B11. RADICALI

In questo capitolo si vogliono illustrare in maniera sintentica utilizzando molti esempi le regole per il calcolo delle espressioni contenenti radicali.

B11.1 Semplificazione di radicali

Si può semplificare l'esponente del radicando con l'indice della radice.

Esempio B11.1: $\sqrt[10]{2^{12}}=\sqrt[5]{2^6}$

Esempio B11.2: $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

Esempio B11.3: $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

Esempio B11.4: $\sqrt[4]{-9}$ non si può calcolare la radice PARI di un numero negativo.

Esempio B11.5: $\sqrt{a^2+4}$ non si possono semplificare gli addendi.

Esempio B11.6: $\sqrt{a^2+4a+4}=\sqrt{(a+2)^2}=(a+2)$

In realtà questa semplificazione non è corretta. Se a valesse, ad esempio, -5, il risultato sarebbe -3! Non è possibile che una radice pari assuma un valore negativo. Per svolgere correttamente l'esercizio si deve mettere il valore assoluto al risultato. $\sqrt{a^2+4a+4}=\sqrt{(a+2)^2}=|a+2|$.

In generale nelle radici pari vale la seguente regola: se semplificando un esponente pari tale esponente diventa dispari si deve mettere il valore assoluto al termine con l'esponente.

B11.2 Somma di radicali

E' possibile sommare solamente radicali simili (ossia con la stessa parte radicale).
Non è possibile sommare monomi non simili. Altrettanto vale per i radicali.

Esempio B11.7: $3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Esempio B11.8: $3\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ non si possono sommare.

B11.3 Potenza di radicali

Si eleva a potenza il radicando.

Esempio B11.9: $(\sqrt{2})^2=2$; $(\sqrt{5})^2=5$; $(\sqrt{3})^2=3$; $(\sqrt{\text{pippo}})^2=\text{pippo}$

Esempio B11.10: $(3\sqrt{2})^2=9\cdot 2=18$

Esempio B11.11: $(\sqrt{2a-1})^3=\sqrt{(2a-1)^3}=\sqrt{8a^3-12a^2+6a-1}$

B11.4 Prodotto di radicali

Per moltiplicare due radicali si moltiplicano i coefficienti numerici e si moltiplica la parte radicale.

Esempio B11.12: $3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}=15\sqrt{6}$

Esempio B11.13: $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{8}=6\sqrt{16}=6\cdot 4=24$

Se le due radici hanno indice differente si devono prima portare le radici allo stesso indice. L'indice comune sarà il minimo comune multiplo degli indici dei termini del prodotto.

Esempio B11.14: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 6^2}=\sqrt[6]{288}$

B11.5 Portare dentro

Il coefficiente di un radicale può essere portato al suo interno elevandolo all'indice del radicale.

Esempio B11.15: $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}$

Esempio B11.16: $2a\sqrt[3]{3a}=\sqrt[3]{(2a)^3\cdot 3a}=\sqrt[3]{24a^4}$

B11.6 Portare fuori

E' OBBLIGATORIO ESEGUIRE QUESTO PASSAGGIO ANCHE SE NON E' RICHIESTO.

Procedimento:

- Scomporre in fattori il radicando.
- Si possono portare fuori solo i fattori che hanno un esponente superiore o uguale all'indice della radice.
- Si divide l'esponente del fattore per l'indice della radice;

Il **risultato** della divisione è **l'esponente del fattore fuori radice**.
Il **resto** della divisione è **l'esponente del fattore che rimane sotto radice**.

Esempio B11.17: $\sqrt[5]{a^{23}b^{10}c^5d^2}=a^4b^2c\cdot\sqrt[5]{a^3d^2}$

a 23:5=4 con il resto di 3. Fuori radice va quindi a^4 e dentro radice a^3.
b 10:5=2 con il resto di 0. Fuori radice va quindi b^2 e dentro radice b^0 ossia 1 che non si scrive.
c 5:5=1 con il resto di 0. Fuori radice va quindi c^1 ossia c, e dentro radice c^0 ossia 1 che non si scrive.
d 2<5 quindi d^2 resta sotto radice.

Esempio B11.18: $\sqrt{50}=\sqrt{5^2\cdot 2}=5\sqrt{2}$

Si scompone 50 = $5^2\cdot 2$.
5 2:2=1 con il resto di zero. Fuori radice va quindi 5^1 e dentro radice 5^0 ossia 1 che non si scrive.
2 ha esponente 1<2 quindi 2 resta sotto radice.

Esempio B11.19: $\sqrt[3]{24a^4}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3\cdot a^4}=2a\sqrt[3]{3a}$

Si scompone 24 = $2^3\cdot 3$.
2 3:3=1 con il resto di zero. Fuori radice va quindi 2^1 ossia 2 e dentro 2^0 ossia 1 che non si scrive.
a 4:3=1 con il resto di 1. Fuori radice va quindi a^1 ossia a e dentro a^1 ossia a.
3 l'esponente 1<3 quindi il 3 resta sotto radice.

