice in tal caso che a diviso b ha quoziente q con il resto di r.

Se il resto è zero allora si dice che a è divisibile per b.

Esempio B2.29: si effettui la divisione intera 17:5.

> Si cercano due numeri q ed r tali che $17=5 \cdot q+r$ con $0 \leq r < |5|$, ossia $0 \leq r < 5$.
> I numeri sono q=3 e r=2. Infatti $17=5 \cdot 3+2$.
> Si noti che anche q=2 e r=7 soddisfano la regola $a=b \cdot q+r$, infatti $17=5 \cdot 2+7$. Non soddisfano però la condizione $0 \leq r < |b|$ in quanto è falso che $0 \leq 7 < 5$. L'unica coppia di numeri è dunque q=3 e r=2.

Esempio B2.30: si effettui la divisione intera 13:-4.

> Si cercano due numeri q ed r tali che $13=-4 \cdot q+r$ con $0 \leq r < |-4|$, ossia $0 \leq r < 4$.
> I numeri sono q=-3 e r=1. Infatti $13=-4 \cdot -3+1$.

Il precedente teorema è talvolta utilizzato e definito come verifica della divisione euclidea, mentre la divisione euclidea viene definita in maniera differente. Il precedente teorema NON E' la verifica della divisione euclidea ma ne è la definizione.

Divisione tra polinomi

In maniera analoga alla divisione euclidea tra numeri interi è possibile definire la divisione tra polinomi.

<u>Teorema (divisione di polinomi)</u>
Dati due polinomi A(x) e B(x), con B non nullo, esiste un'unica coppia di polinomi Q(x) ed R(x) tale che:

$$\mathbf{A(x)=B(x) \cdot Q(x)+R(x)}$$

con il grado di R(x) minore del grado di B(x).
A(x) è detto dividendo, B(x) è detto divisore, Q(x) è detto quoziente e R(x) è detto resto della divisione tra polinomi.

Se il resto R(x)=0 allora si dice che il polinomio A(x) è divisibile per B(x).

Per trovare i polinomi Q(x) e R(x) si effettua la divisione tra A(x) e B(x) in maniera analoga a quella tra numeri interi.
Il procedimento verrà spiegato in dettaglio negli esempi seguenti.

Esempio B2.31: si effettui la divisione tra polinomi A(x):B(x) con $A(x)=3x^4-2x^3+x-5$ e $B(x)=x^2-2x+2$.

Si cerca un monomio che, moltiplicato per x^2, dia risultato $3x^4$. Il monomio è $3x^2$. Si moltiplica tale monomio per ogni termine del divisore e si scrive il risultato ordinatamente sotto il dividendo.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-2x^3+\quad\ +x-5 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} 3x^4-6x^3+6x^2 & 3x^2 \end{array}$$

Ora si sottraggono i termini simili.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-2x^3+\quad\ +x-5 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} 3x^4-6x^3+6x^2 & 3x^2 \\ \hline 0+4x^3-6x^2+x-5 & \end{array}$$

Si cerca un monomio che, moltiplicato per x^2, dia risultato $4x^3$. Il monomio è $4x$. Si moltiplica tale monomio per ogni termine del divisore e si scrive il risultato ordinatamente sotto il risultato della sottrazione precedente.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-2x^3+\quad\ +x-5 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} 3x^4-6x^3+6x^2 & 3x^2+4x \\ \hline 0+4x^3-6x^2+x-5 & \\ \quad 4x^3-8x^2+8x & \end{array}$$

Ora si sottraggono i termini simili.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-2x^3+\quad\ +x-5 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} 3x^4-6x^3+6x^2 & 3x^2+4x+2 \\ \hline 0+4x^3-6x^2+x-5 & \\ \quad 4x^3-8x^2+8x & \\ \cline{1-1} \quad 0\ +2x^2-7x-5 & \end{array}$$

Si cerca un monomio che, moltiplicato per x^2, dia risultato $2x^2$. Il monomio è 2. Si moltiplica tale monomio per ogni termine del divisore e si scrive il risultato ordinatamente sotto il risultato della sottrazione precedente. Si effettua poi la sottrazione.

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-2x^3+\quad\ +x-5 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} 3x^4-6x^3+6x^2 & 3x^2+4x+2 \\ \hline 0+4x^3-6x^2+x-5 & \\ \quad 4x^3-8x^2+8x & \\ \cline{1-1} \quad 0\ +2x^2-7x-5 & \\ \qquad\quad 2x^2-4x+4 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0\ -3x-9 & \end{array}$$

A questo punto ci si ferma perché il grado del resto R(x) è minore del grado del divisore B(x).
Il quoziente è $Q(x)= 3x^2+4x+2$. Il resto è $R(x)= -3x -9$.
I polinomi cercati sono proprio questi due poiché soddisfano $A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$, come è mostrato di seguito.
$B(x)\cdot Q(x)+R(x)= (x^2-2x+2)(3x^2+4x+2)+(-3x -9)=$
$=3x^4+4x^3+2x^2-6x^3-8x^2-4x+6x^2+8x+4-3x-9=$
$=3x^4-2x^3+x-5=A(x)$.

Esempio B2.32: si effettui la divisione tra polinomi A(x):B(x) con $A(x)=3x-1$ e $B(x)=x^3-2x+2$.

Se il grado del divisore è maggiore del grado del dividendo allora il quoziente Q(x) è zero e il resto R(x) è uguale al divisore A(x).
Vale infatti $A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$, come è mostrato di seguito.
$B(x)\cdot Q(x)+R(x)= (x^3-2x+2)(0)+(3x-1)=3x-1=A(x)$. In questi casi non è necessario effettuare la divisione come mostrato nell'esempio precedente.

Esempio B2.33: si effettui la divisione tra polinomi A(x):B(x) con $A(x)=x^3+x^2-ax+1$ e $B(x)=x-1$ e si dica per quali valori di a il polinomio A(x) è divisibile per B(x).

A(x) è divisibile per B(x) se il resto della divisione è zero. Si effettua la divisione e si pone il resto uguale a zero.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 \quad +x^2 \quad -ax \quad +1 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^3 \quad -x^2 & x^2+2x-a+2 \\ \cline{1-1}
0 \quad +2x^2 \quad -ax \quad +1 & \\
\quad 2x^2 \quad -2x & \\ \cline{1-1}
\quad 0 \quad (-a+2)x+1 & \\
\quad \quad (-a+2)x \ +a-2 & \\ \cline{1-1}
\quad \quad \quad 0 \qquad -a+3 &
\end{array}$$

Il quoziente è $Q(x)= x^2+2x-a+2$ e il resto è $R(x)=-a+3$. Il resto vale zero se $R(x)=0$, ossia $-a+3=0$, da cui segue $a=3$.
Il polinomio A(x) con a=3 diventa $A(x)= x^3+x^2-3x+1$; analogamente $Q(x)=x^2+2x-3+2=x^2+2x-1$.
Per verificare che effettivamente A(x) è divisibile per B(x) si può moltiplicare B(x) per Q(x) e controllare che il risultato sia A(x).
$B(x)\cdot Q(x)=(x-1)\cdot(x^2+2x-1)=x^3+2x^2-x-x^2-2x+1=x^3+x^2-3x+1=A(x)$.