I2. Relazioni e funzioni

I2.1 Relazioni

Una **relazione** è un sottoinsieme del prodotto cartesiano.

Esempio I2.1
Dati gli insiemi A={Aldo, Bruno, Carlo} e B={Anna, Barbara} si consideri la relazione, espressa in italiano, "al ragazzo appartenente all'insieme A piace la ragazza appartenente all'insieme B". Sapendo che ad Aldo piace Anna, a Bruno piacciono sia Anna che Barbara, a Carlo piace Barbara, si hanno le seguenti coppie: (Aldo, Anna), (Bruno, Anna), (Bruno, Barbara), (Carlo, Barbara). L'insieme formato dalle coppie

{ (Aldo, Anna), (Bruno, Anna), (Bruno, Barbara), (Carlo, Barbara) }

è un sottoinsieme del prodotto cartesiano

AxB={ (Aldo, Anna), (Aldo, Barbara), (Bruno, Anna), (Bruno, Barbara), (Carlo, Anna), (Carlo, Barbara) }.

Un modo differente di esprimere la relazione precedente è utilizzando il simbolo $\Re$ per mettere in relazione un elemento di A con un elemento di B.
La relazione precedente può essere scritta, per elencazione, come segue:

Aldo $\Re$ Anna, Bruno $\Re$ Anna, Bruno $\Re$ Barbara, Carlo $\Re$ Barbara.

E' possibile rappresentare graficamente le relazioni.
Un primo modo, è quello di utilizzare la rappresentazione per mezzo di punti sugli assi cartesiani. La relazione del precedente esempio può essere rappresentata come in figura I2.1.

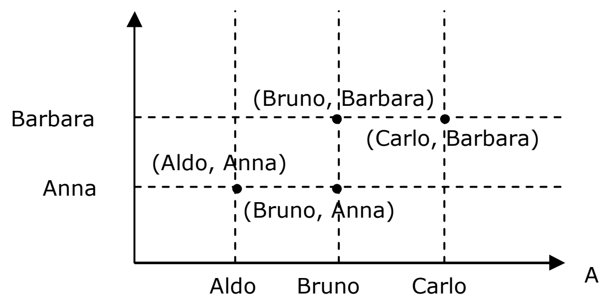


Figura I2.1
Rappresentazione sugli assi cartesiani della relazione dell'esempio I2.1.

Un secondo modo è quello di rappresentare gli insiemi A e B con i diagrammi di Venn e stabilire con delle frecce le relazioni tra gli elementi.

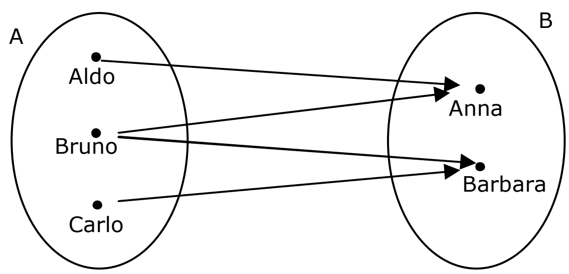


Figura I2.2
Rappresentazione con diagrammi di Venn e frecce della relazione dell'esempio I2.1.

Dati gli esempi precedenti si può dire che una relazione tra due insiemi A e B è una legge che associa ad elementi di A degli elementi di B. Spesso la relazione viene espressa in italiano, non per elencazione.

Esempio I2.2
Dati gli insiemi A=$\mathbb{N}$ e B=$\mathbb{Z}$ si consideri la relazione da A in B "essere maggiore di".
Non è possibile esprimere per elencazione la relazione in quanto gli insiemi A e B sono infiniti. E' però ovvio che la relazione "essere maggiore di" mette in relazione, ad esempio 5 $\Re$ 2 oppure 5 $\Re$ -3, ma non mette in relazione 2 con 5.

Se l'elemento a$\in$A è in relazione con l'elemento b$\in$B si dice che:

b è l'**immagine** di a

e anche che

a è la **controimmagine** di b.

Non sempre partono frecce da ogni elemento dell'insieme A, non sempre arrivano frecce in ogni elemento dell'insieme B.
Il sottoinsieme di A formato dagli elementi da cui partono le frecce è detto **dominio** della relazione.
Il sottoinsieme di B formato dagli elementi in cui arrivano le frecce è detto **immagine** o codominio della relazione.

