C8. Teoremi di Euclide e di Pitagora

C8.1 Figure equiscomponibili

Due poligoni sono **equiscomponibili** se è possibile suddividerli nello stesso numero di poligoni a due a due congruenti. Il rettangolo e il triangolo in figura C8.1 sono equiscomponibili. E' infatti possibile suddividere il rettangolo in due figure A e B ed il triangolo in due figure A' e B' tali che A≅A' e B≅B'.

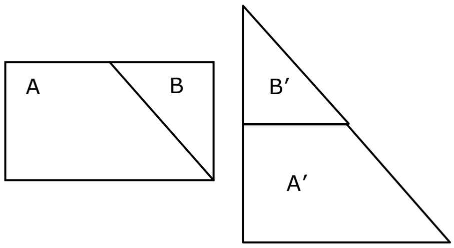

Fig. C8.1
Equiscomponibilità di poligoni.

C8.2 Figure equivalenti

Non si darà una definizione formale di **estensione** ma si introduce tale concetto in maniera intuitiva con il seguente esempio: due figure hanno la stessa estensione se esse occupano esattamente lo stesso numero di quadratini del foglio quadrettato. Se una figura occupa più quadratini di un'altra si dice che essa ha una maggiore estensione.
Ad esempio in figura C9.2 il quadrato e il cerchio hanno la stessa estensione, anche se risulta difficile provarlo contando il numero di quadretti che occupano.

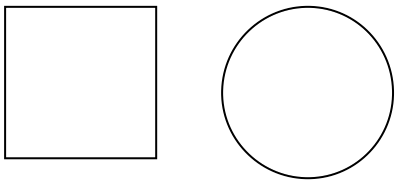

Fig. C8.2
Equivalenza di poligoni.

Due figure sono dette **equivalenti** (o **equiestese**) se hanno la stessa estensione.

Osservazione
'Essere equivalenti' è una relazione di equivalenza.
Infatti valgono le tre proprietà richieste:

- RIFLESSIVA ogni figura è equivalente a sé stessa.
- SIMMETRICA se A è equivalente a B allora B è equivalente ad A.
- TRANSITIVA se A è equivalente a B e B è equivalente a C allora A è equivalente a C.

Osservazione
Si noti che due figure equiscomponibili sono senz'altro equivalenti, mentre due figure equivalenti non è detto che siano equiscomponibili, come ad esempio il quadrato e il cerchio in figura C9.2.

C8.3 Area

L'area è la misura dell'estensione di una figura.
Per misurare l'area di una figura è necessario fissare una adatta unità di misura. Nel capitolo C2 si è definita la misura dei segmenti confrontandoli con un segmento fissato u che fungesse da unità di misura. Per misurare le aree si prenderà come unità di misura il quadrato di lato u, che verrà indicato con u^2. L'area di una qualsiasi figura sarà un multiplo o un sottomultiplo dell'unità di misura u^2.

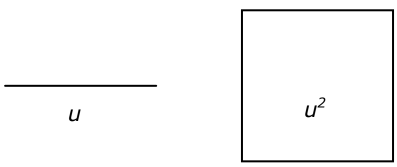

Fig. C8.3
Unità di misura delle lunghezze e delle aree.

Due figure equivalenti hanno la stessa area.

C8.4 Area e perimetro del rettangolo

Si consideri un rettangolo avente i lati di misura 3u e 4u. E' semplice osservare che il rettangolo contiene esattamente 12 quadratini di area u^2. Si dirà che il rettangolo ha area $12u^2$.

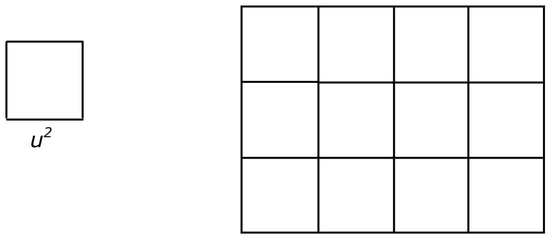

Fig. C8.4
Area del rettangolo.

Chiamando **base** e **altezza** i due lati del rettangolo si può intuitivamente concludere che l'area del rettangolo si calcola con la seguente formula:

$$\textbf{Area(rettangolo)=base}\cdot\textbf{altezza}$$

Tale formula resta valida anche nel caso in cui la base e l'altezza non siano misurabili con un numero intero di quadretti.
Il **perimetro** è invece la somma dei lati di un poligono. Considerando che due lati sono congruenti alla base e due all'altezza si può concludere che il perimetro del rettangolo si calcola con la seguente formula:

$$\textbf{Perimetro(rettangolo)=2}\cdot\textbf{base+2}\cdot\textbf{altezza}$$

L'area del rettangolo è il punto di riferimento per calcolare le aree di tutte le altre figure geometriche.

