B.10 Disequazioni

B10.1 Introduzione

Le disequazioni sono il prerequisito essenziale per lo studio dell'analisi matematica.
Nella risoluzione dei problemi di analisi si fa largo uso di disequazioni dando per scontato che l'allievo le sappia risolvere. E' quindi essenziale che, prima di iniziare il programma di analisi, lo studente ripassi le disequazioni; il presente capitolo può essere anche utilizzato come ripasso prima di affrontare lo studio dell'analisi matematica.

Risolvere una disequazione significa determinare tutti i valori della x per cui una certa proposizione è verificata.

Esempio B10.1

Si risolva la disequazione di primo grado:

$$x-2>0$$

Si vogliono determinare i valori della x che rendano vera la proposizione.
Il numero 3 è una soluzione in quanto 3-2 è maggiore di zero.
Il numero 1 non è una soluzione, in quanto 1-2 vale –1 e non è maggiore di zero.
Anche 4, 10, 11 sono soluzioni della disequazione. Le soluzioni sono infinite. Non essendo possibile elencarle tutte si deve trovare un modo sintetico di indicarle.
Portando il –2 a secondo membro e cambiandolo di segno si ottiene:

$$x>2$$

Queste sono tutte le possibili soluzioni, ossia tutti i numeri maggiori di 2. Se si sostituisce al posto della x un qualunque numero maggiore di 2 la disequazione $x-2>0$ è verificate. Se si sostituisce al posto della x un qualunque numero minore di 2, oppure proprio il 2, allora la disequazione $x-2>0$ non è verificata.

A seconda del grado della disequazione sarà necessario utilizzare metodi diversi.

B10.2 Disequazioni di primo grado

Le disequazioni di primo grado (o lineari), si risolvono in maniera analoga alle equazioni di primo grado. Il fatto che al posto del simbolo di uguaglianza (=) ci sia uno dei seguenti simboli: <, >, ≤, ≥ non influisce "quasi" per niente nello svolgimento degli esercizi. In realtà **c'è una piccola differenza** di cui si deve tenere conto.

PROCEDIMENTO:

- Si svolgono i calcoli.
- Si portano i termini con la x a primo membro e i termini senza la x a secondo membro.
- Si sommano i termini simili.
- **Se davanti alla x c'è un numero negativo si cambiano i segni e si gira il verso.**
- Si dividono ambo i membri per il numero davanti alla x.

QUESTA E' L'UNICA DIFFERENZA DALLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO.

E' un procedimento talmente simile a quello per risolvere le equazioni di primo grado che ci si dimentica troppo spesso di questa <u>unica piccola differenza</u>: quindi attenzione!!

Esempio B10.2:

$$(2x-1)^2 < (2x+3)(2x-3)$$
$$4x^2 + 1 - 4x < 4x^2 - 9$$
$$4x^2 - 4x^2 - 4x < -1 - 9$$
$$-4x < -10$$
$$4x > 10$$
$$x > \frac{10}{4} \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

Esempio B10.3:

$$\frac{x-3}{2}+\frac{1-2x}{4}-1 \le \frac{x}{6}$$
$$\frac{6(x-3)+3(1-2x)-1(12)}{12} \le \frac{2x}{12}$$
$$6x-18+3-6x-12 \le 2x$$
$$6x-6x-2x \le 18-3+12$$
$$-2x \le 27$$
$$2x \ge -27$$
$$x \ge \frac{-27}{2}$$

SE IL DENOMINATORE FOSSE STATO NEGATIVO PER LEVARLO Si SAREBBE DOVUTO GIRARE IL VERSO.

SE AL DENOMINATORE CI FOSSE STATA LA x NON AVREI POTUTO TOGLIERLO!!!
(Vedi il procedimento per le disequazioni fratte al paragrafo B10.5).

<u>CASO PARTICOLARE: Il termine con la x scompare.</u>

Resta da trattare il caso in cui sommando i termini simili la x va via e a primo membro resta zero. In questo caso a primo membro c'è lo zero ed a secondo membro un qualsiasi numero.

Si hanno due possibilità:
La disequazione che ne risulta è vera (ad esempio $0<3$, $0 \ge -3$ oppure $0 \ge 0$). In tal caso tutti i valori della x sono soluzioni. (Si scrive "$\forall x \in \mathbb{R}$" o "sempre verificata"). Il simbolo $\forall$ si legge "qualsiasi. Il simbolo $\in$ si legge "appartiene". $\mathbb{R}$ rappresenta tutti i numeri reali, ossia tutti i numeri dell'asse x.
La disequazione che ne risulta è falsa (ad esempio $0 \le -5$, $0>2$ oppure $0>0$). In tal caso nessun valore della x è soluzione. (Si dice che l'equazione è "impossibile" o "mai verificata").

Esempio B10.4
$$(2x+3)(x-2) \le (2x-1)^2 + x(3-2x)$$
$$2x^2-4x+3x-6 \le 4x^2-4x+1+3x-2x^2$$
$$2x^2-4x+3x-4x^2+4x-3x+2x^2 \le 6+1$$
$$0 \le 7$$
La disequazione risultante è sempre vera, in quanto 0 è effettivamente minore di 7. Sono soluzioni tutti i numeri reali. Si scrive $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio B10.5
$$(x-2)(x+2) > x^2+2$$
$$x^2-4 > x^2+2$$
$$x^2-x^2 > 4+2$$
$$0 > 6$$
La disequazione risultante è sempre falsa, in quanto 0 non è maggiore di 6. Non ci sono soluzioni dunque la disequazione è impossibile.

<u>B10.3 Disequazioni di secondo grado</u>

Prima di risolvere una disequazione di secondo grado bisogna portarla a forma normale.
Per forma normale si intende che tutti i suoi termini sono a primo membro e sono stati sommati i termini simili.
La disequazione di secondo grado in forma normale ha quindi la forma:

$$\boxed{\mathbf{ax^2+bx+c......0}}$$

Al posto dei puntini ci può essere uno qualunque dei simboli di disuguaglianza, ossia $<$, $>$, $\le$, $\ge$.

Nella risoluzione si utilizzerà la seguente notazione:
- Le linee continue indicano che negli intervalli indicati il polinomio è positivo.
- Le linee tratteggiate indicano che negli intervalli indicati il polinomio è negativo.
- I puntini indicano che nei punti indicati il polinomio vale zero.

Si tenga presente che alcuni libri utilizzano notazioni differenti (con i segni più e meno, pallini pieni e pallini vuoti). Un esercizio svolto correttamente lo è a prescindere dalla notazione, si tenga comunque presente che la notazione utilizzata non è uniforme in tutti i libri di testo.