Esempio I2.3
Dati gli insiemi A={mano, piede, coro} e B={a, e, i, u} si consideri la relazione "contiene la vocale".
L'elemento mano $\in$A contiene la vocale a$\in$B, per cui è chiaro che mano $\Re$ a.
Graficamente si può rappresentare tale relazione per mezzo di frecce come mostrato in figura I2.3.

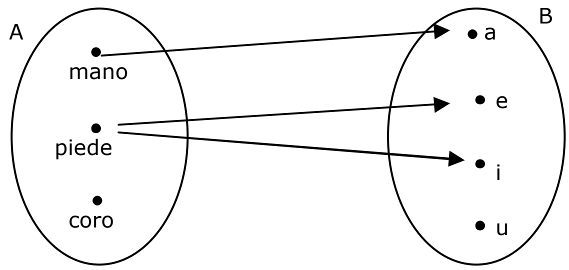


Figura I2.3
Rappresentazione con diagrammi di Venn e frecce della relazione dell'esempio I2.3.

Il dominio della relazione è l'insieme {mano, piede} $\subseteq$ A;
il codominio (o immagine) della relazione è l'insieme {a, e, i} $\subseteq$ B.

Talvolta l'insieme A coincide con l'insieme B. In tal caso una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano AxA.
In questo caso è possibile rappresentare la relazione anche per mezzo di un **grafo**.
Un grafo è formato da **nodi**, rappresentati come punti, e da **archi**, rappresentati come frecce.

Esempio I2.4
Dato l'insieme A={a, b, c, d} si consideri la relazione, espressa per elencazione:
a $\Re$ a, a $\Re$ b, b $\Re$ a, a $\Re$ c, c $\Re$ c, c $\Re$ d, d $\Re$ a.
Tale relazione può essere descritta con il grafo in figura I2.4. Si noti che a $\Re$ a è rappresentata da un arco che ritorna al punto di partenza. a $\Re$ b e b $\Re$ a sono rappresentate con un doppia freccia.

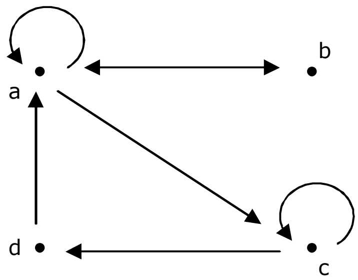


Figura I2.4
Rappresentazione con un grafo della relazione dell'esempio I2.4.

I2.2 Proprietà delle relazioni

PROPRIETA' RIFLESSIVA
Una relazione gode della proprietà **riflessiva** se ogni elemento è in relazione con sé stesso.

$$\forall a \in A \Rightarrow a \Re a$$

Esempio I2.5
Si consideri la relazione "essere nati lo stesso anno". Ogni persona è nata lo stesso anno di sé stessa, quindi la relazione "essere nati lo stesso anno" gode della proprietà riflessiva.

Esempio I2.6
Si consideri la relazione "essere genitore di". Ogni persona non è genitore di sé stessa, quindi la relazione "essere genitore di" non gode della proprietà riflessiva.

Nella rappresentazione per assi cartesiani una proprietà gode della proprietà riflessiva se e solo se tutti i punti in diagonale lungo la bisettrice degli assi sono stati segnati.
Nella rappresentazione mediante grafo una proprietà gode della proprietà riflessiva se ogni punto ha una freccetta che torna su sé stesso.

PROPRIETA' SIMMETRICA
Una relazione gode della proprietà **simmetrica** se, ogni volta che vale a $\Re$ b, vale anche b $\Re$ a.

$$\forall a,b \in A \text{ se } a \Re b \Rightarrow b \Re a$$

Esempio I2.7
Si consideri la relazione "a è in relazione con b se, dividendoli entrambi per 3 danno lo stesso resto". Se a è in relazione con b è ovvio che anche b è in relazione con a, quindi la relazione è simmetrica.

Esempio I2.8
Si consideri la relazione "essere genitore di". Se a è genitore di b non è vero che b è genitore di a, quindi la relazione non gode della proprietà simmetrica.

Nella rappresentazione con gli assi cartesiani una relazione gode della proprietà simmetrica se e solo se i punti segnati presentano una simmetria rispetto alla bisettrice degli assi. Nella rappresentazione con i grafi una relazione gode della proprietà simmetrica se e solo se ogni freccia è bidirezionale.