C8.5 Area e perimetro del triangolo

Si vuole calcolare l'area del triangolo ABE.
E' facile dimostrare che il triangolo ADE e il triangolo AHE sono congruenti, e così il triangolo BCE e il triangolo BHE.
Il rettangolo ABCD è dunque equivalente a ADE+AHE+BCE+BHE=2·AHE+2·BHE.
Il triangolo ABE è equivalente a AHE+BHE.
L'area del triangolo ABE è dunque la metà di quella del rettangolo ABCD.

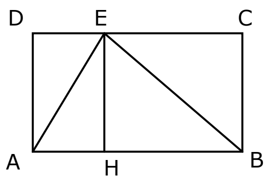

Figura C8.5
Area del triangolo.

L'area del rettangolo ABCD è Area(ABCD)=base·altezza, dunque quella del triangolo ABE è

$$\textbf{Area(triangolo)= base}\cdot\textbf{altezza/2}$$

Il perimetro è semplicemente la somma dei lati del triangolo, per cui si ha:

Perimetro(triangolo)=somma dei lati

Esiste un'altra formula detta **formula di Erone** (che non dimostreremo) che permette di calcolare l'area di un triangolo conoscendone le misure dei lati. Indicando con a, b e c le misure dei lati e con p il semiperimetro, ossia p=(a+b+c)/2 si ha:

$$\textbf{Area(triangolo)} = \sqrt{\mathbf{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

C8.6 Area e perimetro del trapezio

Si vuole calcolare l'area del trapezio ABCD, e per questo si effettua la seguente costruzione (vedi figura C8.6).
Si prolunga la base maggiore AD di un segmento DF congruente alla base minore BC. I triangoli BCE e DEF sono congruenti. Infatti:

- l'angolo $B\hat{E}C$ è opposto all'angolo $D\hat{E}F$, e gli angoli opposti sono congruenti.
- BC è congruente a DF per costruzione.
- l'angolo $C\hat{B}E$ e l'angolo $D\hat{F}E$ sono alterni interni quindi sono congruenti.

Per il secondo criterio di congruenza dei triangoli BCE e DEF sono congruenti, quindi sono equivalenti.
ABF è equivalente ad ABED+DEF. ABCD è equivalente ad ABED+BCE=ABED+DEF. Da ciò segue che il triangolo ABF e il trapezio ABCD sono equivalenti, quindi hanno la stessa area.
Per trovare l'area del trapezio si deve quindi calcolare quella del triangolo.

Area(ABCD)=Area(ABF)=AF·BH/2=(AD+DF)·BH/2=(AD+BC)·BH/2=(Base maggiore + base minore) · altezza / 2
La formula cercata è dunque

Area(trapezio)=(base maggiore + base minore)·altezza/2

Il perimetro sarà semplicemente la somma dei lati del trapezio.

Perimetro(trapezio)=somma dei lati

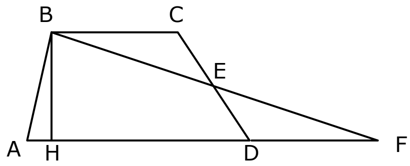

Fig. C8.6
Area del trapezio.

C8.7 Area e perimetro del parallelogramma

Si vuole calcolare l'area del parallelogramma ABCD, e per questo si effettua la seguente costruzione (vedi figura C8.7). Si traccia la perpendicolare a BC passante per D e si trova il punto E. DE è detta **altezza del parallelogramma**. Si prolunga il lato BC dal lato di B di un segmento BF≅CE. Anche AF è una altezza del parallelogramma. I triangoli ABF e DCE sono congruenti. Infatti:

- l'angolo $D\hat{C}E \cong A\hat{B}F$ perché corrispondenti delle rette DC e AB tagliate dalla trasversale BC.
- BF è congruente a CE per costruzione.
- AB è congruente a CD in quanto lati opposti del parallelogramma.

