I1. Insiemistica

I1.1 Insiemi

Il concetto di insieme è un concetto primitivo, pertanto non ne viene data una definizione rigorosa. Si può dire, intuitivamente, che un insieme è una collezione di oggetti per cui valgono alcune proprietà:

- Un elemento di un insieme appare una volta sola all'interno dell'insieme.
- Un elemento può appartenere o non appartenere all'insieme.
- Gli elementi di un insieme non sono ordinati.
- Per ogni insieme esiste una proprietà che permette di decidere se un elemento appartiene o no all'insieme.

Le proprietà precedenti non servono a dare una definizione rigorosa di insieme. Infatti l'ultima proprietà, in realtà, produce contraddizioni, anche se non si approfondirà questo punto.

Gli insiemi sono indicati con lettere maiuscole A, B, C, …; gli elementi sono indicati con lettere minuscole a, b, c, …
Per indicare che un elemento a **appartiene** all'insieme A si scrive $a \in A$. Il simbolo $\in$ si legge "**appartiene**".
Per indicare che un elemento a **non appartiene** all'insieme A si scrive $a \notin A$. Il simbolo $\notin$ si legge "**non appartiene**".
Prima dei simboli $\in$ e $\notin$ va un elemento, dopo va un insieme. E' pertanto errore sintattico scrivere $a \in b$, perché b, lettera minuscola, non è un insieme ma un elemento. E' errore sintattico scrivere anche $A \notin B$, in quanto A è un insieme e non si può trovare prima del simbolo $\notin$.
L'insieme che non ha elementi è detto **insieme vuoto** e viene indicato con il simbolo $\varnothing$.

L'insieme viene rappresentato con la seguente notazione, detta rappresentazione **mediante la proprietà caratteristica**: $\{ x \mid x \text{ soddisfa una particolare proprietà} \}$.
La barra verticale | si legge "tale che".

E' possibile rappresentare gli insiemi, in maniera intuitiva, **per elencazione**, ossia elencandone gli elementi tra parentesi graffe. E' possibile rappresentare gli insiemi, in una simile maniera intuitiva, con i **diagrammi di Venn**, scrivendone gli elementi all'interno di una curva chiusa.

Alcuni insiemi spesso utilizzati sono gli **insiemi numerici**.
E' detto insieme dei **numeri naturali** l'insieme $\mathbb{N}=\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$.
E' detto insieme dei **numeri relativi** l'insieme $\mathbb{Z}=\{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$.
E' detto insieme dei **numeri razionali** l'insieme $\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. L'insieme $\mathbb{Q}$ è pertanto l'insieme delle frazioni.
La definizione successiva, quella di insieme dei numeri reali, non è una definizione rigorosa, la definizione rigorosa verrà data più avanti. Si dice insieme dei **numeri reali**, e si indica con $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri corrispondenti ai punti di una retta.

Esempio I1.1
$A=\{x \mid x<4, x \in \mathbb{N}\}$ è un insieme ben definito; è infatti possibile determinare esattamente se un elemento appartiene ad A oppure se non vi appartiene. Gli elementi di A sono i numeri 0, 1, 2, 3.
L'insieme A, per elencazione, si rappresenta in questo modo: $A=\{ 0, 1, 2, 3 \}$.
L'insieme A, mediante i diagrammi di Venn, viene rappresentato in questo modo:

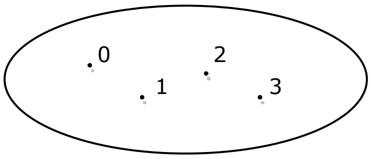

Figura I1.1
Diagramma di Venn.

Nell'esempio precedente l'insieme è dato mediante proprietà caratteristica, poi è stato scritto lo stesso insieme per elencazione ed è stato rappresentato graficamente con i diagrammi di Venn. Nell'esempio successivo, al contrario, viene dato un insieme per elencazione e lo si scrive poi mediante la proprietà caratteristica.

Un insieme è detto **finito**, in maniera intuitiva, se ha un numero finito di elementi. La definizione formale di insieme finito verrà data nel capitolo I2. Se un insieme è finito è detta **cardinalità** dell'insieme il numero dei suoi elementi. La cardinalità dell'insieme A è indicata con $|A|$. $|A|$ è un numero intero. Nel caso dell'esempio I1.1 $|A|=4$, perché l'insieme A ha 4 elementi.
La cardinalità dell'insieme $\varnothing$ è zero; si scrive $|\varnothing|=0$.
La cardinalità dell'insieme $\mathbb{N}$ è indicata con il simbolo $\aleph_0$; tale simbolo si legge Aleph-zero. La teoria delle cardinalità degli insiemi infiniti esula dagli scopi di questo capitolo.