PROPRIETA' ANTISIMMETRICA
Una relazione gode della proprietà antisimmetrica se ogni volta che a è in relazione con b, allora b non è in relazione con a. L'unico caso in cui a è in relazione con b e b è in relazione con a è quando a e b sono uguali.

$$\forall a,b \in A \text{ se } a \,\mathfrak{R}\, b \text{ e } b \,\mathfrak{R}\, a \Rightarrow a=b$$

Esempio I2.9
Si consideri la relazione tra numeri interi "essere più grande di ". Se un numero a è più grande di b non è mai vero che b è più grande di a, quindi la relazione "essere più grande di " gode della proprietà antisimmetrica.

Esempio I2.10
Si consideri la relazione "avere la stessa età". Se una persona ha la stessa età di un'altra allora l'altra ha la stessa età della prima. Quindi non vale la proprietà antisimmetrica.

ATTENZIONE
Esistono relazioni che non godono né della proprietà simmetrica né della proprietà antisimmetrica.

Esempio I2.11
Si consideri la relazione "essere attratto da" tra ragazzi e ragazze. Può essere che Anna sia attratta da Bruno e viceversa, quindi non vale la proprietà antisimmetrica; inoltre Carla è attratta da Dino ma Dino non è attratto da Carla, quindi non vale la proprietà simmetrica.

Nella rappresentazione con gli assi cartesiani una relazione gode della proprietà antisimmetrica se per ogni punto non c'è il suo simmetrico rispetto alla bisettrice degli assi.
Nella rappresentazione con i grafi una relazione gode della proprietà antisimmetrica se non ci sono frecce bidirezionali.

PROPRIETA' TRANSITIVA
Una relazione gode della proprietà transitiva se ogni volta che a è in relazione con b e b è in relazione con c, allora anche a è in relazione con c.

$$\forall a,b,c \in A \text{ se } a \,\mathfrak{R}\, b \text{ e } b \,\mathfrak{R}\, c \Rightarrow a \,\mathfrak{R}\, c$$

Esempio I2.12
Si consideri la relazione tra figure geometriche "essere perfettamente sovrapponibili". Se una qualsiasi figura a è perfettamente sovrapponibile a una figura b e quest'ultima è perfettamente sovrapponibile a una figura c allora la figura a è perfettamente sovrapponibile alla figura c. La relazione "essere perfettamente sovrapponibili" gode pertanto della proprietà transitiva.

Esempio I2.13
Si consideri la relazione "essere attratto da" in un insieme di ragazzi. Se Anna è attratta da Bruno e Bruno è attratto da Carla, non è affatto detto, anche se a priori è possibile, che Anna sia attratta da Carla. La relazione "essere attratto da" non gode quindi della proprietà transitiva.

Nella rappresentazione con gli assi cartesiani non è semplice verificare se una relazione gode o meno della proprietà transitiva. Nella rappresentazione con i grafi si deve cercare se ogni volta che c'è una freccia che porta da a a b e un'altra freccia che porta da b a c allora c'è anche una freccia che porta da a a c. Se è così allora vale la proprietà transitiva, ma non è facile da vedere.

I2.3 Relazioni di equivalenza

Una relazione è detta **di equivalenza** se gode delle proprietà:
- RIFLESSIVA
- SIMMETRICA
- TRANSITIVA

Esempio importante I2.14
Negli alunni di una classe A= { Anna, Bruno, Carla, Dino, Eleonora, Filippo, Gianna, Helga, Iuri, Lino, Maria, Nello, Oriana, Paolo } si consideri la relazione "avere la stessa età". E' facile verificare che valgono le tre proprietà elencate, quindi la relazione "avere la stessa età" è una relazione di equivalenza.
Ogni volta che una relazione è di equivalenza è possibile suddividere l'insieme in sottoinsiemi composti da elementi in relazione tra loro.

Si consideri la classe formata da 14 persone; Anna, Bruno, Carla, Dino, Eleonora, Filippo, Gianna hanno 14 anni, Helga, Iuri, Lino, Maria, Nello hanno 15 anni, Oriana, Paolo hanno 16 anni. Si può suddividere l'insieme in 3 sottoinsiemi come in figura I2.5.

Ognuno di questi sottoinsiemi è detto **classe di equivalenza**, ed è indicato con il nome di un rappresentante qualsiasi del sottoinsieme tra parentesi quadre.

[Anna]={ Anna, Bruno, Carla, Dino, Eleonora, Filippo, Gianna }
[Helga]={Helga, Iuri, Lino, Maria, Nello }
[Oriana]={Oriana, Paolo }
Si può costruire un nuovo insieme detto **insieme quoziente** avente come elementi le classi di equivalenza. Tale insieme è indicato con A/ℜ. A/ℜ ={[Anna], [Helga], [Oriana]}.
In questo caso l'insieme quoziente ha 3 elementi. Si noti che gli elementi dell'insieme quoziente sono insiemi.

