C9. Il teorema di Talete e la similitudine

C9.1 Il teorema di Talete

E' detto **rapporto tra due segmenti** AB e CD il rapporto tra le misure dei due segmenti.
Dati 4 segmenti AB, CD, A'B' e C'D' si dice che essi sono **segmenti in proporzione** se AB:CD=A'B':C'D'.

Si consideri la figura C10.1.
In tale figura ci sono due rette r ed s tagliate da un fascio di rette parallele.
Ai punti A, B, C, D sulla retta r corrispondono i punti A', B', C', D' sulla retta s.
Tale corrispondenza è detta corrispondenza di Talete.

Teorema di Talete
Un fascio di rette parallele determina sulle rette trasversali segmenti proporzionali.

IPOTESI: le rette a, b, c sono parallele tagliate da due trasversali r, s.
TESI: BC:AB=B'C':A'B'.

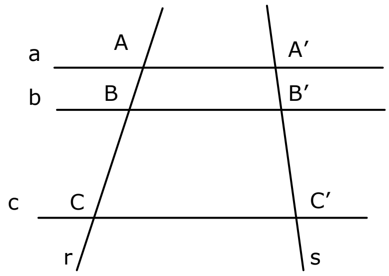


Fig. C9.1
Rette parallele tagliate da due trasversali.

DIMOSTRAZIONE
Si farà riferimento alla figura C9.2.
Congiungendo B con C' e C con B' si ottengono due triangoli BB'C e BB'C'. Questi due triangoli, avendo la stessa base BB' e la stessa altezza (che è la distanza tra le rette b e c) sono equivalenti. L'area dei due triangoli è dunque la stessa, quindi si può scrivere Area(BB'C)=Area(BB'C').
Dividendo ambo i membri per lo stesso numero l'uguaglianza resta verificata. Si dividono ambo i membri per l'area del triangolo ABB', e si ottiene

Area(BB'C):Area(ABB')=Area(BB'C'):Area(ABB'). *

Considerando le basi AB' e B'C' l'altezza dei triangoli BB'C' e ABB' è la stessa, in quanto è la distanza del punto B dalla retta s. Indicando tale altezza con h si ha: Area(BB'C'):Area(ABB')=(B'C'·h/2):(AB'·h/2)=B'C':AB'. Sostituendo nella formula indicata con * si ottiene

Area(BB'C):Area(ABB')= B'C':AB'. **

In maniera analoga si consideri che l'altezza dei triangoli ABB' e BB'C rispetto alle basi AB e BC è la stessa. Sia tale altezza h'. Allora si ha Area(BB'C'):Area(ABB')=(BC·h'/2):(AB·h'/2)=BC:AB. Sostituendo nella formula indicata con ** si ottiene

BC:AB B'C':AB'.

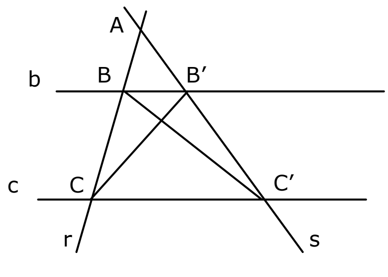


Fig. C9.2
Dimostrazione del teorema di Talete.

Una volta dimostrato questo teorema risulta semplice dimostrare il seguente corollario, la cui dimostrazione è omessa e viene lasciata per esercizio.

Corollario
Dato un triangolo qualsiasi una retta parallela a un lato divide gli altri due lati in segmenti proporzionali.

Se si considerano come trasversali due lati di un triangolo e come rette parallele il terzo lato e una sua parallela, come in figura C10.2, valgono le seguenti proporzioni:
AD:DB=AE:EC, AD:AB=AE:AC, AB:DB=AC:EC
eccetera

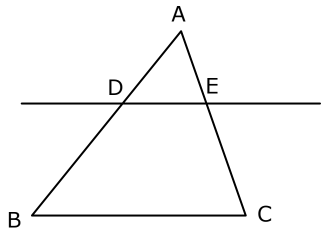


Fig. C9.3
Teorema di Talete in un triangolo.

Vale anche il teorema inverso, la cui dimostrazione può essere svolta per esercizio. (Si consiglia di effettuare la dimostrazione per assurdo)

Corollario
Se una retta che interseca due lati li divide in segmenti proporzionali allora essa è parallela al terzo lato.

C9.2 Il teorema della bisettrice

Teorema della bisettrice
In un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai due lati.
IPOTESI: ABC triangolo. $A\hat{B}D \cong D\hat{B}C$.
TESI: AD:DC=AB:BC.
DIMOSTRAZIONE
Si fa riferimento alla figura C9.4. Si costruisca la parallela a BD passante per A. Essa incontra il prolungamento del lato BC in un punto E. $A\hat{E}B \cong D\hat{B}C$ perché corrispondenti. $A\hat{B}D \cong E\hat{A}B$ perché alterni interni. Da ciò segue che $A\hat{E}B \cong D\hat{B}C \cong A\hat{B}D \cong E\hat{A}B$, da cui il triangolo ABE è isoscele sulla base AE, e quindi AB≅BE.
Per il teorema di Talete si ha AD:DC=BE:BC. Essendo BE≅ AB si ottiene AD:DC=AB:BC.