Esempio I1.2
$A=\{ 0, 1, 4, 9, 16 \}$ è un insieme rappresentato per elencazione. Si noti che gli elementi appartenenti all'insieme A sono tutti quadrati di numeri interi, e in particolare sono i quadrati dei numeri interi minori o uguali a 4. L'insieme A, per proprietà caratteristica, può essere rappresentato con $A=\{ x^2 \mid x \le 4, x \in \mathbb{N} \}$.
E' possibile rappresentare lo stesso insieme con la proprietà caratteristica anche in maniera differente, per esempio: $A=\{ x^2 \mid x <5, x \in \mathbb{N} \}$. Non esiste perciò un unico modo di rappresentare lo stesso insieme mediante proprietà caratteristica.

I1.2 Sottoinsiemi

Due insiemi sono detti **uguali** se hanno esattamente gli stessi elementi, e si scrive A=B.

Dati due insiemi A e B si scrive $A \subset B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B, e si dice che **A è un sottoinsieme di B**. Il simbolo $\subset$ si legge "**incluso**" o "**contenuto**". $A \subset B$ si legge dunque "A è contenuto in B".
Talvolta si utilizza il simbolo $\subseteq$; $A \subseteq B$ indica che l'insieme A è contenuto in B ma può anche essere uguale a B.
Analogamente i simboli $\supset$ e $\supseteq$ vengono letti "**include**" o "**contiene**".
Il simbolo $\not\subset$ si legge "**non incluso**".
Tutti i simboli precedenti servono a rappresentare relazione tra insiemi; è pertanto errore sintattico scrivere $a \subset B$ oppure $A \subset b$, perché a e b, rappresentati come lettere minuscole, non sono insiemi ma elementi. E' invece corretto scrivere $\{a\} \subset B$, in quanto $\{a\}$ è un insieme rappresentato per elencazione che contiene solo un elemento.

Esempio I1.3
Sia P l'insieme $P=\{ 2x \mid x \in \mathbb{N} \}$. P è l'insieme dei numeri interi pari. E' ovvio che $P \subset \mathbb{N}$ e che $\mathbb{N} \not\subset P$.

Per ogni insieme A valgono le seguenti proprietà:
- $A \subseteq A$, ossia ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso,
- $\varnothing \subseteq A$, ossia l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme.

Gli insiemi $\varnothing$ e A sono detti sottoinsiemi **impropri** di A. Tutti gli altri sottoinsiemi di A sono detti sottoinsiemi **propri** di A. Si noti che non è vero che $A \subset A$, mentre è vero che $\varnothing \subset A$.

Se sono vere le seguenti due proprietà:
- $A \subseteq B$,
- $B \subseteq A$,

allora i due insiemi A e B sono uguali, ossia hanno gli stessi elementi.
L'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di un dato insieme A è detto **insieme delle parti** di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$. Si noti che, a differenza di quanto visto finora, gli elementi dell'insieme delle parti sono insiemi!

Esempio I1.4
Sia $A=\{a, b, c\}$. Si elencano di seguito tutti i sottoinsiemi di A.
C'è un solo sottoinsieme di cardinalità zero, ed è l'insieme vuoto $\varnothing$.
Ci sono tre sottoinsiemi di cardinalità uno, e sono $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.
Ci sono tre sottoinsiemi di cardinalità due, e sono $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.
C'è un unico sottoinsieme di cardinalità tre, ed è A stesso.
L'insieme delle parti di A è dunque l'insieme seguente, formato da 8 elementi.
$\mathcal{P}(A)=\{ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$.

Si noti che nell'esempio precedente $|A|=3$ e $|\mathcal{P}(A)|=8=2^3$.
Ciò può essere generalizzato e si può affermare che se A ha n elementi, allora l'insieme delle parti di A ne ha 2^n.
Sapendo che $|A|=5$ si può dunque dire che $|\mathcal{P}(A)|=2^5=32$. Sapendo che $|\mathcal{P}(A)|=64$ si può dire che $|A|=6$, poiché $2^6=64$. Non è possibile che l'insieme delle parti di A abbia esattamente 10 elementi, in quanto 10 non è potenza di 2.

I1.3 Operazioni tra insiemi

Le operazioni tra numeri assegnano a ogni coppia di numeri un numero. Ad esempio l'operazione + assegna alla coppia di numeri 3 e 5 il numero 8. È possibile definire operazioni tra insiemi, ossia operazioni che assegnano a una coppia di insiemi un terzo insieme.