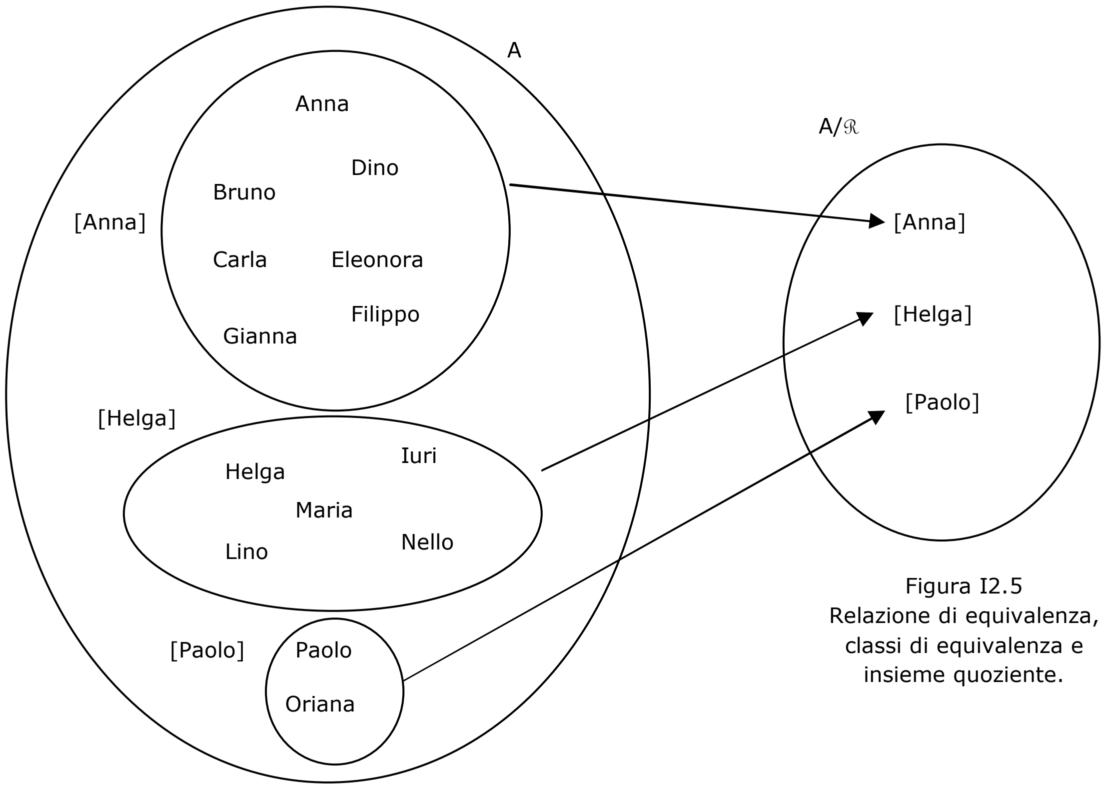


Figura I2.5
Relazione di equivalenza, classi di equivalenza e insieme quoziente.

I2.4 Relazioni di ordine

Una relazione è detta **di ordine** se gode delle proprietà:

- ANTISIMMETRICA
- TRANSITIVA

In una relazione di ordine è possibile ordinare gli elementi secondo un certo criterio definito dalla relazione.
Se vale anche la proprietà riflessiva l'ordine è detto **largo**, altrimenti è detto **stretto**.

Esempio I2.15
Si consideri la relazione "essere più grande di" definita nell'insieme A={0, 1, 2, 3, 4}. E' facile verificare che valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva pertanto la relazione è d'ordine. L'ordine è ovvio:

$$0<1<2<3<4.$$

Non è possibile ordinare gli elementi di un insiemi se non valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva.

Esempio I2.16
Si consideri la relazione "essere contenuto in" nell'insieme delle parti di A={a,b}. L'insieme delle parti di A è $\mathcal{P}$(A)={ ∅, {a}, {b}, {a, b} }.
Valgono le seguenti relazioni: ∅⊂{a}, ∅⊂{b}, ∅⊂{a, b}, {a}⊂{a, b}, {b}⊂{a, b}.
L'ordine è abbastanza ovvio: ∅ è più piccolo di tutti, {a, b} è il più grande di tutti. Gli insiemi {a} e {b} sono a metà strada. L'ordine è rappresentato in figura I2.6.