Per il primo criterio di congruenza dei triangoli ABF e DCE sono congruenti, quindi sono equivalenti.
Da ciò segue che:
Area(ABCD)=Area(ABED)+ Area(DCE)= Area(ABED)+ Area(ABF)=Area(ADEF).
L'area del parallelogramma è dunque la stessa dell'area del rettangolo avente come base uno dei lati del parallelogramma e come altezza l'altezza del parallelogramma.
La formula cercata è dunque

Area(parallelogramma)=base·altezza

Il perimetro sarà semplicemente la somma dei lati del parallelogramma, che però sono due a due congruenti. Si dovrà quindi sommare il doppio del primo lato con il doppio del secondo lato.

Perimetro(parallelogramma)=2·lato1+2·lato2

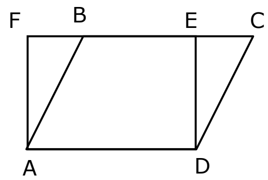

Fig. C8.7
Area del parallelogramma.

Si mostra nella figura C8.8 come in realtà sia possibile considerare come base anche il lato minore del parallelogramma. In questo caso l'altezza è indicata con DE o CF.

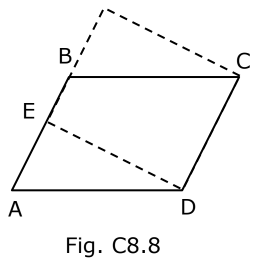

Fig. C8.8
Area del parallelogramma.

C8.8 Area e perimetro del rombo

Il rombo è un parallelogramma, pertanto è possibile calcolarne area e perimetro con le stesse formule mostrate nel paragrafo precedente. Ha però una caratteristica che permette di utilizzare anche una formula alternativa per calcolare l'area, ossia il fatto che le diagonali sono perpendicolari. Essendo inoltre tutti i lati congruenti risulta più semplice anche la formula per il calcolo del perimetro.
Si consideri il rombo ABCD in figura C8.9 e si effettui la seguente costruzione. Si tracci la diagonale AC e poi le rette ad essa parallele passanti per B e D. Si tracci poi la diagonale BD e poi le rette ad essa parallele passanti per A e C. Le 4 rette così tracciate sono tra loro perpendicolari e formano un rettangolo EFGH. E' facile mostrare che i triangoli OBC, OCD, ODA, OAB, BFC, CGD, DHA e AEB sono tutti congruenti tra loro.

Il rettangolo EFGH è scomponibile negli 8 triangoli appena elencati, da cui Area(EFGH)=8·Area(OBC), mentre il rombo ABCD è scomponibile in 4 triangoli, da cui Area(ABCD)=4·Area(OBC). Da ciò segue che l'area del rombo è la metà dell'area del rettangolo.
Il rettangolo ha base HG≅AC, che è la diagonale maggiore del rombo, e altezza FG≅BD che è la diagonale minore del rombo. L'area del rombo sarà dunque la metà dell'area del rettangolo, quindi

Area(rombo)=diagonale maggiore·diagonale minore/2

Il perimetro sarà la somma dei lati del rombo, che però sono tutti congruenti. Si dovrà quindi moltiplicare il lato per quattro.

Perimetro(rombo)=4·lato

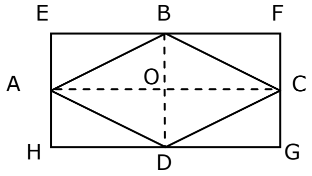

Fig. C8.9
Area del rombo.

C8.9 Area e perimetro del quadrato

Un quadrato è un rettangolo, ed è anche un rombo, quindi valgono le formule per il calcolo dell'area e del perimetro sia del rettangolo che del rombo. Avendo però esso tutti i lati e gli angoli congruenti è possibile semplificare le formule precedenti. Considerando il quadrato un caso particolare di rettangolo per calcolare l'area anziché moltiplicare la base per l'altezza basterà moltiplicare il lato per sé stesso.

Area(quadrato)=lato·lato=lato^2

Considerando invece il quadrato un caso particolare di rombo per calcolare l'area basterà moltiplicare la diagonale per sé stessa e dividere il tutto per due.

Area(quadrato)=diagonale·diagonale/2= diagonale^2/2

Per il calcolo del perimetro si deve invece moltiplicare il lato per 4.