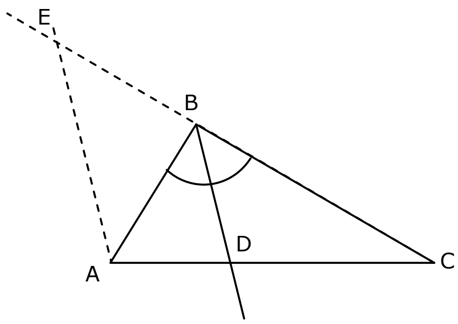
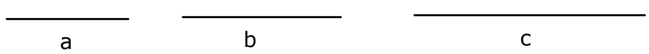


Fig. C9.4
Teorema della bisettrice.

C9.3 Applicazione del teorema di Talete (dividere un segmento in parti proporzionali)

Utilizzando il teorema di Talete è possibile, conoscendo due segmenti a e b, dividere il segmento c in parti proporzionali ai segmenti a e b.

Dati:



Svolgimento: si traccia una semiretta e si riportano su di essa a e b. Dall'origine della semiretta si riporta c in un'altra direzione. Si unisce B con C trovando una retta r, si traccia la parallela ad r passante per A che interseca la retta OC nel punto D. Il segmento c è stato così diviso in due parti OD e DC proporzionali rispettivamente ad a e b. Per verificare che la costruzione permetta di trovare due segmenti proporzionali basta applicare il teorema di Talete al triangolo OBC.

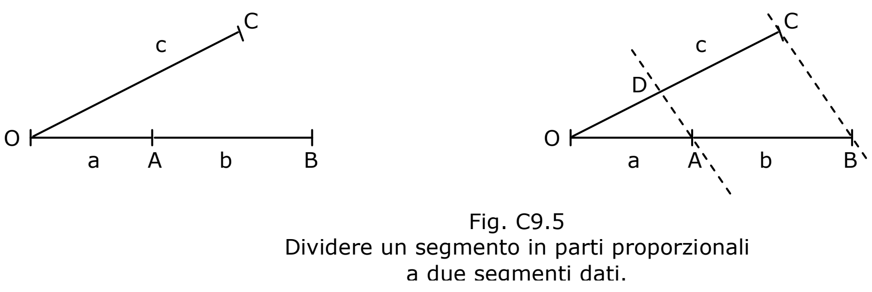
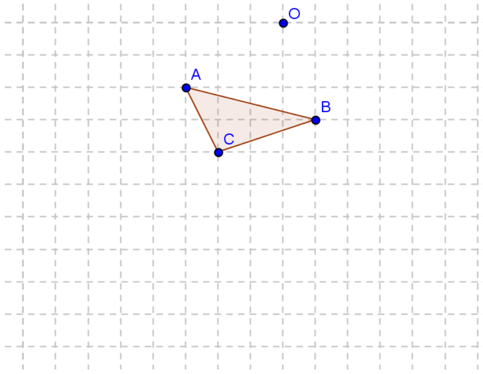


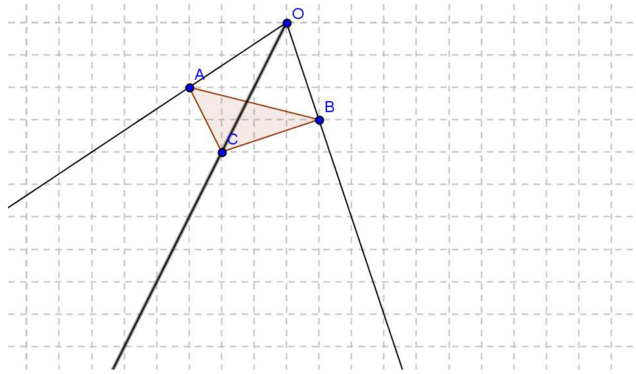
Fig. C9.5
Dividere un segmento in parti proporzionali
a due segmenti dati.

C9.4 Omotetie

Per comprendere il concetto di omotetia si propone il seguente esempio.
Esempio:
Dato un triangolo ABC se ne disegni uno avente lati doppi.
Costruzione:

- Si sceglie un punto O detto centro di proiezione
- Si tracciano le semirette aventi origine in O e passanti per A, B e C.
- Si disegni sulla semiretta OA un punto A′ tale che OA≅AA′ con A′≠O.
- Si disegni sulla semiretta OB un punto B′ tale che OB≅BB′ con B′≠O.
- Si disegni sulla semiretta OC un punto C′ tale che OC≅CC′ con C′≠O.
- Il triangolo A′B′C′ è il triangolo cercato.





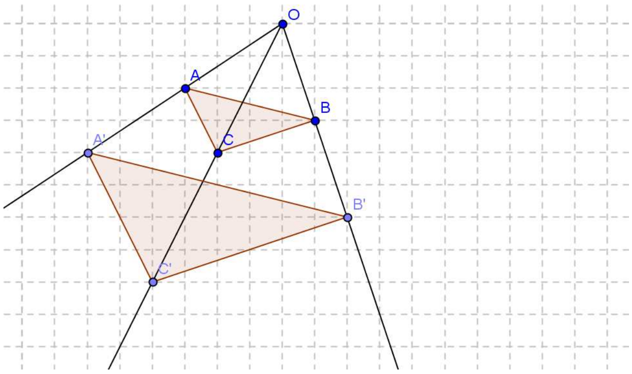


Fig. C9.6
Esempio di omotetia.