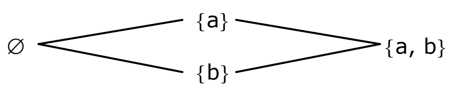


Figura I2.6
Ordine nell'insieme delle parti
$\mathcal{P}$(A)={ ∅, {a}, {b}, {a, b} }.

Nel caso in cui tutti gli elementi sono confrontabili, ossia si può dire sempre se un elemento è prima o dopo di un altro l'ordine è detto **totale**. L'esempio I2.15 è un esempio di ordine totale.
Nel caso in cui non tutti gli elementi sono confrontabili, ossia non si può dire sempre se un elemento è prima o dopo di un altro l'ordine è detto **parziale**. L'esempio I2.16, dato che non si riesce a dire chi viene prima tra {a} e {b}, è un esempio di ordine parziale.

I2.5 Funzioni

Quando sono state definite le relazioni si è visto che ad ogni elemento del dominio possono corrispondere anche più elementi del codominio. Le funzioni sono un particolare tipo di relazioni che ad un elemento del dominio fanno corrispondere esattamente un elemento del codominio.

Siano A e B insiemi. Una **funzione** è una relazione che associa ad ogni elemento di A al più un elemento di B.

Esempio I2.17
Al compito di matematica Anna ha preso 4, Bruno ha preso 6, Carla ha preso 6, Dino ha preso 7 ed Eleonora ha preso 9. Sia A={Anna, Bruno, Carla, Dino, Eleonora} e B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. La regola che associa ad ogni allievo il suo voto in matematica è una funzione.

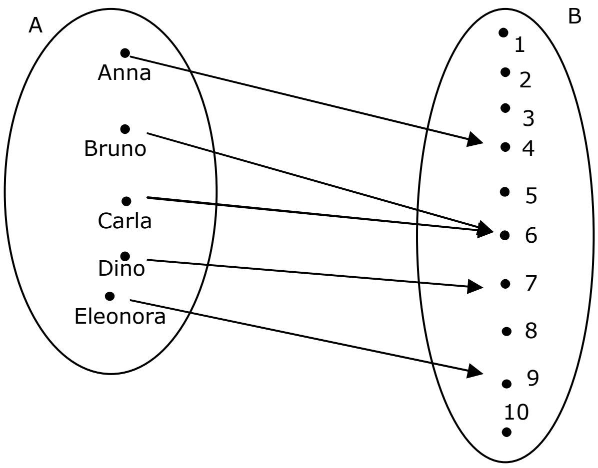


Figura I2.7
Esempio di funzione

Se da un elemento del primo insieme partissero due frecce allora non sarebbe una funzione, in quanto ad un elemento di A se ne deve associare UNO SOLO di B. Se non partono frecce da qualche elemento di A ci si può ricondurre alla definizione di funzione levando da A gli elementi di A da cui non partono frecce.

Le funzioni da A in B si indicano con f: $A \rightarrow B$.
Come già detto A è il **dominio** e B è il **codominio**.
Nell'esempio precedente 6 è l'immagine di Bruno, 6 è anche **l'immagine** di Carla. L'insieme {Bruno, Carla} è la **controimmagine** di 6.

Esempio I2.18
Sia A={-1, 0, 1}, B={0, 1} e $f:x \rightarrow -x^2+1$.
Con semplici calcoli si ottiene f(-1)=0, f(0)=1, f(1)=0.
L'immagine di -1 è 0, l'immagine di 0 è 1, l'immagine di 1 è 0, la controimmagine di 0 è l'insieme {-1,1}, la controimmagine di 1 è l'insieme {0}.

I2.6 Classificazione delle funzioni

Una funzione f: $A \rightarrow B$ è detta **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.

Nella rappresentazione con i diagrammi di Venn una funzione è suriettiva se per ogni punto dell'insieme di arrivo c'è almeno una freccia che lo raggiunge.
La funzione in figura I2.7 non è suriettiva perché ci sono punti (l'1, il 2, il 3, il 5, l'8 e il 10) dell'insieme di arrivo nei quali non giunge alcuna freccia.

Esempio I2.19
Sia data la funzione f: $A \rightarrow B$ con A={Anna, Bruno, Carla, Dino} e B={4, 5} che associa ad ogni nome la sua lunghezza in lettere. Si ha: f(Anna)=4, f(Bruno)=5, f(Carla)=5, f(Dino)=4. Ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, e la funzione è suriettiva.