Il polinomio ax^2+bx+c può essere graficamente rappresentato come una parabola.
Lo 0 a secondo membro rappresenta graficamente l'asse delle x (y=0).
Chiedersi se tale polinomio è $<$, $>$, $\le$, $\ge$ a zero equivale a chiedersi in quali zone la parabola si trova sopra o sotto l'asse delle x.
Per risolvere la disequazione si devono quindi disegnare la parabola e l'asse delle x e infine scrivere le soluzioni.

PROCEDIMENTO:

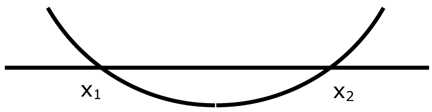
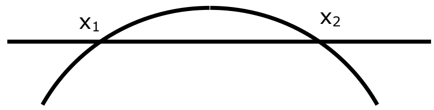
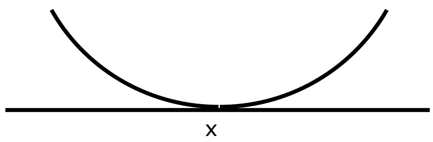
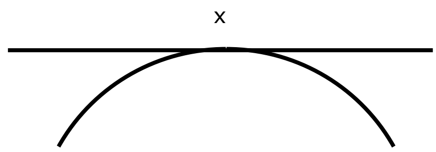
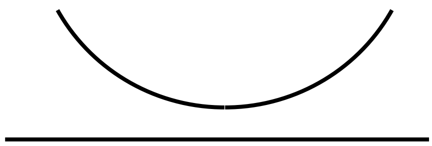
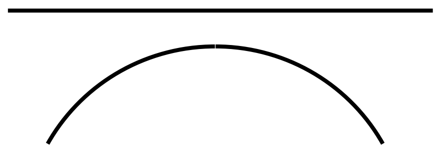
1) Si risolve l'equazione associata $ax^2+bx+c=0$.
Si trovano le soluzioni dell'equazione associata, che possono essere due, una o nessuna.

Le soluzioni $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sono i punti in cui la parabola incontra l'asse delle x.

Se $\Delta>0$ la parabola incontra l'asse delle x in due punti.
Se $\Delta=0$ la parabola incontra l'asse delle x in un punto.
Se $\Delta<0$ la parabola non incontra l'asse delle x.

2) Si disegnano la parabola e l'asse delle x.
Se a>0 la parabola è rivolta verso l'alto.
Se a<0 la parabola è rivolta verso il basso.

I casi possibili sono sei, a seconda del segno di a e del numero di soluzioni:

<table>
<tr><th></th><th>a>0</th><th>a<0</th></tr>
<tr><td>Δ>0
2 sol.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Δ=0
1 sol.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Δ<0
0 sol.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

3) Si cerca cosa è richiesto nella disequazione di partenza (<0, ≤0, ≥0, >0).

CASO 1: Se la disequazione di partenza era $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ sono soluzioni gli intervalli in cui la parabola si trova sotto l'asse delle x.
CASO 2: Se la disequazione di partenza era $\mathbf{ax^2+bx+c \le 0}$ sono soluzioni gli intervalli in cui la parabola si trova sotto l'asse delle x o lo tocca.
CASO 3: Se la disequazione di partenza era $\mathbf{ax^2+bx+c \ge 0}$ sono soluzioni gli intervalli in cui la parabola si trova sopra l'asse delle x o lo tocca
CASO 4: Se la disequazione di partenza era $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ sono soluzioni gli intervalli in cui la parabola si trova sopra l'asse delle x

Ecco ora alcuni esempi svolti:

Esempio B10.6: $x^2+x+1>0$
$\Delta=-3<0$, $a=1>0$.
L'equazione associata non ha soluzioni.
La parabola è rivolta verso l'alto e non incontra l'asse delle x.

E' richiesto che il polinomio di partenza sia maggiore di zero, ossia che la parabola sia sopra l'asse delle x.
La parabola è dappertutto sopra l'asse delle x e quindi il risultato è $\forall x \in \mathbb{R}$.

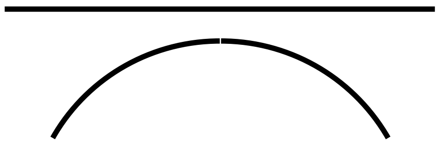
La linea qui sotto rappresenta la parabola sopra l'asse delle x. La linea è tutta continua (ossia positiva) perché la parabola si trova sopra l'asse delle x.

Esempio B10.7: $-2x^2+3x-4 \geq 0$

$\Delta=-23<0$, $a=-2>0$

L'equazione associata non ha soluzioni.

La parabola è rivolta verso il basso e non incontra l'asse delle x.



E' richiesto che il polinomio di partenza sia maggiore o ugale a zero, ossia che la parabola sia sopra l'asse delle x o lo tocchi.
La parabola è sempre sotto l'asse delle x e quindi la disequazione è impossibile.

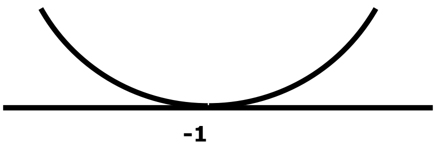
La linea qui sotto rappresenta la parabola sotto l'asse delle x. La linea è tutta tratteggiata (ossia negativa) perché la parabola si trova sotto l'asse delle x.

Esempio B10.8: $x^2+2x+1>0$

$\Delta=0$, $a=1>0$

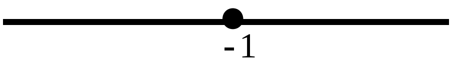
Risolvendo l'equazione associata si trova l'unica soluzione $x_1=-1$.

La parabola è rivolta verso l'alto ed incontra l'asse delle x solo nel punto $x_1=-1$.



E' richiesto che il polinomio di partenza sia maggiore di zero, ossia che la parabola si trovi sopra l'asse delle x. La parabola è dappertutto sopra l'asse x tranne che per x=-1. Il risultato è quindi $x \neq -1$.

La linea del segno di x^2+2x+1 è:



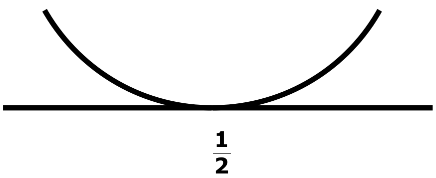
La linea continua rappresenta le zone in cui la parabola si trova sopra l'asse delle x. Il pallino rappresenta il punto in cui parabola e asse x si incontrano.

