A1. Calcolo in $\mathbb{Q}$

Questo capitolo tratta argomenti che solitamente sono già stati svolti alle scuole medie ed elementari.
Tali argomenti sono necessari per affrontare il programma delle scuole superiori.

A1.1 Tabelline e potenze

E' importante conoscere a memoria le tabelline fino al 10, e possibilmente anche le potenze e i quadrati elencati, in quanto la velocità nel calcolo mentale può spesso risultare utile.

TABELLINE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

QUADRATI DA CONOSCERE A MEMORIA

$0^2=0$			
$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$	$16^2=256$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$	$17^2=289$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$	$18^2=324$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$	$19^2=361$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$	$20^2=400$

POTENZE DA CONOSCERE A MEMORIA

$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$	$7^2=49$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$	$6^3=216$	$7^3=343$
$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$	$5^4=625$		
$2^5=32$	$3^5=243$	$4^5=1024$			
$2^6=64$	$3^6=729$				
$2^7=128$					
$2^8=256$					
$2^9=512$					
$2^{10}=1024$					

$1^3=1$	$1^4=1$	$1^5=1$	eccetera
$1^0=1$	$2^0=1$	$3^0=1$	eccetera

A1.2 Scomposizione in fattori di numeri interi – MCD e mcm

I numeri primi sono quei numeri che sono divisibili solo per loro stessi e per uno.
Ecco un elenco dei più piccoli numeri primi fino a 100.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	51	53	59	61	67	71	73	79	83	89	91	97	

Scomporre un numero in fattori primi significa scriverlo come prodotto di potenze di numeri primi.
Tale scomposizione è unica.

Esempio A1.1 - scomposizione di un numero intero in fattori primi

540	2	Divido il numero per 2 e scrivo il risultato sotto
270	2	divido di nuovo per 2 e scrivo il risultato sotto
135	3	135 non è più divisibile per 2 perciò divido per 3
45	3	divido di nuovo per 3
15	3	divido di nuovo per 3
5	5	5 non è divisibile per 3 perciò divido per 5
1		il risultato della divisione è 1 perciò ho terminato

Quindi $540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$
Si è scritto 540 come prodotto di potenze di numeri primi.

La divisione va effettuata sempre dividendo per fattori primi.
Non si può dividere per 6 o per 10 perché non sono fattori primi.

MCD – MASSIMO COMUN DIVISORE

Il massimo comun divisore di un insieme di numeri è il divisore più grande che tali numeri hanno in comune.
Ad esempio il 28 ha divisori **1**, **2**, **4**, 7, 14, 28.
Il 24 ha divisori **1**, **2**, 3, **4**, 6, 8, 12, 24.
Il 28 e il 24 hanno come divisori comuni i numeri evidenziati in grassetto, ossia 1, 2, 4; il 4 è il più grande quindi è il MCD e si scrive:
MCD(24, 28)=4

PROCEDIMENTO per trovare il MCD
- Si scompongono in fattori i numeri dati.
- Si prendono i fattori comuni con il minimo esponente.

Esempio A1.2: Trovare il MCD di 60 e 168.

Si scompongono il 60 e il 168

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$60=2^2\cdot 3\cdot 5$
$168=2^3\cdot 3\cdot 7$
I fattori comuni ad entrambi sono 2 e 3, l'esponente più piccolo del 2 è ^{2}, del 3 è ^{1}.
Quindi MCD(60, 168)$=2^2\cdot 3=12$.

Se due numeri non hanno divisori comuni allora il MCD è 1.

mcm – minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo di un insieme di numeri è il più piccolo multiplo che tali numeri hanno in comune.
Ad esempio il 12 ha multipli 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, ecc.
Il 18 ha multipli 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**, ecc.
Il 12 e il 18 hanno multipli comuni quelli in grassetto, ossia 36, 72, 108, ecc., e il più piccolo di questi è 36 quindi:
mcm(12, 18)=36.

PROCEDIMENTO per trovare il mcm
- Si scompongono in fattori i numeri dati.
- Si prendono tutti i fattori (comuni e non comuni) con il massimo esponente.

Esempio A1.3: Trovare il mcm di 15 e 54.

Si scompongono il 15 e il 54

15	3
5	5
1	

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$15=3\cdot 5$
$54=2\cdot 3^3$
I fattori sono 2, 3 e 5 e ognuno di questi va preso con l'esponente più grande con il quale appare.
Quindi mcm(15, 54)$=2\cdot 3^3\cdot 5=270$.

A1.3 I numeri decimali e le frazioni

Passaggio da numeri decimali a frazioni
Un numero decimale <u>finito</u> si trasforma in frazione scrivendolo senza virgola e dividendolo per un 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola.

