G8. Integrali definiti

G8.1 Calcolo dell'integrale definito

Significato geometrico di integrale definito:
L'integrale rappresenta l'area tra una funzione e l'asse delle x.

Procedimento per calcolare l'area tra una funzione e l'asse x nell'intervallo [a,b].
Si calcola la primitiva della funzione F(x).
Si utilizza la formula:

$$\boxed{\text{Area} = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)}$$

in cui F(a) è la primitiva calcolata nel punto a ed F(b) è la primitiva calcolata nel punto b.

Il simbolo $\int_a^b f(x)dx$ si legge "*integrale definito tra a e b di f(x)*".

<u>Esempio G8.1</u>:
Si calcoli l'area tratteggiata in figura G8.1 tra la funzione $y=x^2$ e l'asse x.

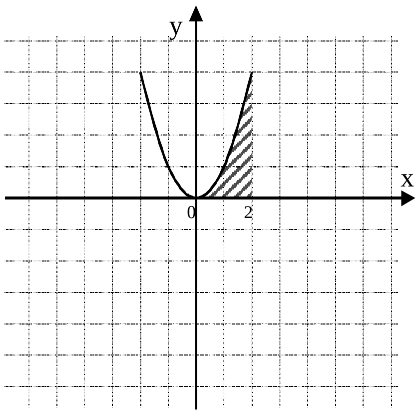

Fig. G8.1
Calcolo dell'area tra la funzione
$y=x^2$ e l'asse x.

L'area di cui si cerca la misura è quella tra la funzione e l'asse x nell'intervallo [0;2].
Si applica la regola e si ottiene la misura dell'area.

$$\text{Area} = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{0^3}{3}\right] = \frac{8}{3}-0 = \frac{8}{3}.$$

<u>Osservazione:</u>
Si noti che il "+c" scompare.

Infatti: $\text{Area} = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)+c\right]_a^b = \left[F(b)+c\right]-\left[F(a)+c\right] = F(b)+c-F(a)-c = F(b)-F(a).$

ATTENZIONE:

Se la funzione è in parte sotto l'asse x l'area risulterà negativa!!
Ciò potrebbe portare ad errori nel calcolo dell'area.

Esempio G8.2:
Si calcoli l'area in figura G8.2 tra la funzione $y=x^2-1$ e l'asse x.

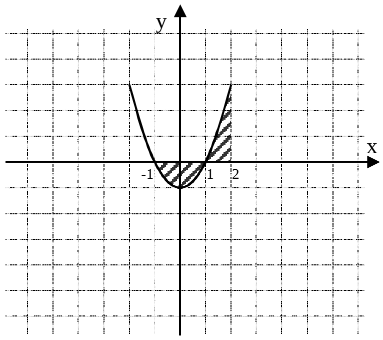

Fig. G8.2
Calcolo dell'area tra la funzione
$y=x^2-1$ e l'asse x.

PROCEDIMENTO ERRATO:
Si calcola l'area tra la funzione e l'asse x nell'intervallo [-1;2].

$$\text{Area} = \int_{-1}^{2} x^2-1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^3}{3}-2\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right] = \frac{8}{3}-2-\left[\frac{-1}{3}+1\right] = \frac{8}{3}-2+\frac{1}{3}-1 = \frac{8-6+1-3}{3} = 0 \quad !!!$$

Ovviamente il risultato è non attendibile. Il giusto procedimento prevede di calcolare separatamente le aree negli intervalli [-1;1] e [1;2] e poi sommarle.

PROCEDIMENTO CORRETTO:

$$\text{Area}(1) = \int_{-1}^{1} x^2-1x^2-1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1^3}{3}-1\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right] = \frac{1}{3}-1-\left[\frac{-1}{3}+1\right] = \frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1 = \frac{1-3+1-3}{3} = \frac{-4}{3}\ .$$

L'area da considerare non sarà $-\frac{4}{3}$ ma $\frac{4}{3}$, in quanto non si considera l'area con segno meno.

$$\text{Area}(2) = \int_{1}^{2} x^2-1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2} = \left[\frac{2^3}{3}-2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-1\right] = \frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1 = \frac{8-6-1+3}{3} = \frac{4}{3}\ .$$

Area = Area(1)+Area(2) = $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

G8.2 Calcolo di aree

Può capitare di dover calcolare l'area tra due funzioni, oppure l'area di figure geometriche.
In questo capitolo si vedrà come utilizzare l'integrale per trovare anche queste aree.

1° caso: Trovare l'area tra le due funzioni y=f(x) e y=g(x).

PROCEDIMENTO:

Trovare i punti di intersezione tra le funzioni y=f(x) e y=g(x) risolvendo il sistema $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$.