Esempio B10.9: $4x^2-4x+1 \leq 0$

$\Delta=0$, $a=4>0$

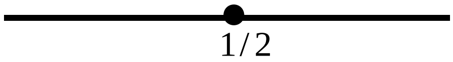
Risolvendo l'equazione associata si trova che $x_1=\frac{1}{2}$.

La parabola è rivolta verso l'alto ed incontra l'asse delle x solo nel punto $x_1=\frac{1}{2}$.



E' richiesto che il polinomio di partenza sia minore o uguale a zero, ossia che la parabola si trovi sotto l'asse delle x o lo tocchi. La parabola non è mai sotto l'asse delle x però tocca l'asse delle x per x=-1. Il risultato è quindi x=-1.

La linea del segno di $4x^2-4x+1$ è:



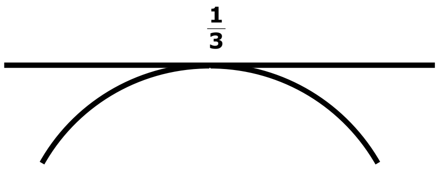
La linea continua rappresenta le zone in cui la parabola si trova sopra l'asse delle x. Il pallino rappresenta il punto in cui parabola e asse x si incontrano.

Esempio B10.10: $-9x^2+6x-1>0$

$\Delta=0$, $a=-9<0$

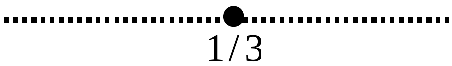
Risolvendo l'equazione associata si trova $x_1=\frac{1}{3}$.

La parabola è rivolta vero il basso ed incontra l'asse delle x solo nel punto $x_1=\frac{1}{3}$.



E' richiesto che il polinomio di partenza sia maggiore di zero, ossia che la parabola si trovi sopra l'asse delle x. La parabola non è mai sopra l'asse delle x quindi la disequazione è impossibile.

La linea del segno di $-9x^2+6x-1$ è:



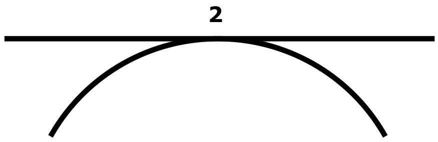
La linea tratteggiata rappresenta gli intervalli in cui la parabola si trova sotto l'asse delle x. Il pallino rappresenta il punto in cui parabola e asse x si incontrano.

Esempio B10.11: $-x^2+4x-4\leq 0$

$\Delta=0$, $a=-1<0$

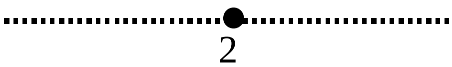
Risolvendo l'equazione associata si trova $x_1=2$.

La parabola è rivolta verso il basso ed incontra l'asse delle x solo nel punto $x_1=2$.



E' richiesto che il polinomio di partenza sia minore o uguale a zero, ossia che la parabola sia sotto l'asse delle x o lo tocchi. Ciò avviene per ogni valore della x perché la parabola è sempre sotto o tocca l'asse delle x (nel punto 2). La soluzione è $\forall x \in \mathbb{R}$.

La linea del segno di $-x^2+4x-4$ è:



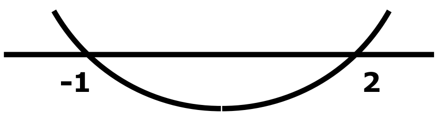
La linea tratteggiata rappresenta gli intervalli in cui la parabola si trova sotto l'asse delle x. Il pallino rappresenta il punto in cui parabola e asse x si incontrano.

Esempio B10.12: $x^2-x-2>0$

$\Delta=9>0$, $a=1>0$

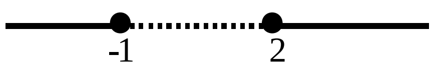
Risolvendo l'equazione associata si trovano le soluzioni $x_1=-1$ e $x_2=2$.

La parabola è rivolta verso l'alto ed incontra l'asse delle x nei due punti $x_1=-1$ e $x_2=2$



E' richiesto che il polinomio di partenza sia maggiore di zero, ossia che la parabola si trovi sopra l'asse delle x. Ciò avviene per i valori della x minori di –1 e maggiori di 2. La soluzione è $x<-1$ e $x>2$.

La linea del segno di x^2-x-2 è:



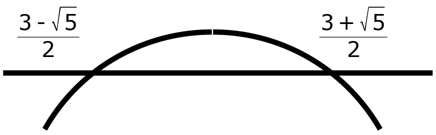
La linea tratteggiata rappresenta gli intervalli in cui la parabola si trova sotto l'asse delle x, la linea continua rappresenta gli intervalli in cui la parabola si trova sopra l'asse delle x, i pallini rappresentano gli intervalli in cui la parabola e l'asse delle x si incontrano.

Esempio B10.13: $-x^2+3x-1\geq 0$

$\Delta=5>0$, $a=-1<0$

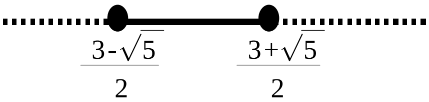
Risolvendo l'equazione associata si trovano le soluzioni $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

La parabola è rivolta verso il basso ed incontra l'asse delle x nei due punti $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$



E' richiesto che il polinomio di partenza sia maggiore o uguale a zero, ossia che la parabola si trovi sopra l'asse delle x o lo tocchi. Ciò avviene per i valori compresi tra x_1 e x_2. La soluzione è $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

La linea del segno di $-x^2+3x-1$ è:



La linea tratteggiata rappresenta gli intervalli in cui la parabola si trova sotto l'asse delle x, la linea continua rappresenta gli intervalli in cui la parabola si trova sopra l'asse delle x, i pallini rappresentano gli intervalli in cui la parabola e l'asse delle x si incontrano.

Nell'esempio B10.12 nella disequazione di partenza ($x^2-x-2>0$) non era richiesto che il trinomio fosse uguale a zero, pertanto nella soluzione non è stato messo l'uguale ($x<-1$ e $x>2$).
Nell'esempio B10.13 nella disequazione di partenza ($-x^2+3x-1\geq 0$) era richiesto che il trinomio fosse anche uguale a zero, pertanto nella soluzione è stato messo anche l'uguale $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

18.4 Disequazioni di grado superiore al secondo

Prima di risolvere una disequazione di grado superiore al secondo bisogna portarla in forma normale.
Per forma normale si intende che si deve portare tutto a primo membro, svolgere i calcoli e sommare i termini simili.
La disequazione di grado superiore al secondo avrà quindi la forma:

$$\boxed{p(x)......0}$$

in cui p(x) è un polinomio di grado superiore al secondo.
Al posto dei puntini ci può essere uno qualunque dei simboli di disuguaglianza, ossia $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Tale simbolo si utilizza solo al passo 5.