Esempio A1.4: $3,24 = \frac{324}{100} = \frac{81}{25}$; $54,002 = \frac{54002}{1000} = \frac{27001}{500}$; $0,7 = \frac{7}{10}$.

Un numero decimale periodico si trasforma in frazione scrivendo al NUMERATORE il numero senza la virgola meno il numero formato dalle cifre che precedono il periodo ed al DENOMINATORE tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempio A1.5: $2,1\overline{6}$ ha come periodo 6 e come antiperiodo 1.

Si trasforma quindi così: $2,1\overline{6} = \frac{216-21}{90} = \frac{195}{90} = \frac{39}{18}$.

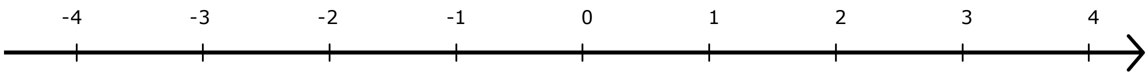
Esempio A1.6: $47,15\overline{262}$ ha come periodo 262 e come antiperiodo 15.

Si trasforma quindi così: $47,15\overline{262} = \frac{4715262-4715}{99900} = \frac{4710547}{99900}$.

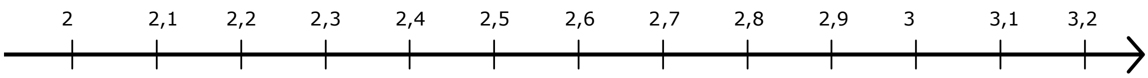
Passaggio da frazione a numero decimale
Una frazione si trasforma in numero decimale <u>dividendo il numeratore per il denominatore</u>.
Quindi $\frac{1}{4} = 0,25$ perché 1 diviso 4 fa 0,25, oppure $\frac{2}{9} = 0,\overline{2}$ perché 2 diviso 9 fa $0,\overline{2}$.

$\boxed{\frac{2}{9}\text{ NON E' }2,9}$ e questo è un errore particolarmente <u>GRAVE</u>.

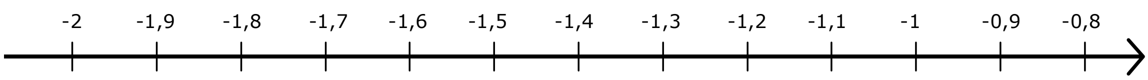
Rappresentazione di numeri decimali sulla retta
Nella retta orientata:



ogni unità è divisa in decimali. Ecco ad esempio i decimali tra 2 e 3:

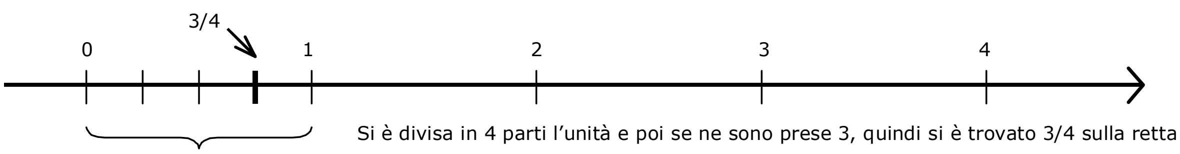


e così via.
Si noti che per i numeri decimali negativi (per esempio da –1 a –2) la rappresentazione è la seguente:



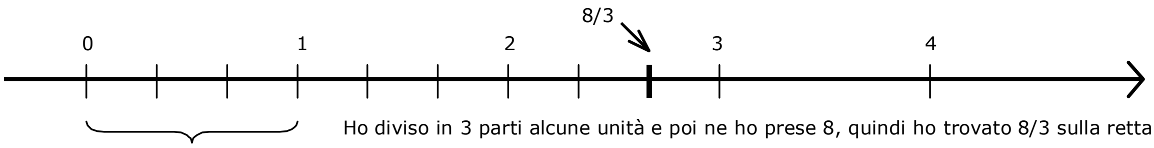
Rappresentazione di frazioni sulla retta
Si può trasformare la frazione in numero decimale e poi rappresentare il numero decimale oppure si può ragionare in termini di frazioni, che è quello che ci si propone di fare in questo paragrafo.

Esempio A1.7: Si rappresenti 3/4 sulla retta utilizzando la suddivisione in parti non decimali:
Si divide l'unità in 4 parti (tante quanto il numero che sta al denominatore) e se ne prendono 3 (tante quanto il numero che sta al numeratore).



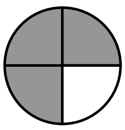
Si noti che 3 diviso 4 fa 0,75, e se si fosse rappresentato 0,75 sulla retta con il metodo di rappresentazione sulla retta dei numeri decimali si sarebbe trovato lo stesso punto.

Esempio A1.8: Si rappresenti 8/3 sulla retta utilizzando la suddivisione in parti non decimali.
Dividendo l'unità in 3 parti non si riesce a prenderne 8. Si deve quindi dividere in 3 parti anche le unità successive fino a che ce ne siano abbastanza da poterne prenderne 8.