INTERSEZIONE
L'operazione di intersezione è indicata dal simbolo $\cap$.
L'insieme $A \cap B$ è costituito da tutti e soli gli elementi cha appartengono sia ad A che a B.
Formalmente si può scrivere $A \cap B=\{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$.

Esempio I1.5
Dati gli insiemi $A=\{a, b, c, d\}$ e $B=\{c, d, e\}$ calcolare l'insieme intersezione $A \cap B$ e rappresentarlo graficamente con i diagrammi di Venn.
$A \cap B=\{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e\}=\{c, d\}$.

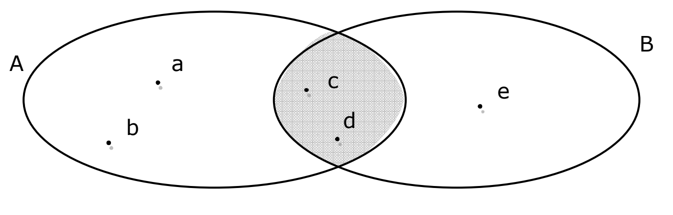

Figura I1.2
Intersezione di 2 insiemi.

Si noti che l'intersezione è la parte in comune ai due insiemi, ed è quella colorata nella figura I1.2.

UNIONE
L’operazione intersezione è indicata dal simbolo $\cup$.
L’insieme $A \cup B$ è costituito da tutti gli elementi cha appartengono ad A oppure a B.
Formalmente si può scrivere $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B \}$.

Esempio I1.6
Dati gli insiemi A={a, b, c, d} e B={c, d, e} calcolare l’insieme unione $A \cup B$ e rappresentarlo graficamente con i diagrammi di Venn.
$A \cup B = \{a, b, c, d\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$.

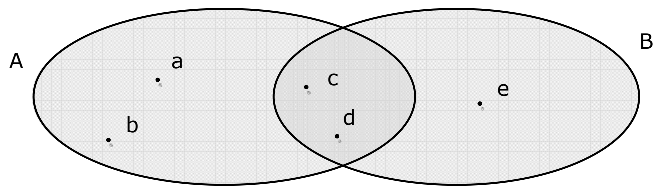

Figura I1.3
Unione di 2 insiemi.

Si noti che l’unione è formata da tutti e due gli insiemi, sia dalle parti in comune che da quelle che non sono in comune, ed è stata dunque colorata tutta l’area dei due insiemi.

DIFFERENZA

L’operazione differenza è indicata dal simbolo \.
L’insieme A\B è costituito da tutti gli elementi cha appartengono ad A ma non appartengono a B.
Formalmente si può scrivere $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$.

Esempio I1.7
Dati gli insiemi A={a, b, c, d} e B={c, d, e} calcolare l’insieme differenza A\B e rappresentarlo graficamente con i diagrammi di Venn.
$A \setminus B = \{a, b, c, d\} \setminus \{c, d, e\} = \{a, b\}$.

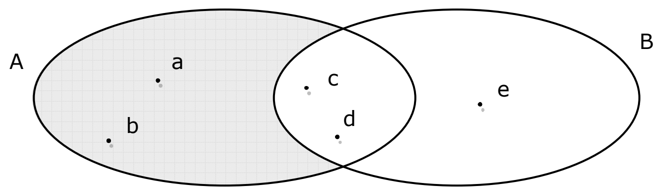

Figura I1.4
Differenza di 2 insiemi.

Si noti che la differenza è la parte di A che non contiene elementi di B, ed è la parte colorata nella figura I1.4.

COMPLEMENTARE

A differenza delle operazioni precedenti che assegnano a una coppia di insiemi un terzo insieme l’operazione di complementare assegna a ogni insieme un altro insieme. E’ però necessario definire un insieme, detto insieme universo, di cui l’insieme dato è sottoinsieme.
Sia U l’insieme universo e sia $A \subset U$. L’insieme complementare di A, indicato con $\overline{A}_U$, è l’insieme degli elementi che non si trovano in A ma si trovano in U in cui A è contenuto.
Formalmente si può scrivere $\overline{A}_U = \{ x \mid x \notin A, x \in U \}$. Si noti che $\overline{A}_U = U \setminus A$.
Se il contesto è univocamente determinato non è necessario scrivere il simbolo $_U$ accanto ad A e si può scrivere semplicemente $\overline{A}$.

Esempio I1.7
Dati gli insiemi A={a, b, c} e U={a, b, c, d, e} calcolare il complementare $\overline{A}_U$ e rappresentarlo graficamente con i diagrammi di Venn.
$\overline{A}_U = \{a, b, c, d, e\} \setminus \{a, b, c\} = \{d, e\}$.