Nella risoluzione si utilizza la seguente notazione:

Le linee continue indicano che negli intervalli indicati il polinomio è positivo.
Le linee tratteggiate indicano che negli intervalli indicati il polinomio è negativo.
I puntini indicano che nei punti indicati il polinomio vale zero.

Quando si risolveranno le disequazioni fratte ci saranno, oltre ai pallini, anche le crocette; esse indicheranno che il polinomio al denominatore vale zero.

<u>PROCEDIMENTO</u> per la risoluzione di disequazioni di grado sup. al secondo.

1) Si scompone in fattori il polinomio p(x) in termini di primo o secondo grado.
Per scomporre in fattori si possono usare tutti i metodi studiati in prima o seconda superiore ossia:
- raccoglimento totale o parziale.
- prodotti notevoli.
- trinomio di secondo grado.
- regola di Ruffini.

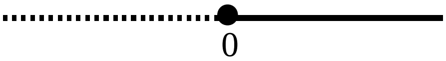
Si dà per scontato che tali metodi siano conosciuti e utilizzati senza difficoltà.
Al termine di questo passo p(x) è scomposto in fattori di primo o secondo grado e ora ci occupiamo di questi fattori.

2) Si pongono i singoli fattori maggiori o uguali a zero e si risolvono tali disequazioni.
Si noti che qualunque simbolo di disuguaglianza ci fosse stato nella disequazione di partenza si pongono comunque i singoli fattori maggiori o uguali a zero!

3) Si traccia una riga per ogni fattore.
Ecco qui l'elenco di tutti i casi possibili:
CASO 1: <u>Il fattore è un numero positivo</u> (ad esempio 5); si risolve $5\geq 0$ che è sempre vero. Si traccia una linea tutta positiva:

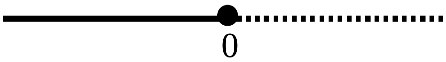
CASO 2: Il fattore è un numero negativo (ad esempio -5); si risolve $-5 \geq 0$ che è sempre falso. Si traccia una linea tutta negativa:

CASO 3: Il fattore è x; si ha $x \geq 0$ e si traccia una linea siffatta:



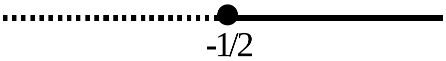
CASO 4: Il fattore è ax con a positivo (es. 2x). Si ha $2x \geq 0$ da cui $x \geq 0$ e la linea è uguale a quella del caso 3.

CASO 5: Il fattore è –x; si ha $-x \geq 0$ da cui $x \leq 0$ e si traccia una linea siffatta:

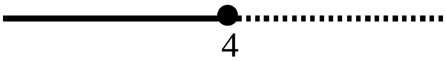


CASO 6: Il fattore è ax con a negativo (es.-2x). Si ha $-2x \geq 0$ da cui $x \leq 0$ e la linea è uguale a quella del caso 5.

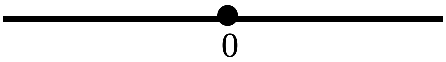
CASO 7: Il fattore è ax+b con a positivo. (es. 2x+1). Si risolve $2x+1 \geq 0$ e si trova $x \geq -\frac{1}{2}$. La linea è:



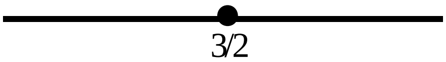
CASO 8: Il fattore è ax+b con a negativo. (es. -3x+12). Si risolve $-3x+12 \geq 0$ e si trova $x \leq 4$. La linea è:



CASO 9: Il fattore è x^2. Si ha una linea tutta positiva con un pallino sullo zero.



CASO 10: Il fattore è $(ax+b)^{pari}$ (ad es. $(2x-3)^4$). Si ha una linea tutta positiva con un pallino sul valore che annulla il fattore. Quindi il pallino in questo caso va su $\frac{3}{2}$.



CASO 11: Il fattore è $(ax+b)^{dispari}$(ad es. $(-3x+1)^5$). NON CI SI INTERESSA DELL'ESPONENTE e si risolve $-3x+1 \geq 0$. La linea si traccia come nel caso 7 o 8 a seconda del fatto che a sia positivo o negativo.

CASO 12: Il fattore è di secondo grado e non si scompone. Se $a>0$ la linea è tutta continua.

CASO 13: Il fattore è di secondo grado e non si scompone. Se $a<0$ la linea è tutta tratteggiata.

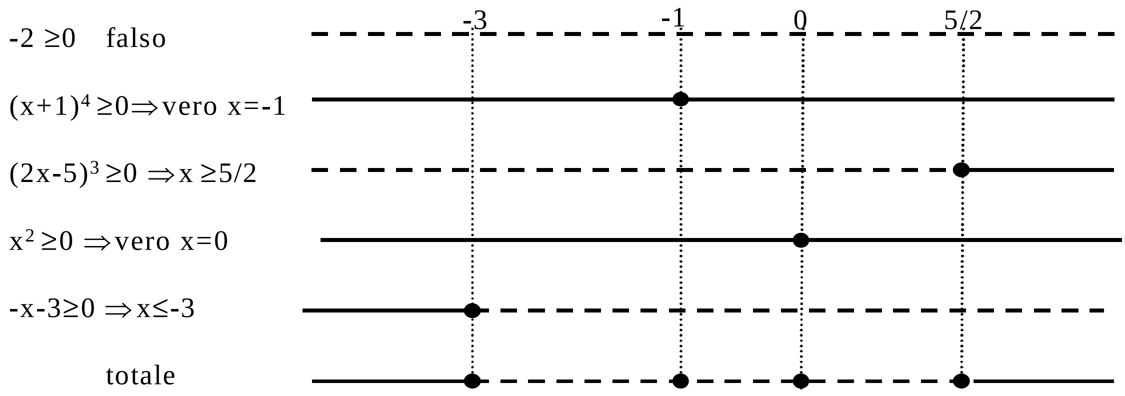
CASO 14: Il fattore è zero. In questo caso si ha $0 \geq 0$. Si traccia una linea tutta di pallini.

4) Si calcola la linea del totale.
Per calcolare la linea del totale si moltiplicano i segni considerando le linee tratteggiate come dei meno e le linee continue come dei più.

Esempio B10.14

Dopo aver scomposto in fattori si ottiene la seguente disequazione: $-2(x+1)^4(2x-5)^3x^2(-x-3)...0$, in cui al posto dei puntini c'è uno dei 4 simboli di disuguaglianza.
Ci sono 5 fattori quindi si devono tracciare 5 righe più quella del totale.