Perimetro(quadrato)=4·lato

C8.10 Area e perimetro dei poligoni regolari

Per il calcolo dell'area di un poligono regolare si effettui la seguente costruzione. Si disegnino i segmenti che uniscono il centro del poligono regolare ai suoi vertici. Si ottengono così tanti triangoli isosceli quanti sono i lati del poligono regolare. Per calcolare l'area del poligono regolare basta dunque calcolare l'area di uno qualsiasi dei triangoli isosceli e moltiplicare tale area per il numero dei lati del poligono.
L'area di uno dei triangoli isosceli può essere calcolata moltiplicando il lato per l'apotema e dividendo il risultato per due. Si ottiene quindi la formula per il calcolo dell'area dei poligoni regolari di n lati.

Area(poligono regolare di n lati)=lato·apotema·n/2

Fig. C8.10
Area dei poligoni regolari.

Il problema che spesso si verifica nel calcolo dell'area dei poligoni regolari è che si deve calcolare l'apotema (ossia il raggio della circonferenza inscritta) conoscendo solamente il lato. Questo è un problema di non semplice risoluzione che verrà affrontato in maniera completa quando si studierà la trigonometria. In questo capitolo si studieranno invece alcuni casi particolari come l'area dell'esagono o dell'ottagono dopo avere trattato i teoremi di Euclide e Pitagora. Non crea invece nessun problema il calcolo del perimetro che è banalmente il prodotto tra un lato e il numero dei lati.

Perimetro(poligono regolare di n lati)=n·lato

Per calcolare invece l'area di un poligono qualsiasi è necessario suddividerlo in triangoli, calcolare l'area dei triangoli che lo compongono e sommare tali aree.

Per calcolare, ad esempio, l'area del poligono in figura C8.11 si dovranno dunque fissare al suo interno un punto F qualsiasi e tracciare i segmenti che congiungono tale punto ai vertici del poligono. Si dovranno poi calcolare le aree dei triangoli ABF, BCF, CDF, DEF, EAF e sommarle.

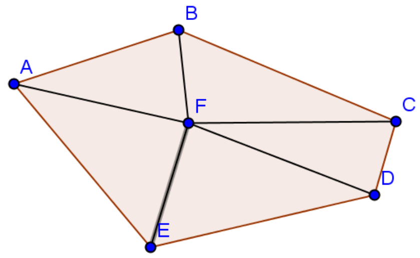

Fig. C8.11
Area dei poligoni.

C8.11 Area e perimetro della circonferenza

Per affrontare il problema del calcolo del perimetro o, meglio, della **lunghezza** di una circonferenza, si consideri il seguente esempio. Si prenda un filo e lo si tenga dritto, in modo da fissare su di esso l'unità di misura u, come per esempio un metro da sarto, nel quale l'unità di misura u è il cm. Adesso il metro (o il filo) possono essere piegati in modo da farli aderire perfettamente alla circonferenza e così misurarne la lunghezza.
Il problema è: come calcolare la lunghezza di una circonferenza conoscendone il raggio?

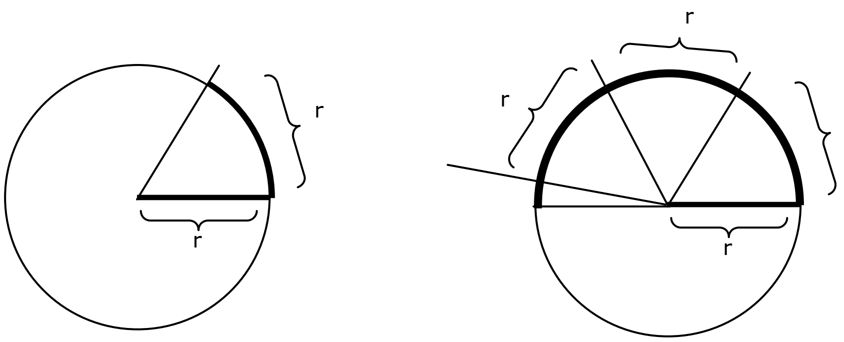

Fig. C8.12
Lunghezza di una circonferenza.

Si consideri la figura C8.12. Se si prende la misura del raggio con un filo è possibile poi farlo aderire alla circonferenza in modo da contare quante volte si deve utilizzare il raggio per coprire l'intera circonferenza. Per ricoprire metà circonferenza serve quindi poco più di 3 volte la lunghezza del raggio. Indichiamo con il simbolo π il numero di raggi che servono per ricoprire una circonferenza. La lunghezza della semicirconferenza è dunque πr.
Si può dunque trovare una approssimazione dicendo che la lunghezza della circonferenza è poco più di sei volte la lunghezza del raggio, ossia $2\pi r$.