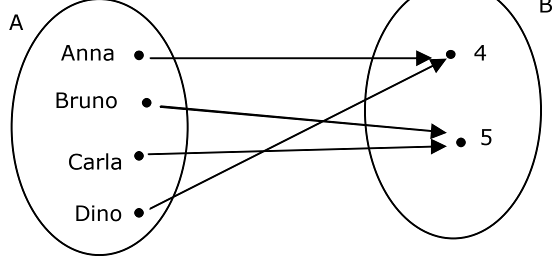


Figura I2.8
Esempio I2.19 di funzione suriettiva.

Una funzione f: A $\rightarrow$ B è detta **iniettiva** se, dati due elementi distinti x, y $\in$ A, allora $f(x)\neq f(y)$.

Nella rappresentazione con i diagrammi di Venn una funzione è iniettiva se non arriva mai più di una freccia a ogni elemento dell'insieme di arrivo.
La funzione in figura I2.7 non è iniettiva perché arrivano due frecce al numero 6.

Esempio I2.20
Sia data la funzione f: A$\rightarrow$ B con A={0, 1, 4, 9} e B={-1, 0, 1, 2, 3} definita da $f: x \mapsto \sqrt{x}$.
Si ha f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2, f(9)=3. La funzione è iniettiva perché, dati due elementi qualsiasi di A, le loro immagini sono diverse tra loro.

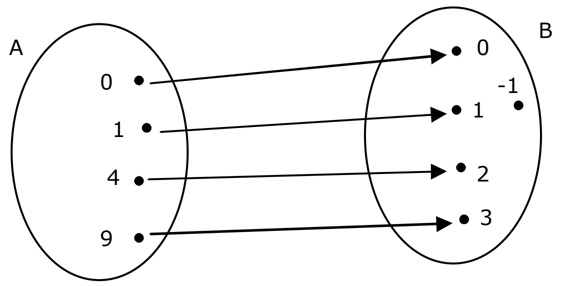


Figura I2.9
Esempio I2.20 di funzione iniettiva.

Si noti che -1$\in$A non ha contro immagine!

Una funzione f: A $\rightarrow$ B è detta **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

Per le funzioni biiettive c'è una corrispondenza biunivoca, ossia ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di B e viceversa. Se tra due insiemi esiste una corrispondenza biiettiva allora hanno lo stesso numero di elementi, ossia la stessa cardinalità.

Esempio I2.21
Sia data la funzione f: A$\rightarrow$ B con A={0, 1, 4, 9} e B={0, 1, 2, 3} definita da $f: x \mapsto \sqrt{x}$.
Si ha: f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2, f(9)=3. La funzione è iniettiva perché, dati due elementi qualsiasi di A, le loro immagini sono diverse tra loro. La funzione è suriettiva perché non arrivano mai due frecce allo stesso elemento di B. Essendo iniettiva e suriettiva la funzione è biiettiva. E' facile vedere che esiste una corrispondenza che ad ogni elemento di A associa un elemento di B e viceversa.

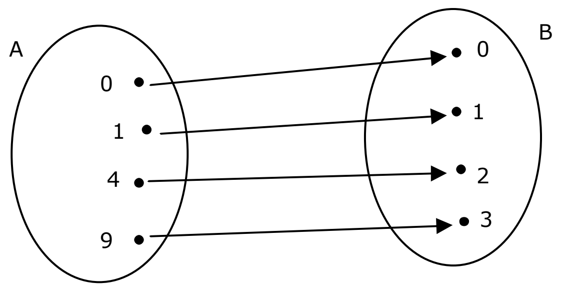


Figura I2.10
Esempio I2.21 di funzione biiettiva.

Si noti che, essendoci una funzione biiettiva da A in B, gli insiemi A e B hanno lo stesso numero di elementi (che in questo caso è 4).

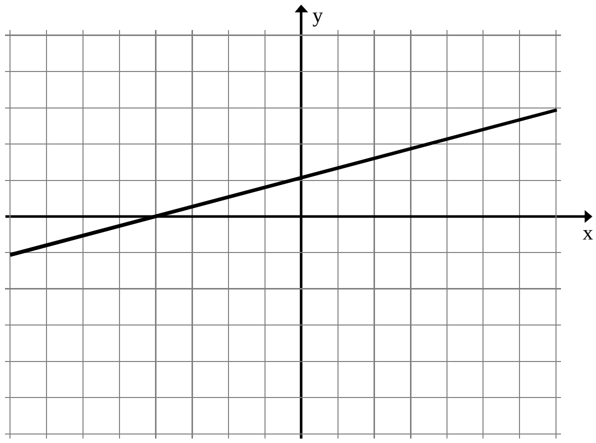
L'esempio I2.21 è quasi uguale all'esempio I2.20; l'unica differenza è che si è tolto l'elemento -1 dall'insieme B.