1° fattore $-2 \geq 0$ sempre falso $\Rightarrow$ linea tutta negativa.
2° fattore $(x+1)^4 \geq 0$ sempre positivo tranne che per $x=-1$ dove si metterà il pallino.
3° fattore $(2x-5)^3 \geq 0$ ci si disinteressa dell'esponente dispari e si risolve $2x-5 \geq 0$. $x \geq \frac{5}{2}$.
4° fattore $x^2 \geq 0$ dà una linea tutta positiva con il pallino in zero.
5° fattore $-x-3 \geq 0 \Rightarrow -x \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$



5) Si scrivono le soluzioni vedendo cosa era richiesto nell'equazione di partenza

Esattamente come per le disequazioni di secondo grado si vede quale simbolo di disuguaglianza si trova tra p(x) e zero.

CASO 1: Se la disequazione di partenza era **p(x)<0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea tratteggiata.
CASO 2: Se la disequazione di partenza era **p(x) ≤ 0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea tratteggiata o i pallini.
CASO 3: Se la disequazione di partenza era **p(x) ≥ 0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea continua o i pallini.
CASO 4: Se la disequazione di partenza era **p(x)>0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea continua.

CASO 1: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo < la disequazione

$-2(x+1)^4(2x-5)^3x^2(-x-3)<0$ avrebbe avuto soluzione $-3<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<\frac{5}{2}$

CASO 2: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo ≤la disequazione

$-2(x+1)^4(2x-5)^3x^2(-x-3)\leq 0$ avrebbe avuto soluzione $-3\leq x\leq \frac{5}{2}$

CASO 3: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo ≥ la disequazione

$-2(x+1)^4(2x-5)^3x^2(-x-3)\geq 0$ avrebbe avuto soluzione $x\leq -3$, $x=-1$, $x=0$, $x\geq \frac{5}{2}$

CASO 4: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo > la disequazione

$-2(x+1)^4(2x-5)^3x^2(-x-3)>0$ avrebbe avuto soluzione $x<-3$, $x>\frac{5}{2}$

18.5 Disequazioni fratte

Anche le disequazioni fratte vanno portate in forma normale prima di essere risolte. La forma normale è:

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)}\ldots 0}$$

in cui N(x) e D(x) sono due polinomi.
Per ottenere la forma normale si deve portare tutto a primo membro, mettere tutto a denominatore comune e svolgere i calcoli, in modo da ottenere un polinomio al numeratore ed uno al denominatore.
Ci sono due operazioni abitualmente permesse nella risoluzione delle equazioni che non sono permesse nella risoluzione delle disequazioni, ossia:

E' VIETATO: **a) Levare il denominatore** dopo aver messo tutto a denominatore comune.
b) Semplificare qualunque fattore comune a numeratore e denominatore.

Sotto opportune condizioni potrebbe essere permesso semplificare o levare il denominatore ma per non rischiare di commettere errori non si levi il denominatore e non si semplifichi. Se si decide comunque di semplificare si deve calcolare il C.E. come visto nella risoluzione delle equazioni e escludere tali valori dalle soluzioni. Se il denominatore è sempre positivo è permesso toglierlo (ad esempio x^2+1 al denominatore può essere tolto perché è sempre positivo).

<u>PROCEDIMENTO</u> per la risoluzione di disequazioni fratte.

Il procedimento è quasi uguale al precedente.

1) Si scompongono in fattori i polinomi N(x) e D(x) in termini di primo o secondo grado.
Al termine di questo passo N(x) e D(x) sono scomposti in fattori di primo o secondo grado e ora ci si occupa di questi fattori.

2) Si pongono i singoli fattori di N(x) ≥0 e quelli di D(x)>0 e si risolvono tali disequazioni.
Si noti che qualunque simbolo di disuguaglianza si trovasse nella disequazione di partenza si pongono comunque i singoli fattori maggiori o uguali a zero (per il numeratore) o maggiori di zero (per il denominatore). La differenza tra numeratore e denominatore sta nel simbolo da utilizzare, ossia ≥ per il numeratore e > per il denominatore.

3) Si traccia una riga per ogni fattore.
L'unica differenza dalle equazioni di grado superiore al secondo è che per i fattori del denominatore non va messo il pallino ma una crocetta.

ATTENZIONE: PER I FATTORI AL DENOMINATORE NON VA IL PALLINO MA LA CROCETTA.
Il significato del pallino è che il numeratore (e quindi la frazione) è uguale a zero.
Il significato della crocetta è che il denominatore è uguale a zero, quindi la frazione perde di significato.

4) Si calcola la linea del totale.
Per calcolare la linea del totale si moltiplicano i segni considerando le linee tratteggiate come dei meno e le linee continue come dei più.
Se sulla stessa verticale ci sono sia pallini che crocette si mette la crocetta, anche se ci sono duecento pallini ed una sola crocetta. Se infatti il denominatore è uguale a zero perde di significato la frazione a prescindere dal valore del numeratore.

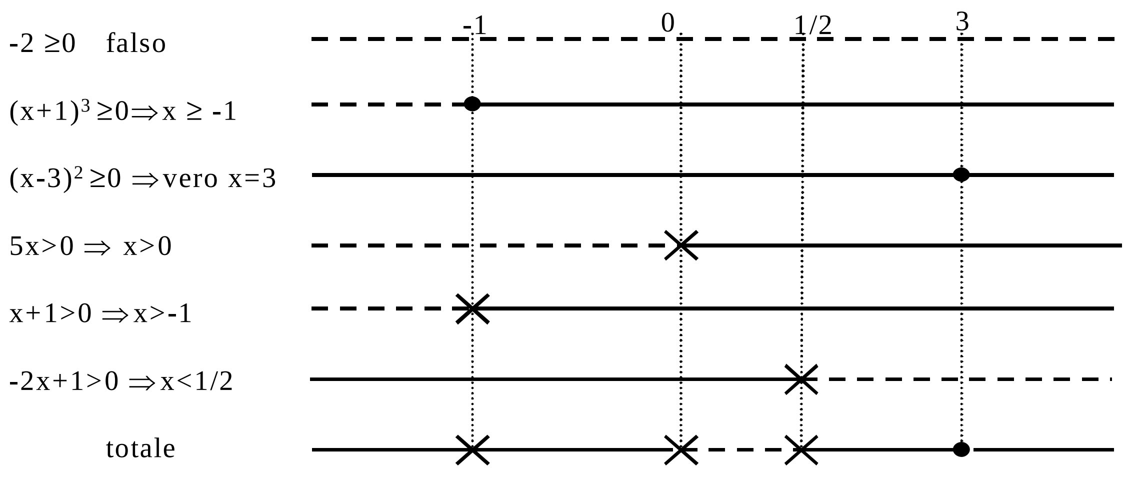
ATTENZIONE: CROCETTA BATTE PALLINO.