L'omotetia, come l'isometria, è una trasformazione geometrica, in quanto è una funzione biunivoca che associa punti del piano a punti del piano. A differenza dell'isometria le figure non vengono trasformate in figure ad esse congruenti. Infatti nell'esempio appena mostrato si è ingrandita una figura di due volte, e quindi la trasformata non è congruente alla figura di partenza. Una omotetia permette quindi di ingrandire) o rimpicciolire una figura secondo un certo numero k. Se k=2 la figura viene ingrandita del doppio, se k=3 la figura viene ingrandita di 3 volte e così via. Se invece k=0.5 allora le dimensioni della figura vengono dimezzate. Se si assume k come negativo non si riporterà il punti A′ sulla retta OA ma sulla semiretta ad essa opposta..

Si può adesso dare la definizione di omotetia.

Definizione
Una omotetia avente centro O e rapporto di omotetia k≠0 è una trasformazione geometrica che al punto O associa il punto O e trasforma ogni punto del piano A in un punto A′ tale che:

- Se k>0 allora A′ appartiene alla semiretta OA e OA′≅k·OA.
- Se k<0 allora A′ appartiene alla semiretta opposta a OA e OA′≅-k·OA.

Osservazioni

- Se k=0 tutti i punti del piano hanno come trasformato il punto O. La trasformazione non è più una funzione biunivoca tra punti del piano e dunque **non è una trasformazione geometrica** per come essa era stata definita.
- Se k=1 tutti i punti del piano restano al loro posto. La trasformazione geometrica, come già detto, è in questo caso chiamata **identità**.
- Se k=-1 ogni punto del piano A viene spostato dalla parte opposta rispetto a O in maniera tale che OA≅OA′. Si è dunque in presenza di una **simmetria centrale**.
- Se k>1 o k<-1 la figura trasformata è ingrandita rispetto alla figura di partenza.
- Se -1<k<1 con k≠0 allora la figura trasformata è rimpicciolita rispetto alla figura di partenza.
- Le omotetie trasformano angoli in angoli congruenti.

C9.5 Similitudine

Per capire intuitivamente cosa è la similitudine si può pensare agli ingrandimenti di una fotografia. Le persone su di essa rappresentate appaiono più grandi o più piccole, però *hanno la stessa forma*. Quello che si cercherà di definire in questo paragrafo è che cosa si intende in matematica quando si dice *avere la stessa forma*.
E' ovvio che due quadrati (figura C9.7) hanno la stessa forma.
In figura C9.8 sono rappresentati 3 rettangoli. I primi due hanno la stessa forma, il terzo no, anche se è comunque un rettangolo.

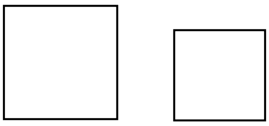


Fig. C9.7
Figure simili.

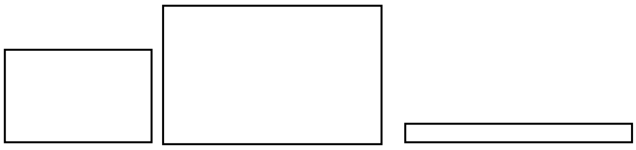


Fig. C9.8
Rettangoli non simili.

Definizione
Si dice che due figure sono **simili** se hanno:
- gli angoli *rispettivi* congruenti.
- i lati *rispettivi* in proporzione.

La similitudine tra due figure è indicata con il simbolo ~.

Perché si è usata la parola *rispettivi*?
Si considerino come esempio i due poligoni in figura C9.9.Il primo poligono ha i lati di misura 5, 5, 6, 8, 10, e così il secondo.Il primo poligono ha gli angoli di 90°, 90°, 90°, 143° (circa), 127° (circa), e così il secondo.
Le due figure hanno dunque i lati di uguale misura e gli angoli di uguale misura. E' ovvio che le due figure NON hanno la stessa forma! Il problema è che andando in senso orario (o antiorario) affinché le figure siano simili si devono avere gli angoli nello stesso ordine, ed in questo caso invece l'ordine non è rispettato.

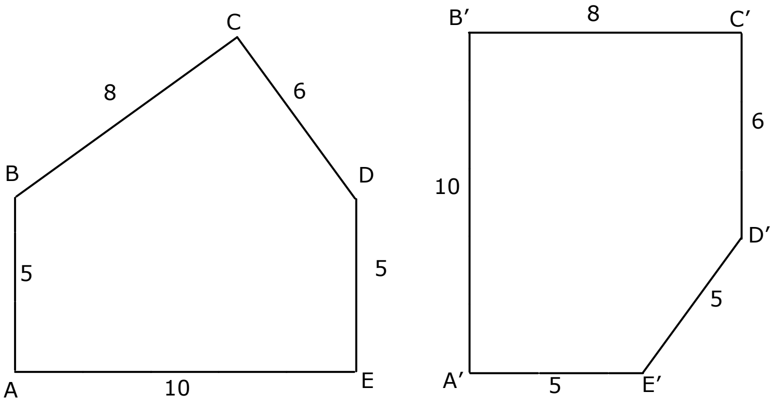


Fig. C9.9
Figure con angoli e lati della stessa misura
ma non congruenti e non simili tra loro.

Per quanto detto nel paragrafo precedente a proposito delle omotetie si ha che:
Una figura e la sua trasformata secondo una omotetia di centro O e rapporto k≠0 sono simili.