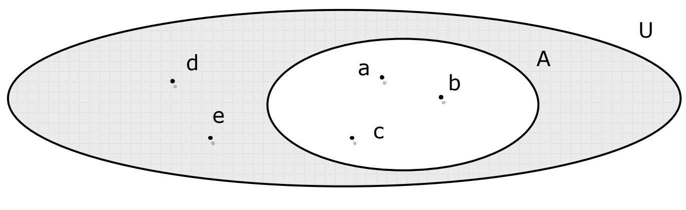

Figura I1.5
Complementare di un insieme.

Si noti che il complementare è la parte dell’insieme universo esterna ad A, ed è la parte che è stata colorata nella figura I1.5.

PROPRIETA’ DELLE OPERAZIONI TRA INSIEMI

Le operazioni tra numeri godono di alcune proprietà. Ne richiamiamo alcune:

1. PROPRIETA’ ASSOCIATIVA dell’ADDIZIONE
$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$ (anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$)
2. PROPRIETA’ ASSOCIATIVA della MOLTIPLICAZIONE
$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \qquad \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$ (anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$)
3. PROPRIETA’ COMMUTATIVA dell’ADDIZIONE
$a+b=b+a \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{N}$ (anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$)
4. PROPRIETA’ ASSOCIATIVA della MOLTIPLICAZIONE
$a\cdot b=b\cdot a \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{N}$ (anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$)
5. PROPRIETA’ DISTRIBUTIVA della MOLTIPLICAZIONE rispetto all’ADDIZIONE
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad \forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$ (anche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$)

Anche le operazioni tra insiemi godono delle stesse proprietà, e godono anche di molte altre proprietà. Elenchiamole:

1. PROPRIETA’ ASSOCIATIVA dell’INTERSEZIONE
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ A, B, C insiemi qualsiasi.
2. PROPRIETA’ ASSOCIATIVA dell’UNIONE
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ A, B, C insiemi qualsiasi.
3. PROPRIETA’ COMMUTATIVA dell’INTERSEZIONE
$A\cap B=B\cap A$ A, B insiemi qualsiasi.
4. PROPRIETA’ ASSOCIATIVA dell’UNIONE
$A\cup B=B\cup A$ A, B insiemi qualsiasi.

   Le proprietà 1-4 sono le analoghe proprietà che valgono per l’addizione e la moltiplicazione tra numeri qualsiasi. Negli insiemi numerici vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione ma non quella dell’addizione rispetto alla moltiplicazione. Per le operazioni di unione e intersezione invece valgono entrambe le proprietà distributive, sia quella dell’intersezione rispetto all’unione che quella dell’unione rispetto all’intersezione.

5. PROPRIETA’ DISTRIBUTIVA dell’INTERSEZIONE rispetto all’UNIONE
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ A, B, C insiemi qualsiasi.
6. PROPRIETA’ DISTRIBUTIVA dell’UNIONE rispetto all’INTERSEZIONE
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ A, B, C insiemi qualsiasi.

   Ci sono poi altre proprietà che non valgono per le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri ma valgono per unione e intersezione tra insiemi: sono le leggi di assorbimento, la proprietà di idempotenza e le leggi di De Morgan.

7. LEGGI DI ASSORBIMENTO
$A\cap(A\cup B)=A$ A, B insiemi qualsiasi.
$A\cup(A\cap B)=A$ A, B insiemi qualsiasi.
8. PROPRIETA’ DI IDEMPOTENZA
$A\cap A=A$ A insieme qualsiasi.
$A\cup A=A$ A insieme qualsiasi.
9. LEGGI DI DE MORGAN (dato U insieme universo fissato con $A, B \subset U$)
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ A, B insiemi qualsiasi.

   1 è l’elemento neutro della moltiplicazione; infatti $a\cdot 1=a\ \forall a$.
   0 è l’elemento neutro dell’addizione; infatti $a+0=a\ \forall a$.
   Allo stesso modo $\varnothing$ è l’elemento neutro dell’unione.

10. ELEMENTO NEUTRO DELL’UNIONE
$A\cup\varnothing=A$ A insieme qualsiasi.

   Per la moltiplicazione vale la proprietà che zero, moltiplicato per ogni numero, dà risultato zero. Allo stesso modo $\varnothing$, intersecato con ogni insieme, dà risultato $\varnothing$.

11. INTERSEZIONE CON L’INSIEME VUOTO.
$A\cap\varnothing=\varnothing$ A insieme qualsiasi.

Una dimostrazione informale di tutte queste proprietà si può ottenere utilizzando i diagrammi di Venn. Per esempio si dimostra nel successivo esempio con i diagrammi di Venn la proprietà distributiva dell’unione rispetto all’intersezione.