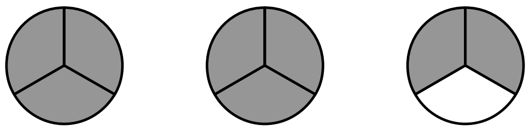


Si noti che 8 diviso 3 fa $2,\overline{6}$ e se lo si fosse rappresentato sulla retta utilizzando i numeri decimali si sarebbe trovato lo stesso punto.
Il procedimento con i numeri negativi è analogo.

Rappresentazione di frazioni come fette di torta
Il procedimento appena visto di dividere in tante parti uguali quanto il numero al denominatore l'unità e poi prenderne tante quante il numero al numeratore può essere utilizzato anche per rappresentare i numeri decimali come fette di torta.
Ecco quindi che per rappresentare 3/4 dovremo dividere una torta in 4 parti uguali e prenderne 3.
Invece per rappresentare 8/3 avremo bisogno di 3 torte, ognuna divisa in 3 parti uguali, e dovremo prendere 8 parti.



Rappresentazione di 3/4



Rappresentazione di 8/3

Rappresentazione di numeri decimali come fette di torta
Basta trasformare il numero decimale in frazione e poi utilizzare il procedimento appena visto.

A1.4 Operazioni con i numeri interi relativi

Somma e sottrazione
Se i due numeri hanno lo stesso segno il risultato avrà lo stesso segno e si farà la somma dei due numeri.

Esempio A1.9: 5+3=8
-2-9=-11

Se i due numeri hanno segno opposto il risultato avrà il segno del numero più grande e si farà la sottrazione dei due numeri.

Esempio A1.10: -2+5=+3
14-9=5
4-16=-12
-15+6=-9

Segni nella somma
+ + = +
- - = -
+ - = il segno del più grande

Moltiplicazione e divisione
Se i due numeri hanno lo stesso segno il risultato è positivo.
Se i due numeri hanno segno diverso il risultato è negativo.

Esempio A1.11: 4·5=20
-3·7=-21
-4·-8=32
11·-2=-22

Segni nel per e nel diviso
+ · + = +
- · - = +
+ · - = -
- · + = -

Potenza
Se l'esponente è pari il risultato è positivo.
Se l'esponente è dispari il risultato è dello stesso segno che c'era prima.
Se l'esponente è 0 il risultato è 1.

Esempio A1.12: $(3)^4=81$
$(-5)^2=25$
$(2)^5=32$
$(-2)^3=-8$
$(7)^0=1$

Segni nelle potenze
$(+)^{pari}=+$
$(-)^{pari}=+$
$(+)^{dispari}=+$
$(-)^{dispari}=-$

A1.5 Operazioni con le frazioni

Semplificazione

Quando numeratore e denominatore di una frazione sono divisibili per lo stesso numero allora è possibile semplificare una frazione dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero.
Per esempio nella frazione $\frac{18}{60}$ il numeratore ed il denominatore sono entrambi divisibili per 6 quindi posso semplificare dividendo numeratore e denominatore per 6. 18 diviso 6 fa 3 e 60 diviso 6 fa 10 quindi $\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$.

Somma e sottrazione

La somma e la sottrazione di frazioni si effettuano con il seguente procedimento:
1) Si scompongono in fattori i denominatori
2) Si mette come denominatore comune il minimo comune multiplo dei denominatori
3) Si divide il denominatore comune per ciascuno dei denominatori e si moltiplica il risultato per ognuno dei numeratori
4) Si effettuano le somme e le sottrazioni al numeratore
5) Se è possibile si semplifica numeratore e denominatore

Esempio A1.13:

$\frac{2}{15}+\frac{3}{4}-\frac{13}{6}=$	Si scompongono in fattori il $15=5\cdot3$, il $4=2^2$ e il $6=2\cdot3$
	Il mcm da mettere a denominatore comune dei 3 numeri è quindi $2^2\cdot3\cdot5=60$
$=\frac{4\cdot2+15\cdot3-10\cdot13}{60}=$	Ora si calcola 60 diviso 15 (che fa 4) e si moltiplica per 2
	Poi si calcola 60 diviso 4 (che fa 15) e si moltiplica per 3
$=\frac{8+45-130}{60}=$	Infine si calcola 60 diviso 6 (che fa 10) e si moltiplica per 13
	Si sommano poi i termini al numeratore
$=\frac{-77}{60}$	Non essendo possibile semplificare il 77 con il 60 il risultato è –77/60

Moltiplicazione e divisione

Per <u>moltiplicare</u> due frazioni si moltiplica il numeratore per il numeratore ed il denominatore per il denominatore.
Prima di effettuare la moltiplicazione è possibile semplificare i numeratori con i denominatori.