C9.6 Triangoli simili

Due triangoli sono **simili** se hanno gli angoli congruenti e i lati rispettivi in proporzione.
Si consideri, come in figura C9.10, un triangolo tagliato da una retta parallela a un lato. I triangoli ADE e ABC hanno:

- L'angolo $D\hat{A}E$ è congruente all'angolo $B\hat{A}C$ (sono sovrapposti)
- L'angolo $A\hat{D}E$ è congruente all'angolo $A\hat{B}C$ (corrispondenti)
- L'angolo $A\hat{E}D$ è congruente all'angolo $A\hat{C}B$ (corrispondenti)
- I lati sono in proporzione per il teorema di Talete.

I due triangoli, avendo gli angoli congruenti e i lati rispettivi in proporzione sono simili.

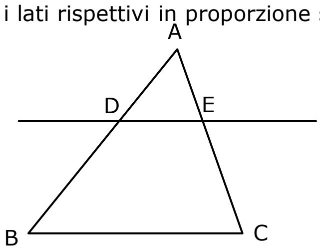


Fig. C9.10
ADE è simile ad ABC.

C9.7 Criteri di similitudine dei triangoli

Per verificare che due triangoli siano simili non è necessario controllare che tutti gli angoli siano congruenti e che tutti i lati siano in proporzione. Basta verificare in realtà qualcosa di meno, come specificato dai seguenti criteri di similitudine.

Teorema (I criterio di similitudine dei triangoli)
Due triangoli sono simili se hanno gli angoli rispettivamente congruenti (in realtà bastano due angoli congruenti, il terzo lo è perché la somma degli angoli interni di un triangolo è π).
IPOTESI: $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$.
TESI: ABC~A′B′C′.
DIMOSTRAZIONE
$\hat{C} \cong \hat{C}'$ perché la somma degli angoli interni di un triangolo è π.
Si consideri l'omotetia di centro A e rapporto di omotetia k tale che $A'C' \cong k \cdot AC$. Tale omotetia trasforma il triangolo ABC nel triangolo AB′′C′′ che è simile ad ABC. Si considerino i triangoli AB′C′ e AB′′C′′. Essi hanno:

- $\hat{A} \cong \hat{A}'$
- $AC'' \cong k \cdot AC \cong A'C'$.
- $\hat{B}'' \cong \hat{B} \cong \hat{B}'$, in quanto le omotetie conservano l'ampiezza degli angoli e $\hat{B} \cong \hat{B}'$ per ipotesi.

I triangoli AB′′C′′ e A′B′C′ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza e dunque AB′′C′′~A′B′C′~ABC.

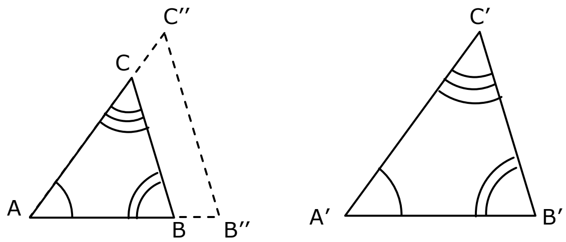


Figura C9.11
I criterio di similitudine
dei triangoli.

Teorema (II criterio di similitudine dei triangoli)
Due triangoli sono simili se hanno un angolo congruente compreso tra lati in proporzione.
La dimostrazione, simile alla precedente, è omessa.

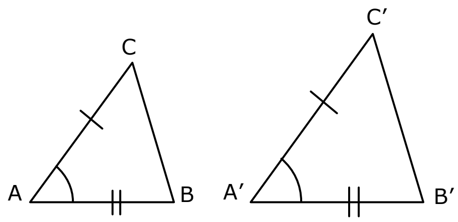


Fig. C9.12
II criterio di similitudine
dei triangoli.

Teorema (III criterio di similitudine dei triangoli)
Due triangoli sono simili se hanno i lati rispettivi in proporzione.
La dimostrazione, simile alla precedente, è omessa.

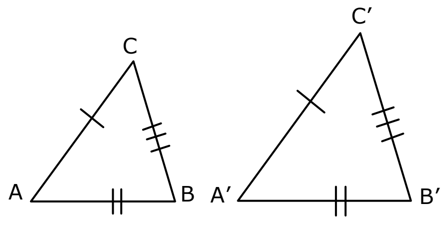


Fig. C9.13
III criterio di similitudine
dei triangoli.

C9.8 Il primo teorema di Euclide con la similitudine

Si considerino le notazioni della figura C9.14. Sono presenti tre triangoli, tutti simili tra loro:

- Il triangolo di lati a, b, c.
- Il triangolo di lati a, h, x.
- Il triangolo di lati b, h, y.

Ognuno dei tre triangoli ha infatti due angoli congruenti con gli altri due e per il primo criterio di similitudine essi sono simili.
Con le notazioni della figura C9.14 il I teorema di Euclide, per come era stato proposto precedentemente, assume la forma:

$$\mathbf{a^2=x\cdot c.}$$

La stessa formula può essere espressa in maniera differente come segue:

$$\mathbf{x:a=a:c}$$

Utilizzando quest'ultima formula si ottiene un modo alternativo di esprimere il I teorema di Euclide:

Un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stesso.

Infatti il triangolo di lati a, h e x è simile al triangolo di lati a, b e c, e quindi i loro lati sono in proporzione.