Esempio B10.15

Dopo aver scomposto in fattori si ha la seguente disequazione: $\frac{-2(x+1)^3(x-3)^2}{5x(x+1)(-2x+1)}...0$, in cui al posto dei puntini ho uno dei 4 simboli di disuguaglianza.

Ci sono 6 fattori quindi si devono tracciare 6 righe più quella del totale.

1° fattore	$-2 \geq 0$ sempre falso ⇒ linea tutta negativa.
2° fattore	$(x+1)^3 \geq 0$ ci si disinteressa dell'esponente e si ottiene $x \geq -1$ dove si metterà il pallino.
3° fattore	$(x-3)^2 \geq 0$ è sempre positivo tranne in 3 dove metterò il pallino.
4° fattore	$5x>0 \Rightarrow x>0$ E' al denominatore quindi sullo zero va messa una crocetta.
5° fattore	$x+1>0 \Rightarrow x>-1$ E' al denominatore quindi in -1 va messa una crocetta.
6° fattore	$-2x+1>0 \Rightarrow -2x>-1 \Rightarrow 2x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$ con crocetta in $\frac{1}{2}$.



5) Si scrivono le soluzioni vedendo cosa era richiesto nell'equazione di partenza.

Esattamente come per le disequazioni di secondo grado si vede quale simbolo di disuguaglianza si trova tra p(x) e zero. **La crocetta non fa MAI parte del risultato**!

CASO 1: Se la disequazione di partenza era **N(x)/D(x)<0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea tratteggiata.

CASO 2: Se la disequazione di partenza era **N(x)/D(x) ≤ 0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea tratteggiata o i pallini.
CASO 3: Se la disequazione di partenza era **N(x)/D(x) ≥ 0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea continua o i pallini.
CASO 4: Se la disequazione di partenza era **N(x)/D(x)>0** sono soluzioni gli intervalli in cui c'è la linea continua.

CASO 1: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo < la disequazione

$\frac{-2(x+1)^3(x-3)^2}{5x(x+1)(-2x+1)}<0$ avrebbe avuto soluzione $0<x<\frac{1}{2}$

CASO 2: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo ≤la disequazione

$\frac{-2(x+1)^3(x-3)^2}{5x(x+1)(-2x+1)}\le 0$ avrebbe avuto soluzione $0<x<\frac{1}{2}$ $x=3$

CASO 3: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo ≥ la disequazione

$\frac{-2(x+1)^3(x-3)^2}{5x(x+1)(-2x+1)}\ge 0$ avrebbe avuto soluzione $x<-1$, $-1<x<0$, $x\ge\frac{1}{2}$

CASO 4: Se nell'esempio ci fosse stato il simbolo > la disequazione

$\frac{-2(x+1)^3(x-3)^2}{5x(x+1)(-2x+1)}>0$ avrebbe avuto soluzione $x<-1$, $-1<x<0$, $\frac{1}{2}<x<3$, $x>3$

18.6 Sistemi di disequazioni

I sistemi di disequazione NON si risolvono come i sistemi di equazioni.
Il procedimento E' COMPLETAMENTE DIVERSO.

1) Si risolve ogni disequazione per conto suo, fino a scriverne le soluzioni.
Se ci sono quindi due disequazioni, prima si risolve la prima, e poi si risolve la seconda, come se fossero due esercizi distinti.

2) Si traccia una riga per ogni soluzione trovata.
La riga va tracciata solo per gli intervalli che sono soluzioni. Si indica con il pallino che l'estremo dell'intervallo è compreso, con la crocetta che non è compreso.

3) Si cercano gli intervalli in cui tutte le disequazioni sono verificate.
Le disequazioni sono verificate negli intervalli in cui è stata tracciata la riga continua. Basta quindi vedere gli intervalli in cui tutte le righe sono tracciate.

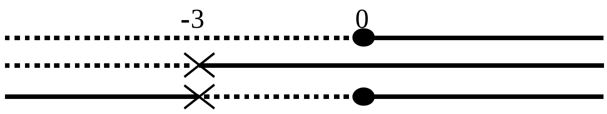
Esempio B10.16:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+3}<0 \\ x^2+x\ge 0 \end{cases}$$

PRIMA DISEQUAZIONE

Si risolve la prima disequazione; essendo una fratta la si risolve come una disequazione fratta: $\frac{x}{x+3}<0$

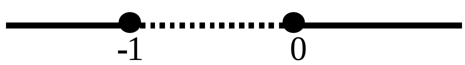
$x\ge 0$
$x+3>0 \rightarrow x>-3$
totale



La soluzione è quindi l'intervallo in cui la linea è tratteggiata, ossia $\boxed{-3<x<0}$

SECONDA DISEQUAZIONE
Si risolve la seconda disequazione; essendo di secondo grado la si risolve come una disequazione di secondo grado:

$x^2+x\ge 0$
$x(x+1)\ge 0$
$x_1=0$
$x_2=-1$

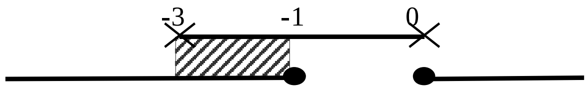


La soluzione sono quindi gli intervalli $\boxed{x\le -1 \text{ e } x\ge 0}$

Ora si traccia una riga per ognuna delle soluzioni, ossia $\boxed{-3<x<0}$ **e** $\boxed{x \leq -1 \text{ e } x \geq 0}$

PER TRACCIARE LE DUE RIGHE NON SI DEVE GUARDARE LA LINEA DEL TOTALE DELLE DUE DISEQUAZIONI RISOLTE; MA LE SOLUZIONI.

$-3<x<0$
$x \leq -1$ e $x \geq 0$



La zona colorata è l'intervallo nel quale tutte e due le disequazioni sono verificate.
La soluzione del sistema è quindi $\boxed{-3<x\leq -1}$
Se ci fosse stato il pallino anche nella prima disequazione anche il numero zero sarebbe stato soluzione del sistema.

18.7 Equazioni e disequazioni con i valori assoluti

Non si tratteranno tutti i casi ma solo i casi più semplici.