Lunghezza(circonferenza)=$2\pi r$

L'approssimazione di π che abbiamo trovato è però molto grossolana, in quanto abbiamo detto che è un po' più di tre. E' necessario determinare l'approssimazione in maniera più precisa, e mostriamo adesso il procedimento ideato da Archimede nel III secolo a.c.
Archimede ha considerato per una circonferenza di raggio r il poligono regolare inscritto e quello circoscritto. La lunghezza della circonferenza sarà sicuramente un numero compreso tra il perimetro del poligono regolare inscritto e quello del poligono regolare circoscritto. Archimede ha pensato che all'aumentare del numero dei lati del poligono regolare si sarebbe ottenuta una migliore approssimazione di π.

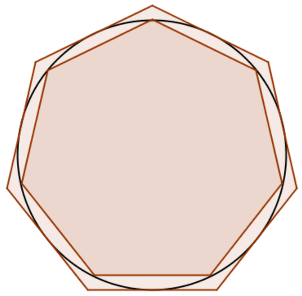

Fig. C8.13
Lunghezza di una circonferenza.
Metodo di Archimede per l'approssimazione di π.

Numero dei lati	Semiperimetro del poligono inscritto	Semiperimetro del poligono circoscritto
6	3r	≈3.4641r
12	≈3.1058r	≈3.2154r
24	≈3.1326r	≈3.1597r
48	≈3.1394r	≈3.1461r
96	≈3.1410r	≈3.1427r

Dalla tabella precedente si vede che all'aumentare del numero dei lati si ottiene una sempre più precisa approssimazione del valore di π. L'approssimazione utilizzata solitamente è $\pi \approx 3.14$, ma si può fare di meglio, in quanto si è arrivati ad approssimare π con centinaia di migliaia di cifre decimali dopo la virgola.
E' importante sapere che tali cifre decimali NON SONO PERIODICHE. Se ci fosse una periodicità sarebbe possibile scrivere π sotto forma di frazione, ma non essendoci un periodo ciò è impossibile.

Se si deve calcolare invece la lunghezza di un arco di circonferenza il cui angolo al centro è α espresso in gradi basta applicare la proporzione seguente

$$\text{Lunghezza arco circonferenza}: \text{angolo al centro}=360°:2\pi r$$

ottenendo la formula

$$\textbf{Lunghezza(arco di circonferenza)}=\alpha\pi r/180°=\alpha r$$

che diventa

$$\textbf{Lunghezza(arco di circonferenza)}=\alpha r$$

se l'angolo è espresso in multipli o sottomultipli dell'angolo piatto indicato con π.

Per il calcolo dell'area di un cerchio si può procedere in maniera analoga mediante le approssimazioni delle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio. Il risultato che si ottiene è:

$$\textbf{Area(cerchio)}=\pi r^2$$

Se si deve calcolare l'area di un settore circolare si può procedere anche in questo caso con la proporzione

$$\text{Area settore circolare}: \text{angolo al centro}=\pi r^2:360°$$

ottenendo la formula

$$\textbf{Area(settore circolare)}= \alpha\pi r^2/360°$$

che diventa

$$\textbf{Area(settore circolare)}=\alpha r^2/2$$

se l'angolo è espresso in multipli o sottomultipli dell'angolo piatto indicato con π.

C8.12 Primo teorema di Euclide

I Teorema di Euclide
In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente come lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.
IPOTESI: ABC è un triangolo rettangolo, AC≅AD.
TESI: ABGF è equivalente a AHDE.

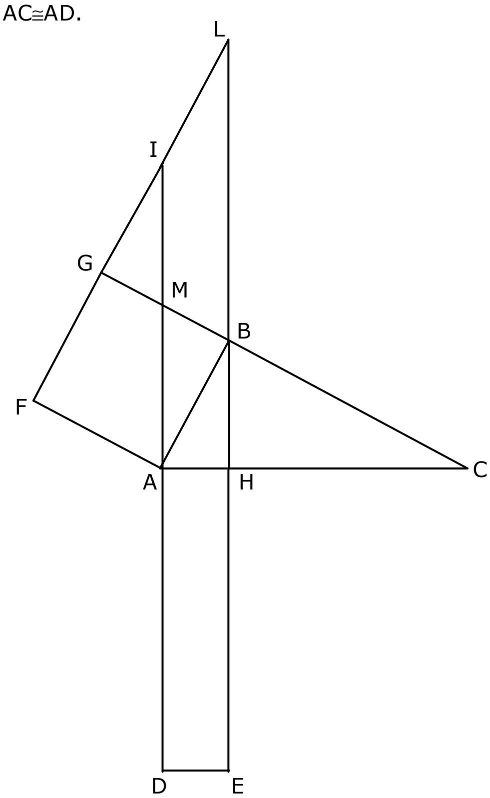

Fig. C8.14
I teorema di Euclide.