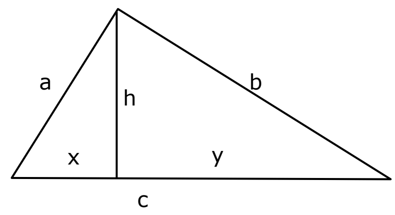


Fig. C9.14
I teorema di Euclide:
x:a=a:c

C9.9 Il secondo teorema di Euclide con la similitudine

Con le notazioni della figura C9.14 il II teorema di Euclide assume la forma:

$$\mathbf{h^2=x\cdot y}$$

La stessa formula può essere espressa in maniera differente come segue:

$$\mathbf{x:h=h:y}$$

Utilizzando quest'ultima formula si ottiene un modo alternativo di esprimere il II teorema di Euclide:

***L'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra la proiezioni dei cateti sull'ipotenusa*.**

Infatti il triangolo di lati a, h e x è simile al triangolo di lati h, b e y, e quindi i loro lati sono in proporzione.

C9.10 Similitudine, perimetri e aree

Teorema C9.10a
Se due triangoli ABC e A'B'C' sono simili con un rapporto di proporzionalità k allora lo sono anche i loro perimetri, ossia Perimetro(ABC)=k·Perimetro(A'B'C').
IPOTESI: ABC~A'B'C' con rapporto di proporzionalità k.
TESI: AB+AC+BC≅k·(A'B'+A'C'+B'C')
DIMOSTRAZIONE
Dal fatto che essi sono simili con rapporto di proporzionalità k segue che AB≅k·A'B', AC≅k·A'C', BC≅k·B'C'.
Da ciò si ha che AB+AC+BC≅ k·A'B'+ k·A'C' k·B'C'≅ k·(A'B'+A'C'+B'C') e i perimetri hanno rapporto di proporzionalità k.

Teorema C9.10b
Se due triangoli ABC e A'B'C' sono simili con un rapporto di proporzionalità k allora le loro aree hanno misura proporzionale a k^2, ossia Area(ABC)=k^2·Area(A'B'C').
IPOTESI: ABC~A'B'C' con rapporto di proporzionalità k.
TESI: Area(ABC)=k^2·Area(A'B'C').

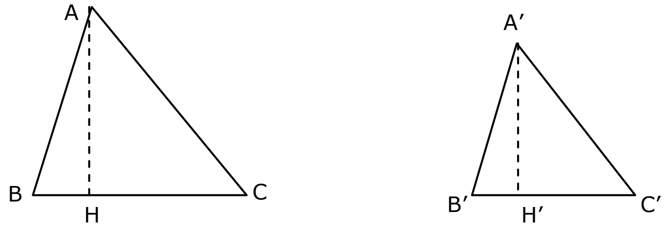


Fig. C9.15
Triangoli simili e aree

DIMOSTRAZIONE
Dal fatto che essi sono simili con rapporto di proporzionalità k segue che AB≅k·A'B', AC≅k·A'C', BC≅k·B'C', BH≅B'C'.

$$\text{Area}(ABC) = \frac{AC\cdot BH}{2} = \frac{kA'C'\cdot kB'H'}{2} = k^2\,\frac{A'C'\cdot B'H'}{2} = k^2\cdot \text{Area}(A'B'C')$$

I teoremi precedenti possono essere facilmente generalizzati ai poligoni, in quanto ogni poligono è scomponibile in triangoli, e se due poligoni sono simili lo sono anche i triangoli nei quali è possibile scomporli.

Teorema C9.10c

Se due poligoni $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ sono simili con un rapporto di proporzionalità k allora lo sono anche i loro perimetri, ossia Perimetro($\mathbb{P}$)=k·Perimetro($\mathbb{P}'$).

Teorema C9.10d

Se due poligoni $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ sono simili con un rapporto di proporzionalità k allora le loro aree hanno misura proporzionale a k^2, ossia Area($\mathbb{P}$)=k^2·Area($\mathbb{P}'$).

C9.11 Il teorema delle corde

Teorema delle corde

Siano date due corde passanti entrambe per un punto interno alla circonferenza. Tale punto le divide in due parti tali che le due parti di una corda siano i medi e le due parti dell'altra corda siano gli estremi di una proporzione.

IPOTESI: AB e CD sono due corde di una circonferenza che si intersecano in E.

TESI: AE:CE=DE:BE

DIMOSTRAZIONE

Gli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ insistono sullo stesso arco CB, quindi sono congruenti. Gli angoli $A\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$ insistono sullo stesso arco AD, quindi sono congruenti. Gli angoli $D\hat{E}B$ e $A\hat{E}C$ sono opposti al vertice, quindi sono congruenti. I triangoli ACE e DBE hanno dunque tutti gli angoli congruenti, e per il primo criterio di similitudine dei triangoli sono simili e dunque hanno i lati in proporzione. Da ciò segue che AE:CE=DE:BE.

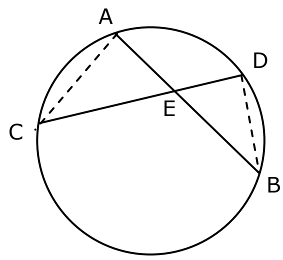


Fig. C9.16
Teorema delle corde.

C9.12 Il teorema delle secanti

Teorema delle secanti

Siano date due secanti a una circonferenza passanti per un punto esterno. Una delle secanti e la sua parte esterna sono i medi, l'altra delle secanti e la sua parte esterna sono gli estremi di una proporzione.

IPOTESI: EA e EC sono due rette secanti una circonferenza.