B11.7 Razionalizzazione

E' OBBLIGATORIO ESEGUIRE QUESTO PASSAGGIO ANCHE SE NON E' RICHIESTO.

Si deve razionalizzare ogni volta che si trova una radice al denominatore.

Lo scopo della razionalizzazione è quello di fare in modo che non ci siano radici al denominatore.

Per razionalizzare si moltiplicano numeratore e denominatore per uno stesso fattore razionalizzante. A seconda di cosa c'è al denominatore si deve utilizzare un differente fattore razionalizzante. Si espongono qui i principali casi che si possono verificare.

CASO 1 – Al denominatore c'è una radice quadrata.
In questo caso si moltiplica sia il numeratore che il denominatore per la radice stessa.

Esempio B11.20: $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Esempio B11.21: $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$

Esempio B11.22: $\frac{4}{3\sqrt{6}}=\frac{4}{3\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\cancel{4}\sqrt{6}}{3\cdot\cancel{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

CASO 2 – Al denominatore c'è la somma di due termini di cui almeno uno dei due è una radice.
In questo caso si moltiplica sia il numeratore che il denominatore per il denominatore stesso nel quale è stato cambiato un segno.

Esempio B11.23: $\frac{2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=2\left(\sqrt{2}+1\right)$

Esempio B11.24: $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{\cancel{4}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

Esempio B11.25: $\frac{9}{4-\sqrt{7}}=\frac{9}{4-\sqrt{7}}\cdot\frac{4+\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}=\frac{\cancel{9}\left(4+\sqrt{7}\right)}{\cancel{16-7}}=4+\sqrt{7}$

CASO 3 – Al denominatore c'è una radice di indice superiore al due.
In questo caso si moltiplica sia il numeratore che il denominatore per una radice che abbia lo stesso indice della radice al denominatore. L'esponente del radicando del fattore razionalizzante sarà la differenza tra l'indice della radice e l'esponente del radicando da razionalizzare.

Regola: $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}}$

Esempio B11.26: $\frac{2}{\sqrt[7]{x^2}} = \frac{2}{\sqrt[7]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[7]{x^5}} = \frac{2\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{2\sqrt[7]{x^5}}{x}$

Esempio B11.27: $\frac{9}{\sqrt[3]{3}} = \frac{9}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{9\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\cancel{9}\sqrt[3]{3^2}}{\cancel{3}} = 3\sqrt[3]{3^2}$

Prima di razionalizzare talvolta si deve portare fuori, come nell'esempio seguente:

Esempio B11.28: $\frac{1}{\sqrt[4]{32a}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^5 a}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{2a}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{2a}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3 a^3}}{\sqrt[4]{2^3 a^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3 a^3}}{2\sqrt[4]{2^4 a^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^3 a^3}}{2 \cdot 2a} = \frac{\sqrt[4]{2^3 a^3}}{4a}$

B11.8 Potenze a esponente frazionario

Le radici possono essere scritte come potenze a esponente frazionario.
Regole di passaggio da radice a esponente frazionario e viceversa:

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ il denominatore dell'esponente è l'indice della radice.
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ l'esponente negativo inverte la frazione.
- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ le due regole combinate.

Si possono utilizzare le regole per passare da una all'altra delle due notazioni.

Esempio B11.29: $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

Esempio B11.30: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Esempio B11.31: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Esempio B11.32: $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$

Esempio B11.33: $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

Esempio B11.34: $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Esempio B11.35: $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}} = a^{-\frac{2}{5}}$

La notazione esponenziale è comoda per effettuare alcune operazioni. Ecco un esempio in cui tale notazione risulta utile:

Esempio B11.36: $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}} = 2^{\frac{8+15}{12}} = 2^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{2^{23}} = 2 \cdot \sqrt[12]{2^{11}}$

Per moltiplicare due radici di indice diverso si sono trasformate tali radici in notazione esponenziale; poi si sono sommati gli esponenti. Nell'ultimo passaggio si è portato fuori.

B11.9 Radice di un radicale

Se una radice si trova dentro un'altra radice si moltiplicano gli indici delle radici.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Esempio B11.37: $\sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}$

B11.10 Radicali doppi

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Tali formule si utilizzano principalmente se a^2-b è un quadrato perfetto.

Esempio B11.38:

$$\sqrt{11+\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-21}}{2}}+\sqrt{\frac{11-\sqrt{121-11}}{2}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{100}}{2}}+\sqrt{\frac{11-\sqrt{100}}{2}}=\sqrt{\frac{11+10}{2}}+\sqrt{\frac{11-10}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{21}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{42}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{42}+\sqrt{2}}{2}$$