EQUAZIONI CON I VALORI ASSOLUTI
Le equazioni del tipo **$|p(x)|=q(x)$** si risolvono scomponendo il problema nei due sistemi seguenti:

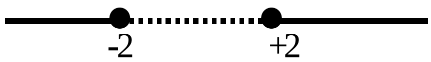
$$\begin{cases} p(x) = q(x) \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -p(x) = q(x) \\ p(x) < 0 \end{cases}$$

Esempio B10.17: $|x^2-4|=2x+4$

Si risolvono i due sistemi $\begin{cases} x^2 - 4 = 2x + 4 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2 + 4 = 2x + 4 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

PRIMO SISTEMA:

1) $x^2 - 4 \geq 0$
$(x - 2)(x + 2) \geq 0$
$x_1 = 2$
$x_2 = -2$

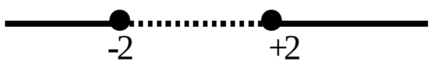


$\boxed{x \leq -2 \quad x \geq 2}$

2) $x^2 - 4 = 2x + 4$
$x^2 - 4 - 2x - 4 = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4)(x + 2) = 0$
$x_1 = 4$ accettabile
$x_2 = -2$ accettabile
Le due soluzioni sono entrambe all'interno del C.E. quindi sono entrambe accettabili

SECONDO SISTEMA:

1) $x^2 - 4 < 0$
$(x - 2)(x + 2) < 0$
$x_1 = 2$
$x_2 = -2$



$\boxed{-2 < x < 2}$

2) $- x^2 + 4 = 2x + 4$
$-x^2 + 4 - 2x - 4 = 0$
$-x^2 - 2x = 0$
$x^2 + 2x = 0$
$x(x + 2) = 0$
$x_1 = 0$ accettabile
$x_2 = -2$ non accettabile
Una delle due soluzioni (-2) non è accettabile perché non appartiene al C.E.Le soluzioni sono quindi $x_1 = 4$ (primo sistema) $x_2 = -2$ (primo sistema) $x_3 = 0$ (secondo sistema)

DISEQUAZIONI CON I VALORI ASSOLUTI

PRIMO CASO: **$|p(x)|<k$** (analogo $|p(x)| \leq k$)

Se k<0 la diseq. è impossibile; Se k>0 si risolve il sistema seguente: $\begin{cases} p(x) < k \\ -p(x) > k \end{cases}$

Ciò vuol dire che si devono prendere gli intervalli che siano soluzioni sia della prima che della seconda disequazione.

SECONDO CASO: **$|p(x)|>k$** (analogo $|p(x)| \geq k$)
Se k<0 la diseq. è sempre vera; se k>0 si risolvono le due diseq. seguenti: $p(x) > k$ e $p(x) < -k$
Ciò vuol dire che si devono prendere le soluzioni sia della prima disequazione che della seconda disequazione.

TERZO CASO: **$|p(x)|<0$ → impossibile.**

QUARTO CASO: **$|p(x)| \leq 0$ → risolvere l'eq. $p(x)=0$.**

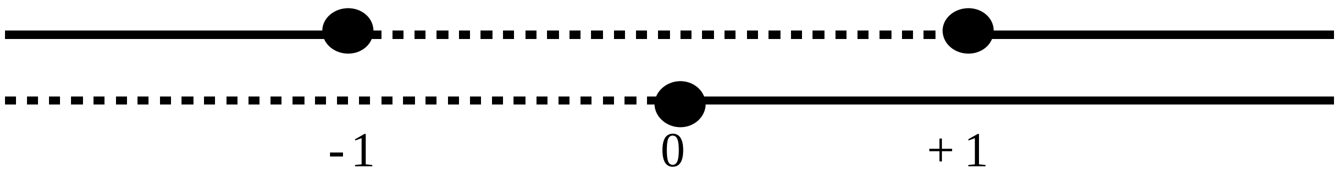
QUINTO CASO: **$|p(x)|>0$ → risolvere l'eq. $p(x) \neq 0$.**

SESTO CASO: **$|p(x)| \geq 0$ → sempre vera.**

CASO GENERALE: si svolge un esempio e lo si chiarisce passaggio dopo passaggio.

Esempio B10.18: $| x^2 - 1 | + | 3x |< 3$
Si studia il segno di tutti i polinomi che si trovano all'interno dei valori assoluti:

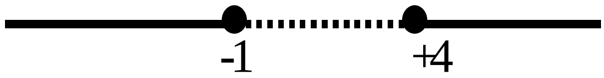
$x^2 - 1 \geq 0$	
$(x - 1)(x + 1) \geq 0$	**$3x \geq 0$**
$x_1 = 1$	$x \geq 0$
$x_2 = -1$	



Ci sono 4 intervalli.
Nel primo intervallo, x<-1, ciò che si trova all'interno del primo valore assoluto è positivo, del secondo è negativo.
Nel secondo intervallo, -1≤x<0, ciò che si trova all'interno del primo valore assoluto è negativo, e così del secondo.
Nel terzo intervallo, 0≤x<1, ciò che si trova all'interno del primo valore assoluto è negativo, del secondo è positivo.
Nell'ultimo intervallo, x≥1, ciò che si trova all'interno dei due valori assoluti è positivo.
Si risolvono i 4 casi separatamente, tenendo presente che le soluzioni che si trovano per ognuno di questi sono accettabili solo all'interno dell'intervallo di competenza.

INTERVALLO x<-1.
Nell'intervallo x<-1 l'interno del primo valore assoluto è positivo, e del secondo è negativo. Si levano i simboli di valore assoluto cambiando il segno di ciò che si trova dentro il secondo valore assoluto, quello il cui interno assume valore negativo:

$x^2 - 1 - 3x < 3$
$x^2 - 1 - 3x - 3 < 0$
$x^2 - 3x - 4 < 0$
$(x - 4)(x + 1) < 0$
$x_1 = 4$
$x_2 = -1$



La soluzione è data dai valori compresi tra –1 e 4, ma tale zona non è accettabile (ricordiamo che siamo nella zona $x<-1$), quindi **per questo intervallo non ci sono soluzioni**.

INTERVALLO $-1\leq x<0$.
Nell'intervallo $-1\leq x<0$ l'interno del primo valore assoluto è negativo e così del secondo. Si levano i simboli di valore assoluto cambiando il segno di ciò che si trova dentro i valori assoluti.

$-x^2 + 1 - 3x < 3$

$-x^2 + 1 - 3x - 3 < 0$

$-x^2 - 3x - 2 < 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = -2$

La soluzione è data dai valori $x<-2$ e $x>-1$; la zona $x<-2$ non è accettabile (ricordiamo che siamo nell'intervallo $-1\leq x<0$), mentre $x>-1$ è accettabile nell'intervallo $-1\leq x<0$ **quindi per questo intervallo la sol. è** $\boxed{-1<x<0}$

INTERVALLO $0\leq x<1$.
Nell'intervallo $0\leq x<1$ l'interno del primo valore assoluto è negativo e del secondo è positivo. Si levano i simboli di valore assoluto cambiando il segno di ciò che si trova dentro il primo valore assoluto.