TESI: EA:EC=ED:EB

DIMOSTRAZIONE

Si considerino i triangoli AED e EBC. $\hat{E}$ è un angolo in comune. $E\hat{A}D$ e $E\hat{C}B$ sono congruenti perché insistono sullo stesso arco BD. Se hanno due angoli congruenti avranno anche il terzo perché la somma degli angoli interni dei triangoli è un angolo piatto. Da ciò segue che AED e EBC sono simili per il I criterio di similitudine, ed hanno pertanto i lati in proporzione. Si può concludere che EA:EC=ED:EB.

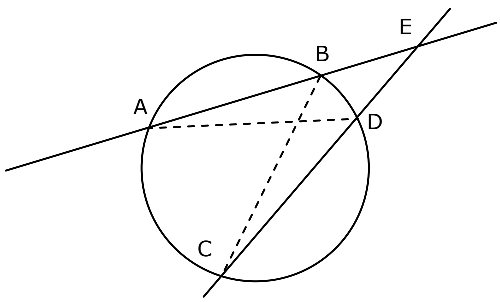


Fig. C9.17
Teorema delle secanti.

C9.13 Il teorema della tangente e della secante

Teorema della tangente e della secante

Siano date una secante e una tangente a una circonferenza passanti per un punto esterno alla circonferenza. Il segmento compreso tra il punto esterno e il punto di tangenza è medio proporzionale tra la secante e la sua parte esterna.

IPOTESI: AD è secante e CD tangente alla circonferenza.

TESI: AD:CD=CD:BD

DIMOSTRAZIONE

Si considerino i due triangoli ACD e BCD. L'angolo $A\hat{D}C$ e l'angolo $B\hat{D}C$ sono congruenti perché sono sovrapposti. L'angolo $B\hat{A}C$ e l'angolo $D\hat{C}B$ sono congruenti perché insistono sullo stesso arco BC. Se tali triangoli hanno due angoli congruenti avranno anche il terzo perché la somma degli angoli interni dei triangoli è un angolo piatto.
Da ciò segue che ACD e BCD sono simili per il I criterio di similitudine, ed hanno i lati in proporzione. Si può concludere che AD:CD=CD:BD.

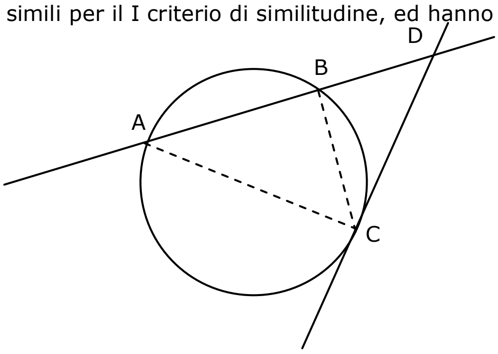


Fig. C9.18
Teorema della tangente e della secante.

C9.14 Raggi delle circonferenze inscritte e circoscritte

Raggio della circonferenza inscritta. Dato un triangolo qualunque si è già visto che l'incentro, punto di intersezione delle bisettrici, è il centro della circonferenza inscritta al triangolo.

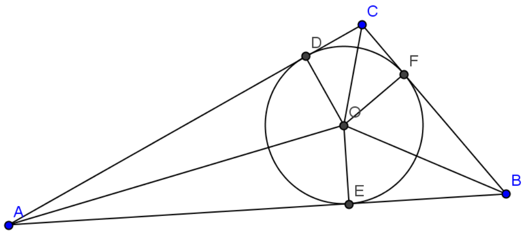


Fig. C9.19
Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

Si faccia riferimento alla figura C9.19. Calcoliamo l'area del triangolo ABC, e si indichi con r il raggio della circonferenza inscritta e con p il semiperimetro, ossia (AB+BC+AC)/2.

$$\text{Area}(ABC) = \text{Area}(ABO) + \text{Area}(BCO) + \text{Area}(ACO) = \frac{AB \cdot OE}{2} + \frac{BC \cdot OF}{2} + \frac{AC \cdot OD}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} = r\,\frac{AB + BC + AC}{2} = r \cdot p$$

Si ha dunque $\text{Area}(ABC) = r \cdot p$, da cui segue $\mathbf{r = \dfrac{Area(ABC)}{p}}$.

Raggio della circonferenza circoscritta. Dato un triangolo qualunque si è già visto che il circocentro, punto di intersezione degli assi, è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

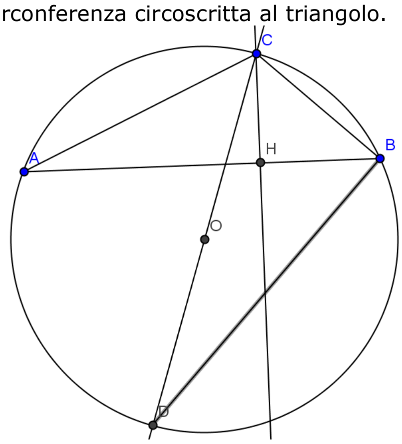


Fig. C9.20
Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo

Si faccia riferimento alla figura C9.20. CH è l'altezza relativa al lato AB, CD è un diametro della circonferenza circoscritta. Si considerino i triangoli DCB e AHC. Essi hanno:

- $C\hat{A}H \cong C\hat{D}B$ congruenti perché insistono sullo stesso arco CB.
- $A\hat{H}C \cong D\hat{B}C$ congruenti perché entrambi retti.