Esempio A1.14:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{\overset{5}{\cancel{25}}}}}{\underset{2}{\cancel{\underset{4}{\cancel{20}}}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{7}{\cancel{35}}}=\frac{1}{14}$$

Si semplifica il 25 con il 20 dividendo per 5
Poi il 2 con il 4 dividendo per 2
Infine il 5 con il 35 dividendo per 5

> **ATTENZIONE:**
> **Se si moltiplica un numero per una frazione il numero va moltiplicato <u>solo</u> per il numeratore!!!** $3\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$

Per <u>dividere</u> due frazioni si moltiplica la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempio A1.15:

$$\frac{18}{5}\div\frac{9}{2}=\frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{5}\cdot\frac{2}{\underset{1}{\cancel{9}}}=\frac{4}{5}$$

Si gira 9/2 che diventa 2/9
Si semplifica il 18 con il 9 dividendo per 9
Si moltiplicano i numeratori ($2\cdot2=4$) e i denominatori ($1\cdot5=5$)

Potenza

Per calcolare la potenza di una frazione si calcola la potenza del numeratore e del denominatore.
Esempio A1.16:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

Ordine di svolgimento delle operazioni

1) Si svolgono i calcoli dentro le parentesi
2) Si svolgono le potenze
3) Si svolgono moltiplicazioni e divisioni
4) Si svolgono somme e sottrazioni

E' obbligatorio seguire questo ordine nello svolgimento delle operazioni!

A1.6 Proprietà delle potenze

Regola 1: Se si moltiplicano due potenze con la stessa base si sommano gli esponenti.

$$\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^5$$

Regola 2: Se si dividono due potenze con la stessa base si sottraggono gli esponenti.

$$\mathbf{a}^3 \div \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$$

$$\mathbf{a}^3 \div \mathbf{a}^7 = \mathbf{a}^{-4}$$

Regola 3: Se si eleva a potenza una potenza si moltiplicano gli esponenti.

$$\left(\mathbf{a}^2\right)^3 = \mathbf{a}^6$$

Regola 4: Se si eleva a potenza un prodotto si devono elevare a potenza tutti e due i fattori.

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{b}^3$$

Regola 5: Se si eleva a potenza con esponente 0 il risultato è 1.

$$5^0 = 1$$

Regola 6: Se si eleva a potenza per un numero negativo si deve girare la frazione e cambiare segno all'esponente.

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Regola 7: Se si eleva a potenza per una frazione si deve mettere una radice che ha come indice il denominatore della frazione. Il numeratore resta all'esponente.

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

A1.7 Proporzioni

a:b=c:d oppure $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$

a,d sono gli **estremi**. **b,c** sono i **medi.**

Se i medi sono uguali il medio si chiama **medio proporzionale.** **a:b=b:c**

Proprietà:

1) Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.
   $a \cdot d = b \cdot c$
2) Si possono scambiare i medi tra di loro e/o gli estremi tra di loro e si ha una nuova proporzione.
   a:c=b:d oppure d:b=c:a oppure d:c=b:a
3) Se si cerca un medio incognito esso è uguale al prodotto degli estremi diviso il medio dato.
   5:x=12:36 $x = \frac{36 \cdot 5}{12} = 15$
4) Se si cerca un estremo incognito esso è uguale al prodotto dei medi diviso l'estremo dato.
   60:30=5:x $x = \frac{5 \cdot 30}{60} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$
5) Se si cerca un medio proporzionale esso è la radice quadrata del prodotto degli estremi.
   2:x=x:18 $x = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

La scala

Se in una riproduzione in scala si utilizza ad la notazione a scala 1:10 vuol dire che ogni cm della riproduzione rappresenta 10 cm a grandezza originale.

1° problema: come capire dalla scala la grandezza originale.

Esempio A1.17: In un disegno a scala 1:5 un segmento di 2 cm a cosa corrisponde a grandezza originale?
Si imposta la proporzione 1:5=2cm:x $\rightarrow$ x=2cm·5=10cm
Pertanto un segmento di 2 cm nel modello a scala 1:5 corrisponde a 10 cm a grandezza originale.

2° problema: come trovare la grandezza in scala conoscendo la grandezza originale.

Esempio A1.18: Si misurano nel mondo reale 120 cm e si vogliono riportare in un disegno a scala 1:6.
Si imposta la proporzione 1:6=x:120cm $\rightarrow$ x=120:6=20cm
Pertanto 120cm a grandezza originale corrispondono a 20 cm nel modello a scala 1:6

3° problema: come trovare la scala conoscendo la grandezza originale e la misura nel modello.

Esempio A1.19: La misura nel disegno è 15cm, la misura dello stesso oggetto a grandezza originale è 60cm.
La scala è 15:60, e semplificando si ottiene la scala 1:4.