DIMOSTRAZIONE
I triangoli rettangoli AFI e ABC hanno:

- AB≅AF perché lati dello stesso quadrato.
- $I\hat{A}F \cong B\hat{A}C$ perché complementari dello stesso angolo $B\hat{A}M$.

Quindi i triangoli rettangoli AFI e ABC sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli. Da ciò segue che AI≅AC≅AD.
Il rettangolo ADEH e il parallelogramma ABLI hanno la stessa base AI≅AD e la stessa altezza AH e quindi sono equivalenti.
Il quadrato ABGF e il parallelogramma ABLI hanno la stessa base AB e la stessa altezza BG, quindi sono equivalenti.

ADEH è equivalente a ABLI, ABLI è equivalente a ABGF, per la proprietà transitiva ADEH è equivalente ad ABGF.
Si può concludere che l'area di ABGF è uguale all'area di ADEH, ossia: $\mathbf{AB^2=AH \cdot AC}$.

C8.13 Teorema di Pitagora

Teorema di Pitagora
In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
IPOTESI: ABC è un triangolo rettangolo.
TESI: ACFD è equivalente a ABIG+CBLM.
DIMOSTRAZIONE
Per il primo teorema di Euclide AHDE è equivalente a ABIG. Sempre per il primo teorema di Euclide CBLM è equivalente a CFEH. Sommando si ha ABIG+CBLM è equivalente a AHDE+CFEH.
Ma AHDE+CFEH è equivalente proprio a ACFD. Da ciò segue che ACFD è equivalente a ABIG+CBLM.
Si può concludere che l'area di ACFD è uguale alla somma delle aree di ABIG e di CBLM, ossia: $\mathbf{AC^2=AB^2+BC^2}$.

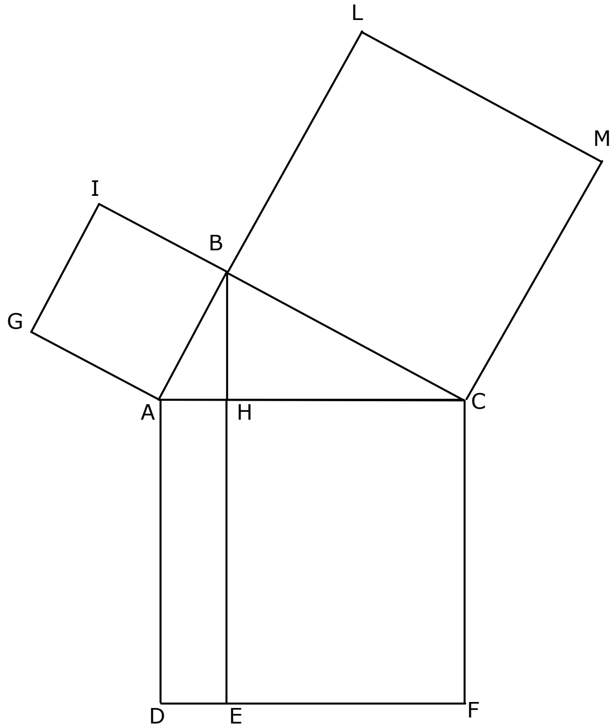

Fig. C8.15
Teorema di Pitagora.

C8.14 Secondo teorema di Euclide

II Teorema di Euclide
In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
IPOTESI: ABC è un triangolo rettangolo.
TESI: BHIL è equivalente a MNED.
DIMOSTRAZIONE: In figura C8.16 si costruisce il quadrato ABFG sul lato AB, si tracciano AD≅AC≅HE, AH≅AM≅HN, HC≅MD≅NE.
Si applica il teorema di Pitagora al triangolo ABH, che è rettangolo con ipotenusa AB e si ottiene che ABFG è equivalente a BHIL+AHNM.
Si applica il primo teorema di Euclide al triangolo ABC.
ABFG è equivalente ad AHED che è a sua volta equivalente a AHNM+MNED.
ABFG è dunque equivalente sia a BHIL+AHNM che a AHNM+MNED.
Allora BHIL+AHNM è equivalente a AHNM+MNED, e cancellando AHNM resta BHIL equivalente a MNED.
Si può concludere che l'area di BLIH è uguale all'area di MNDE, ossia:

$$\mathbf{BH^2=AH \cdot HC.}$$

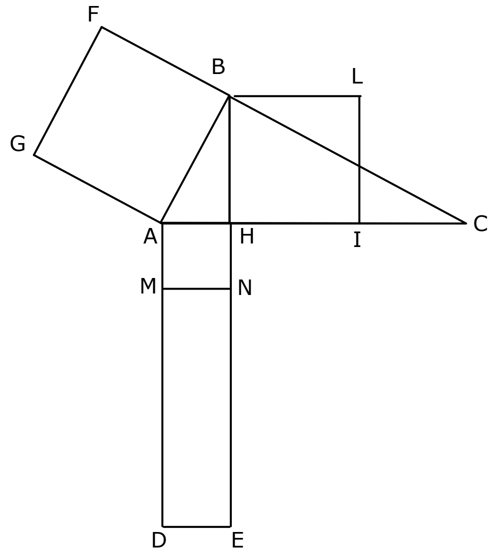

Fig. C8.16
II teorema di Euclide.

C8.15 Area di un triangolo rettangolo

L'area di un triangolo rettangolo si può calcolare considerando l'ipotenusa come base e l'altezza relativa all'ipotenusa come altezza, ottenendo la formula:

Area = ipotenusa·altezza relativa all'ipotenusa/2

E' possibile calcolare la stessa area anche considerando come base un cateto e come altezza l'altro cateto, ottenendo la formula:

Area = cateto·cateto/2

Confrontando le due formule si ottiene la seguente

Ipotenusa·altezza relativa all'ipotenusa = cateto·cateto

C8.16 Formule riassuntive per i triangoli rettangoli

Negli esempi che seguono l'unità di misura è sottintesa e si userà la notazione di figura C8.17, ossia:

Ipotenusa	c
Cateti	a, b
Altezza	h
Proiezioni dei cateti sull'ipotenusa	x, y

Con questa notazione i teoremi di Euclide e Pitagora e la regola dell'area assumono la seguente forma:

I teorema di Euclide	$a^2=c\cdot x$
	$b^2=c\cdot y$
II teorema di Euclide	$h^2=x\cdot y$
Teorema di Pitagora	$a^2+b^2=c^2$
Formula di equivalenza dell'area di un triangolo	$c\cdot h=a\cdot b$

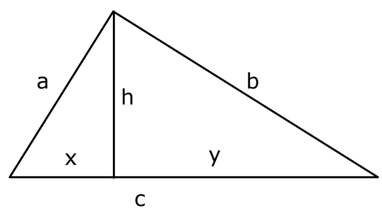

Fig. C8.17
Notazioni.

C8.17 Esempi ed esercizi

Esempio C8.17a
La mediana taglia un triangolo in due parti equiestese.
Svolgimento:
I due triangoli ABM e ACM hanno basi BM e CM che sono congruenti tra loro in quanto AM mediana e dunque M è il punto medio di BC.
L'altezza dei due triangoli ABM e ACM è lo stesso segmento AH.
Avendo basi e altezze congruenti i due triangoli hanno la stessa area.

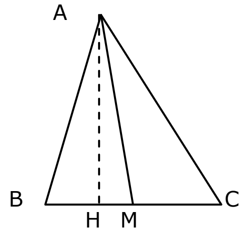

Fig. C8.18
La mediana taglia ogni triangolo in
due parti equiestese.

Esercizio C8.17b
Sapendo che i cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi rispettivamente 3 e 4 trovare l'ipotenusa.
Svolgimento: si sostituiscono i dati a=3, b=4 nella formula del teorema di Pitagora.
$3^2+4^2=c^2 \Rightarrow 9+16=c^2 \Rightarrow 25=c^2 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=\sqrt{25}=5$
L'ipotenusa è lungo 5.

Esercizio C8.17c
Sapendo che in un triangolo rettangolo un cateto è lungo 5 e l'ipotenusa è lunga 8 trovare la lunghezza dell'altro cateto.
Svolgimento: si sostituiscono i dati c=8, a=5 nella formula del teorema di Pitagora.
$5^2+b^2=8^2 \Rightarrow 25+b^2=64 \Rightarrow b^2=64-25 \Rightarrow b^2=39 \Rightarrow b=\sqrt{39}$
L'altro cateto è lungo $\sqrt{39}$.