Esempio I1.8
Si dimostra la proprietà distributiva dell’unione rispetto all’intersezione con i diagrammi di Venn.
La proprietà afferma che: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
Per prima cosa si colora in un diagramma di Venn il primo membro $A\cup(B\cap C)$.

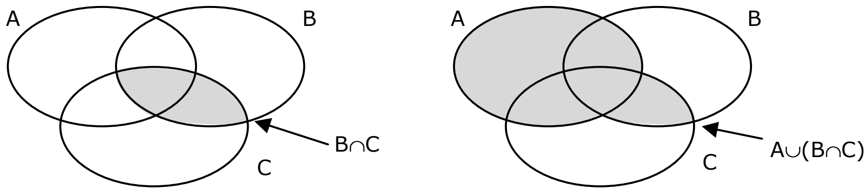

Figura I1.6
A∪(B∩C) con i diagrammi di Venn.

Poi si colora in un diagramma di Venn il secondo membro (A∪B)∩(A∪C).

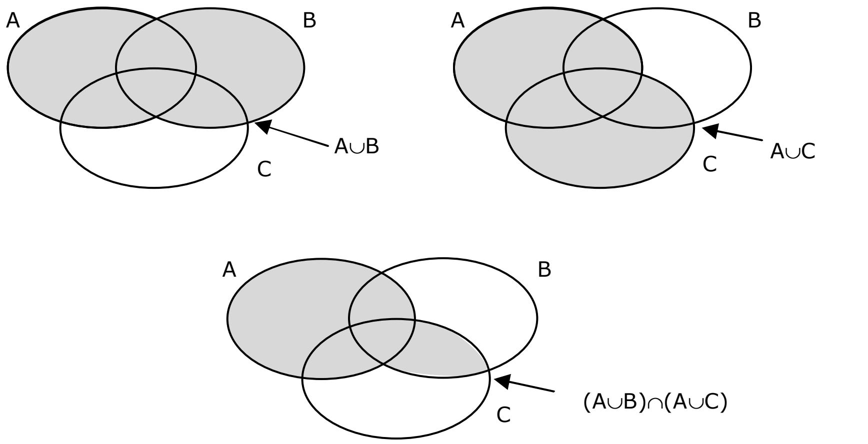

Figura I1.7
(A∪B)∩(A∪C) con i diagrammi di Venn.

Dai diagrammi di Venn delle figure precedenti risulta che il primo membro è uguale al secondo membro.

I1.4 Prodotto cartesiano

Una **coppia ordinata**, indicata da (a, b), è un insieme, formato dagli elementi a e b **in quest'ordine**.

Negli insiemi l'ordine, come si è detto, non ha importanza, quindi $\{a, b\}=\{b, a\}$.
Per le coppie ordinate conta l'ordine, quindi $(a, b)\neq(b, a)$.

Dati due insiemi A e B si dice **prodotto cartesiano** di A e di B, e si indica con AxB, l'insieme seguente:

$$A\text{x}B=\{ (a, b) \mid a\in A \text{ e } b\in B\}.$$

Il prodotto cartesiano è pertanto l'insieme delle coppie ordinate che hanno nella prima posizione un elemento di A e nella seconda posizione un elemento di B.
La **cardinalità** dell'insieme AxB è il prodotto delle cardinalità degli insiemi A e B, ossia $|A\text{x}B|=|A|\cdot|B|$.

Esempio I1.9
Dati gli insiemi $A=\{1, 2, 3\}$ e $B=\{a, b\}$ il prodotto cartesiano ha cardinalità $6=3\cdot 2$ ed è l'insieme seguente:

$$A\text{x}B=\{ (1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\ \}.$$

Esempio I1.10
Dati gli insiemi $A=\{1, 2, 3\}$ e $B=\{a, b\}$ si rappresenta graficamente il prodotto cartesiano per mezzo di punti sugli assi cartesiani.

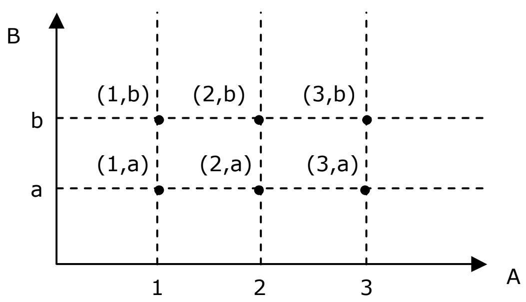

Figura I1.8
Rappresentazione sugli assi cartesiani di AxB.