Essi sono simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati in proporzione, quindi AC:CD=CH:CB. CD è il diametro della circonferenza circoscritta, ossia 2R se si indica con R il suo raggio.

$AC:2R=CH:CB \Rightarrow 2R = \frac{AC \cdot CB}{CH} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot CB}{2CH} \Rightarrow R = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{2CH \cdot AB} = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{2CH \cdot AB}$

$CH \cdot AB$ è il doppio dell'area del triangolo ABC, da cui si può concludere che

$$\mathbf{R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot Area(ABC)}}.$$

C9.15 Esempi ed esercizi svolti

Esempio C9.15a - Talete e la Piramide

Talete di Mileto (VI secolo a.c.) è stato un filosofo, matematico e astronomo dell'antica Grecia. Si racconta che il faraone Amasis gli disse che la piramide di Cheope era così alta che nessuno ne poteva misurare l'altezza. Talete raccolse la sfida e riuscì, utilizzando un bastone, a misurarne l'altezza. Ecco il procedimento da lui adottato.

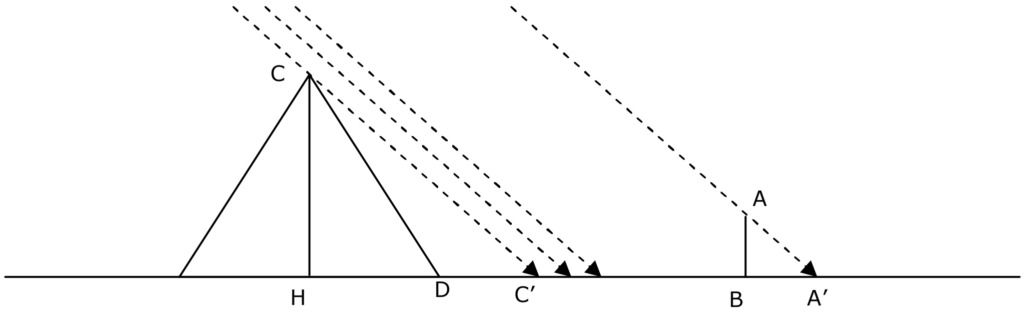


Fig. C9.21
Misurazione dell'altezza della piramide di Cheope.

Sia AB il bastone, BA' la sua ombra. CH l'altezza della piramide e HC' la sua ombra.
Non potendo misurare direttamente CH egli considerò che i triangoli ABA' e CHC' fossero simili, in quanto CH\\AB, HC'\\BA' e CC'\\AA' (i raggi del sole possono essere considerati paralleli).
Essendo simili essi hanno i lati in proporzione, e in particolare AB:BA'=CH:HC'.
Per calcolare CH si devono misurare AB (che è la lunghezza del bastone), BA' (la sua ombra) e HC'=HD+DC', dove HD è la metà del lato di base della piramide e DC' è l'ombra che può essere misurata sul terreno, poi basta usare la formula:

$$CH = \frac{AB \cdot HC'}{BA'}.$$

Esempio C9.15b - La sezione aurea

Per introdurre la sezione aurea (o rapporto aureo) si consideri il rettangolo in figura C9.22.

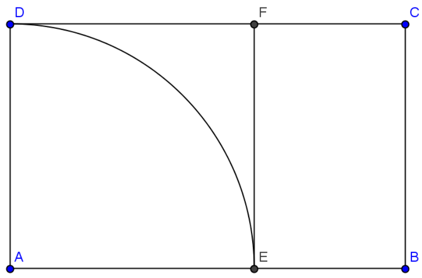


Fig. C9.22
Rettangolo con i lati in
rapporto aureo.

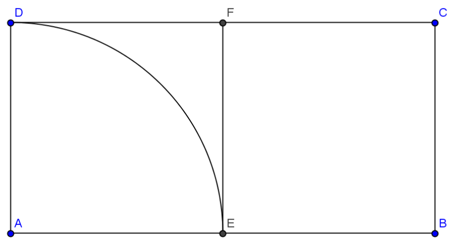


Fig. C9.23
Rettangolo con i lati non
in rapporto aureo.

Il rettangolo ABCD ha la seguente proprietà: costruendo il quadrato avente lato il lato minore del rettangolo si ottiene un altro rettangolo BEFC che è simile al rettangolo ABCD. E' evidente che questa proprietà non è vera per tutti i rettangoli, infatti in figura C9.23 è mostrato un rettangolo che evidentemente non è in rapporto aureo, e lo si capisce dal fatto che BEFC è un quadrato e quindi non può essere simile al rettangolo di partenza.
Si vuole calcolare il rapporto tra i lati del rettangolo in rapporto aureo. Tale rapporto sarà proprio il rapporto aureo.
Siano $AE \cong AD \cong BC$ aventi lunghezza a, EB avente lunghezza b e infine $AB \cong AE+EB$ avente lunghezza a+b.
Dal fatto che ABCD~ BEFC segue che

$$(a+b):a=a:b$$

Calcoliamo a in funzione di b utilizzando le proprietà delle proporzioni.

$$a^2 = (a+b)\cdot b \Rightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

L'ultima è una equazione letterale di secondo grado con incognita a. Risolviamola con la formula risolvente delle equazioni di secondo grado.

$$a_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(1)(-b^2)}}{2(1)} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} = b\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Si scarta la soluzione negativa in quanto un segmento non può avere lunghezza negativa e si ottiene che

$$a = b\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dividendo i due membri per b si ottiene infine

$$\mathbf{\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \varphi.$$

Questo numero, che vale circa 1.61803, è detto **sezione aurea o rapporto aureo**.
Dal punto di vista artistico sembra che un rettangolo avente i lati in rapporto aureo sia piacevole per l'occhio umano. Il Partenone in Grecia, la Gioconda di Leonardo da Vinci, alcune parti del viso umano sono in rapporto aureo.
I bancomat e le carte di credito hanno i lati in rapporto aureo.
Si consiglia di approfondire l'argomento, per esempio, su Wikipedia alle voci "rapporto aureo" o "rettangolo aureo".