Il risultato sono i punti $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$. L'area è data dall'integrale definito seguente:

$$\boxed{\text{Area} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)-g(x)\,dx = \left[F(x)-G(x)\right]_{x_1}^{x_2}}$$

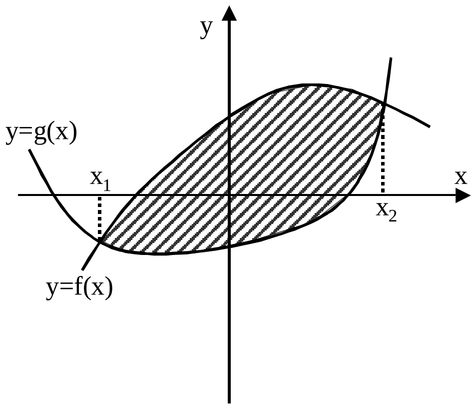

Fig. G8.3
Calcolo dell'area tra le funzioni
y=f(x) e y=g(x).

ATTENZIONE: Si intende per f(x) la funzione "sopra" e per g(x) la funzione "sotto". Se si scambiassero le due funzioni l'area verrebbe di segno opposto a quello corretto.

<u>Esempio G8.3</u>:

Trovare l'area tra le funzioni y=x+2 e la funzione $y=\frac{x^2}{2}-2$.

Si traccia il grafico delle due funzioni (figura G8.4).

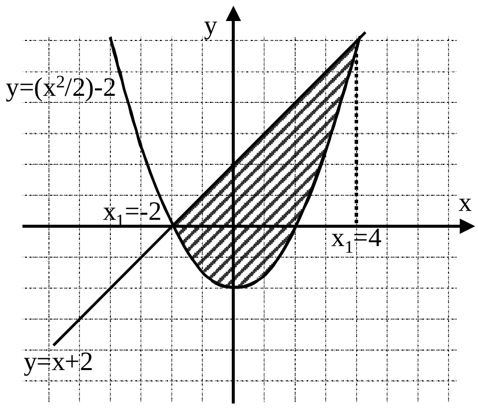

Fig. G8.4
Calcolo dell'area tra le funzioni
y=x+2 e $y=\frac{x^2}{2}-2$.

Si risolve il sistema tra le due funzioni per determinarne i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}-2 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{2}-2=x+2 \Rightarrow \frac{x^2}{2}-x-4=0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-8}{2}=0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_1=-2 \end{cases}.$$

Si risolve l'integrale: $\int_{-2}^{4}(x+2)-\left(\frac{x^2}{2}-2\right)dx$.

$$\text{Area}=\int_{-2}^{4}(x+2)-\left(\frac{x^2}{2}-2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{6}+2x\right]_{-2}^{4}=\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-2}^{4}=$$

$$=\left[-\frac{4^3}{6}+\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{6}+\frac{(-2)^2}{2}+4\cdot(-2)\right]=$$

$$=\left[-\frac{64}{6}+\frac{16}{2}+16\right]-\left[\frac{8}{6}+\frac{4}{2}-8\right]=\left[\frac{-64+48+96}{6}\right]-\left[\frac{8+12-48}{6}\right]=\left[\frac{80}{6}\right]-\left[\frac{-28}{6}\right]=\frac{80+28}{6}=\frac{108}{6}=18$$

2° caso: Trovare l'area delimitata da più funzioni.

PROCEDIMENTO:

Bisogna suddividere l'area in più parti in modo da ricondursi al caso precedente.
Nell'esempio in figura G8.5 con le tre funzioni y=f(x), y=g(x) e y=h(x) si devono trovare i punti di intersezione x_1, x_2, e x_3.

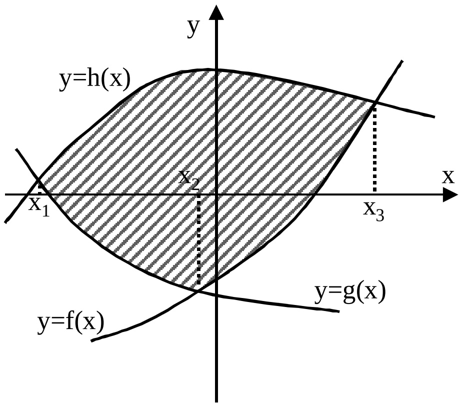

Fig. G8.5
Calcolo dell'area tra le funzioni
y=f(x), y=g(x) e y=h(x).

Poi si calcola l'area tra h(x) e g(x) nell'intervallo [x_1, x_2] con l'integrale $\int_{x_1}^{x_2} h(x)-g(x)\,dx=\left[H(x)-G(x)\right]_{x_1}^{x_2}$.

Si calcola l'area tra h(x) e f(x) nell'intervallo [x_2, x_3] con l'integrale $\int_{x_2}^{x_3} h(x)-f(x)\,dx=\left[H(x)-F(x)\right]_{x_2}^{x_3}$.

Si sommano le due aree.

Altri casi si risolvono suddividendo in maniera analoga la figura di cui calcolare l'area.