$-x^2 + 1 + 3x < 3$

$-x^2 + 1 + 3x - 3 < 0$

$-x^2 + 3x - 2 < 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

La soluzione è data dai valori $x<1$ e $x>2$; la zona $x>2$ non è accettabile (si è nell'intervallo $0\leq x<1$), mentre $x<1$ è accettabile nell'intervallo $0\leq x<1$ **quindi per questo intervallo la sol. è** $\boxed{0 \leq x<1}$

INTERVALLO $x\geq 1$.
Nell'intervallo $x\geq 1$ l'interno del primo valore assoluto è positivo e così del secondo. Si levano i simboli di valore assoluto senza cambiare i segni dei due valori assoluti.

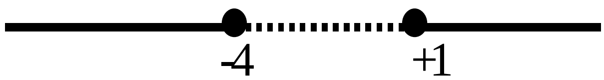
$x^2 - 1 + 3x < 3$

$x^2 - 1 + 3x - 3 < 0$

$x^2 + 3x - 4 < 0$

$x_1 = -4$

$x_2 = 1$



La soluzione è data dai valori $-4<x<1$; tale intervallo non è accettabile (si è nell'intervallo $x\geq 1$), **per questo intervallo non ci sono soluzioni**.
La soluzione è quindi data da $-1<x<0$ e da $0 \leq x<1$ ossia da $\boxed{-1<x<1}$

18.8 Equazioni e disequazioni irrazionali

Sono le equazioni e le disequazioni nelle quali l'incognita si trova anche sotto una radice.

EQUAZIONI IRRAZIONALI
Il procedimento è il seguente:

- Si isola un radicale.
- Si elevano a potenza primo e secondo membro. Se così facendo non ci sono più radicali si risolve la disequazione con i metodi visti precedentemente, altrimenti si isola di nuovo un radicale e si eleva ancora a potenza, ecc. ecc.
- Si risolve l'equazione trovata.
- Si verificano le soluzioni sostituendole nell'equazione di partenza.

Esempio B10.19:

$\mathbf{\sqrt{4x+13} - \sqrt{7x-5} = 1}$

$\sqrt{4x+13} = \sqrt{7x-5} + 1$ (si isola un radicale)

$\left(\sqrt{4x+13}\right)^2 = \left(\sqrt{7x-5}+1\right)^2$ (si eleva alla seconda)

$4x + 13 = 7x - 5 + 1 + 2\sqrt{7x-5}$

$4x + 13 - 7x + 5 - 1 = 2\sqrt{7x-5}$ (si isola un radicale)

$\left(-3x+17\right)^2 = \left(2\sqrt{7x-5}\right)^2$ (si eleva alla seconda)

$9x^2 + 289 - 102x = 4(7x - 5)$ (si risolve)

$9x^2 + 289 - 102x = 28x - 20$

$9x^2 + 289 - 102x - 28x + 20 = 0$

$9x^2 - 130x + 309 = 0$ (usando la formula risolvente...)

$x_1 = 103/9$ **non accettabile** se si fa la verifica

$x_2 = 3$ **accettabile** se si fa la verifica

VERIFICA:

$\boxed{\mathbf{x_1=103/9}}$

$\mathbf{\sqrt{4\left(\frac{103}{9}\right)+13} - \sqrt{7\left(\frac{103}{9}\right)-5} = 1}$

$\sqrt{\frac{412}{9}+13} - \sqrt{\frac{721}{9}-5} = 1$

$\sqrt{\frac{412+117}{9}} - \sqrt{\frac{721-45}{9}} = 1$

$\sqrt{\frac{529}{9}} - \sqrt{\frac{676}{9}} = 1$

falso perché i due numeri sono differenti. $x_1=103/9$ è NON ACCETTABILE.

$\boxed{\mathbf{x_2=3}}$

$\mathbf{\sqrt{4\cdot 3+13} - \sqrt{7\cdot 3-5} = 1}$

$\sqrt{12+13} - \sqrt{21-5} = 1$

$\sqrt{25} - \sqrt{16} = 1$

$5 - 4 = 1$

vero, quindi la soluzione

$x_2 = 3$ è ACCETTABILE

<u>DISEQUAZIONI IRRAZIONALI</u>

Non si cercherà qui di risolvere tutti i casi possibili, ma si tratteranno solo alcuni casi, che sono i più comuni.

CASO 1: $\mathbf{\sqrt{p(x)} > 0}$

Il valore di una radice di indice pari è sempre un numero positivo o uguale a zero.
Resta da verificare solo che il radicando sia maggiore di zero. La disequazione diventa quindi **p(x)>0**.

CASO 2: $\mathbf{\sqrt{p(x)} \geq 0}$

Per le stesse ragioni del primo caso resta da verificare solo che il radicando sia maggiore o uguale a zero.
La disequazione diventa quindi **p(x)≥0**.

CASO 3: $\mathbf{\sqrt{p(x)} < 0}$

Una radice di indice pari non darà mai un numero negativo, quindi la disequazione è **impossibile**.

CASO 4: $\mathbf{\sqrt{p(x)} \leq 0}$

Una radice di indice pari non potrà mai valere un numero negativo, ma potrebbe valere zero.
Basta quindi risolvere l'equazione **p(x)=0**.

CASO 5: $\mathbf{\sqrt[n]{p(x)} > q(x)}$ radice con indice pari

La disequazione è equivalente a risolvere i due sistemi: $\begin{cases} \mathbf{p(x) \geq 0} \\ \mathbf{q(x) < 0} \end{cases}$ **e** $\begin{cases} \mathbf{q(x) \geq 0} \\ \mathbf{p(x) > [q(x)]^n} \end{cases}$

CASO 6: $\mathbf{\sqrt[n]{p(x)} < q(x)}$ radice con indice pari

La disequazione è equivalente al sistema: $\begin{cases} \mathbf{p(x) \geq 0} \\ \mathbf{q(x) > 0} \\ \mathbf{p(x) < [q(x)]^n} \end{cases}$

CASO 7: $\mathbf{\sqrt[n]{p(x)} > q(x)}$ radice con indice dispari.

Basta elevare alla n ambo i membri della disequazione. Si risolve quindi la disequazione: $\mathbf{p(x) > [q(x)]^n}$.

CASO 8: $\mathbf{\sqrt[n]{p(x)} < q(x)}$ radice con indice dispari.

Basta elevare alla n ambo i membri della disequazione. Basta risolvere quindi la disequazione: $\mathbf{p(x) < [q(x)]^n}$.