Ci sono funzioni che non sono né iniettive, né suriettive, come visto in figura I2.7.
Ci sono funzioni suriettive ma non iniettive, come visto in figura I2.8.
Ci sono funzioni iniettive ma non suriettive, come visto in figura I2.9.
Ci sono funzioni iniettive e suriettive, come visto in figura I2.10.

Le funzioni, come si è visto, possono essere rappresentate come punti sugli assi cartesiani tracciandone un grafico.
E' possibile, guardando il grafico, stabilire se rappresenta o no una funzione e stabilirne il dominio e il codominio.

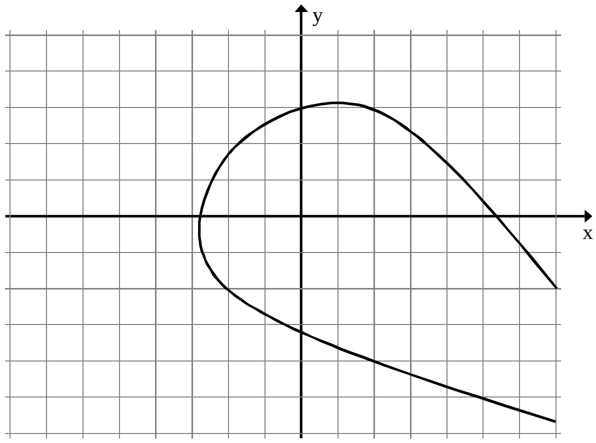
Se un grafico ha due punti sulla stessa verticale allora ad un elemento dell'insieme di partenza se ne associano due dell'insieme di arrivo, e il grafico non rappresenta una funzione ma rappresenta un altro oggetto matematico detto curva piana.
Il **dominio** di una funzione è la sua **proiezione sull'asse x**.
Il **codominio** di una funzione è la sua **proiezione sull'asse y**.

Esempio I2.22
Dato il seguente grafico stabilire se è una funzione. Se lo è trovarne dominio e codominio.



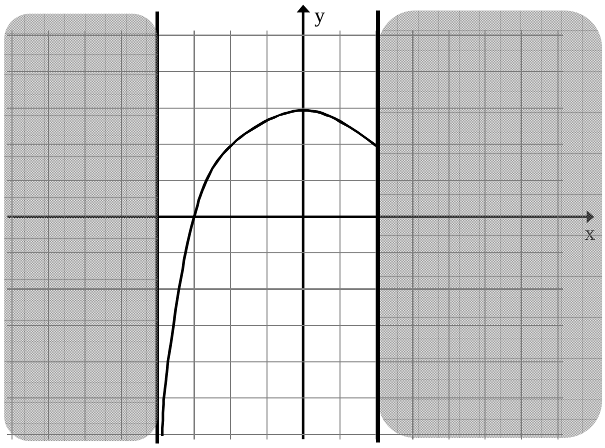
Il grafico è quello di una retta. Non ci sono due punti sulla stessa verticale quindi è il grafico di una funzione. Il dominio è la proiezione del grafico sull'asse x, e in questo caso è tutto l'asse x. Il dominio è dunque ℝ. Il codominio è la proiezione del grafico sull'asse y, e in questo caso è tutto l'asse y. Il codominio è dunque ℝ.

Esempio I2.23
Dato il seguente grafico stabilire se è una funzione. Se lo è trovarne dominio e codominio.



Il grafico presenta parecchi punti sulla stessa verticale; in particolare passa per i punti (2; 3) e (2; -4). Il grafico non rappresenta una funzione.

Esempio I2.24
Dato il seguente grafico stabilire se è una funzione. Se lo è trovarne dominio e codominio.



Il grafico non presenta punti sulla stessa verticale pertanto rappresenta una funzione. Il dominio è la proiezione del grafico sull'asse x, quindi è composto dai numeri da -4 (escluso) a 2 (incluso). Si scrive $-4<x\leq 2$. Il codominio è la proiezione del grafico sull'asse y, quindi sono tutti i numeri minori o uguali a 3. Si scrive $x\leq 3$.