Esempio C9.15c - Rapporto aureo in alcune figure geometriche
Il rapporto aureo è presente in alcune figure geometriche. Si consideri, ad esempio il triangolo isoscele avente gli angoli alla base di ampiezza la quinta parte dell'angolo piatto, ossia $\frac{\pi}{5} = 36°$.

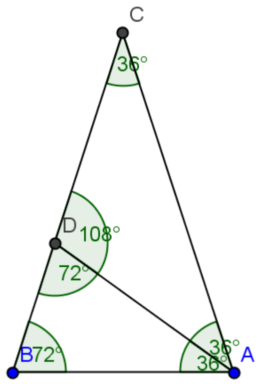


Fig. C9.24
Rettangolo con i lati in rapporto aureo.

AD è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. Per il teorema della bisettrice il lato BC è tagliato dalla bisettrice in segmenti proporzionali agli altri due lati del triangolo, ossia:

BD:DC=AB:AC.

Dal fatto che i triangoli ABD, BDC e ABC sono isosceli segue che AB≅AD≅CD e che AC≅AB. Sostituendo nella formula precedente si ottiene

BD:DC=DC:BC
BD:DC=DC:(BD+DC)

Vale la stessa relazione mostrata al punto precedente, quindi BD e DC sono in rapporto aureo, ossia DC=BD·φ, e anche BC=AB·φ. Tale triangolo è detto **triangolo aureo**.
Il decagono regolare può essere suddiviso in dieci triangoli simili a quello appena studiato.

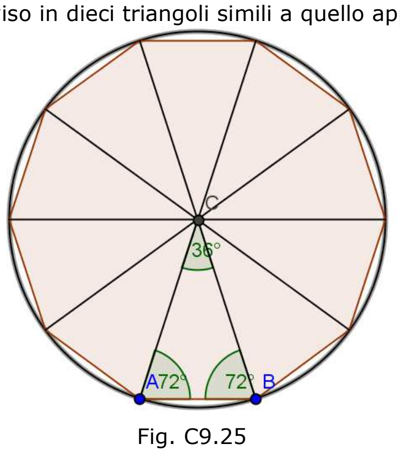


Fig. C9.25
Decagono regolare e rapporto aureo.

Considerando AC=r raggio della circonferenza circoscritta al decagono vale la relazione r=AB·φ. Calcoliamo AB a partire da questa relazione.

$$r = AB \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AB = r \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow AB = r \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = r \cdot \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = r \cdot \frac{-2\left(\sqrt{5}-1\right)}{-4}$$

da cui si può concludere

$$AB = r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Questo risultato sarà utile in trigonometria perché servirà a calcolare le funzioni goniometriche per l'angolo $\pi/10$.
Consideriamo infine il pentagono regolare inscritto in una circonferenza.

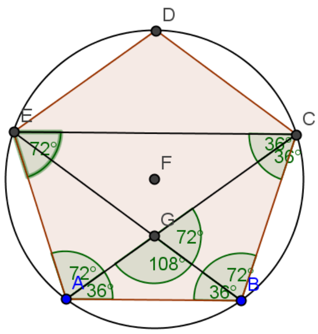


Fig. C9.26
Pentagono regolare e rapporto aureo.

I triangoli BCG e ACE sono triangoli simili a quelli visti precedentemente, quindi i loro lati sono in rapporto aureo.
Da ciò si può concludere che il lato di un pentagono è in rapporto aureo con la sua diagonale e il punto d' intersezione tra due diagonali divide ciascuna di esse in due segmenti che sono in rapporto aureo.

Esempio C9.15d - La corda parallela a un lato del triangolo
Dato un triangolo ABC si tracci la retta parallela ad AB che intersechi i lati AC e BC rispettivamente in D ed E.

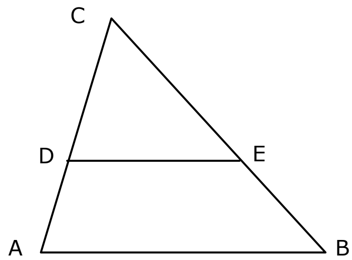


Fig. C9.27
Corda parallela a un lato del triangolo.

Conoscendo le misure dei 3 lati del triangolo AB, BC, AC e conoscendo inoltre la misura di AD si vuole determinare la lunghezza della corda DE. Per la similitudine dei triangolo ABC e DEC i loro lati sono in proporzione. Si può dunque scrivere che

DE:AB=CD:AC.

Il lato AC è però la somma di AD e DC, da cui CD=AC-AD. Si ottiene dunque

DE:AB=(AC-AD):AC.

Si può trovare infine DE con le proprietà delle proporzioni:

$$DE = \frac{(AC-AD)}{AC} \cdot AB.$$