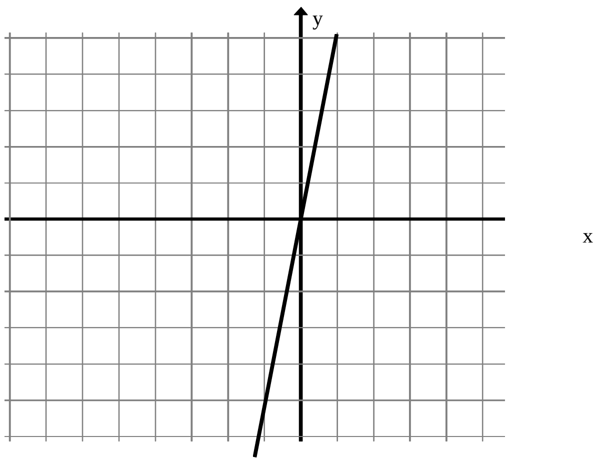
I2.7 Proporzionalità diretta e inversa

Si dice che due grandezze sono **direttamente proporzionali** se il loro rapporto è costante. Tale valore costante è detto **rapporto di proporzionalità**.

Esempio I2.25
Una scatola di cioccolatini costa 5 euro. Due scatole costano 10 euro eccetera. Chiamando x il numero di scatole e y gli euro spesi per acquistarle si ha la seguente tabella:

x	0	1	2	3	4	5	6	…
y	0	5	10	15	20	25	30	…

Il rapporto $\frac{x}{y}$ è costante con x e y diversi da zero, infatti: $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{5}{25}=\frac{6}{30}=0,2$. k=0,2 è il rapporto di proporzionalità. Considerando le x e le y come coordinate sugli assi cartesiani è possibile rappresentare graficamente la funzione y=kx, che in questo caso è $\frac{x}{y}=0,2 \Rightarrow y=\frac{x}{0,2} \Rightarrow y=5x$. Essa passerà per i punti (0;0) e (1;5) ed è la retta in figura.



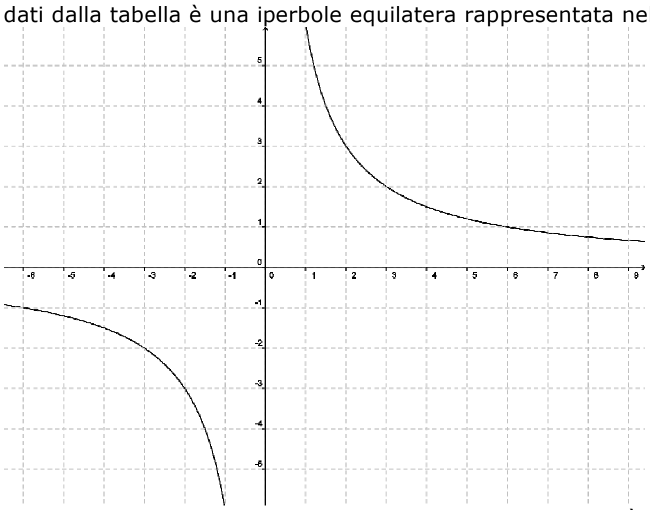
Tutte le rette passanti per l'origine rappresentano funzioni di proporzionalità diretta e ogni funzione di proporzionalità diretta è rappresentata graficamente da rette passanti per l'origine.

Si dice che due grandezze sono **inversamente proporzionali** se il loro prodotto è costante. Tale valore costante è detto **costante di proporzionalità**. La funzione di proporzionalità inversa ha la forma xy=k o, equivalentemente, $y=\frac{k}{x}$. (x diverso da zero)

Esempio I2.26
Si consideri la funzione $y=\frac{6}{x}$. Assegnando alla x alcuni valori si ottiene la tabella qui sotto.

x	0,5	1	2	3	6	12	…
y	12	6	3	2	1	0,5	…

Il grafico passante per i punti dati dalla tabella è una iperbole equilatera rappresentata nel grafico qui sotto.



Ci sono due rette, una orizzontale e una verticale, a cui il grafico si avvicina sempre più senza toccarle mai. Tali rette sono dette **asintoti**. Il grafico è quello di una **iperbole equilatera** avente asintoti gli assi cartesiani. Tutte le iperboli equilatere aventi come asintoti gli assi cartesiani rappresentano funzioni di proporzionalità inversa e ogni funzione di proporzionalità inversa è rappresentata graficamente da iperboli equilatere con asintoti gli assi cartesiani. Gli asintoti e le iperboli verranno studiate più avanti.