Esercizio C8.17d
Sapendo che in un triangolo rettangolo un cateto è lungo 4 e la sua proiezione sull'ipotenusa è lunga 2 trovare la lunghezza dell'ipotenusa.
Svolgimento: si sostituiscono i dati a=4, x=2 nella formula del primo teorema di Euclide.
$4^2=c\cdot 2 \Rightarrow 16=c\cdot 2 \Rightarrow c\cdot 2=16 \Rightarrow c=16/2 \Rightarrow c=8$
L'ipotenusa è lunga 8.

Esercizio C8.17e
Sapendo che in un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa hanno lunghezza rispettivamente 3 e 5 trovare l'altezza relativa all'ipotenusa.
Svolgimento: si sostituiscono i dati x=3, y=5 nella formula del secondo teorema di Euclide.
$h^2=3\cdot 5 \Rightarrow h^2=15 \Rightarrow h=\sqrt{15}$
L'altezza relativa all'ipotenusa è lunga $\sqrt{15}$.

Esercizio C8.17f
Sapendo che un quadrato ha lato 1 trovare la lunghezza della diagonale del quadrato.
Svolgimento: si fa riferimento alla figura C8.19.
Il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa AC e cateti AB e BC. Si può applicare ad esso il teorema di Pitagora.
$1^2+1^2=c^2 \Rightarrow 1+1=c^2 \Rightarrow 2=c^2 \Rightarrow c^2=2 \Rightarrow c=\sqrt{2}$
La diagonale è lunga $\sqrt{2}$.
Tale risultato può essere generalizzato: se un quadrato ha il lato di lunghezza ℓ, allora la sua diagonale ha lunghezza $\ell\cdot\sqrt{2}$.

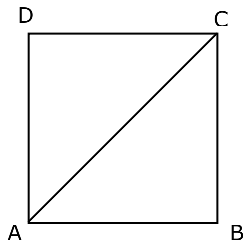

Fig. C8.19
Calcolo della misura della diagonale del quadrato.

Esercizio C8.17g
Sapendo che il lato di un triangolo equilatero ha lunghezza 1 trovare la lunghezza di una sua altezza.
Svolgimento: si fa riferimento alla figura C8.20.
Il triangolo ABH è rettangolo con ipotenusa AB, che si sa avere lunghezza 1, e cateti CH e BH. CH è la metà di AC, AC ha lunghezza 1, quindi CH ha lunghezza 1/2.
Si applica il teorema di Pitagora al triangolo ABH.
$\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2=1^2 \Rightarrow \frac{1}{4}+b^2=1 \Rightarrow b^2=1-\frac{1}{4} \Rightarrow b^2=\frac{4-1}{4} \Rightarrow b^2=\frac{3}{4} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}}{2}$
L'altezza del triangolo equilatero è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tale risultato può essere generalizzato: se un triangolo equilatero ha un lato di lunghezza ℓ, allora la sua diagonale ha lunghezza $\ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

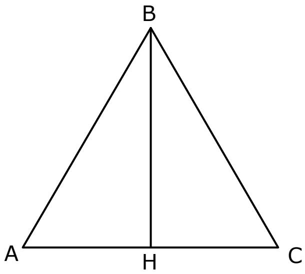

Fig. C8.20
Calcolo della misura dell'altezza di un triangolo equilatero.

Esercizio C8.17h
Sapendo che il lato di un triangolo equilatero ha lunghezza 2 trovare la distanza del suo centro dai suoi lati e dai suoi vertici.
Svolgimento: si fa riferimento alla figura C8.21.
Il triangolo equilatero è inscrivibile in una circonferenza di raggio r≅OC, che è proprio la lunghezza che dobbiamo trovare per determinare la distanza del centro del triangolo equilatero dai suoi vertici. Dal fatto che il lato del triangolo equilatero è 2 si ha che CD=1. CD è l'altezza del triangolo equilatero OCG. Se il lato è ℓ l'altezza del triangolo equilatero è $\ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. La formula inversa dice che se l'altezza del triangolo equilatero è h allora il suo lato è $h = \frac{2}{\sqrt{3}}\ell$.

Il lato CO cercato è dunque $CO = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Per quanto detto nell'esercizio C8.17g l'altezza del triangolo equilatero è CF= $\ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Da ciò si può concludere che $OF = CF - CO = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Il centro divide pertanto ogni altezza di un triangolo equilatero in due parti una doppia dell'altra.

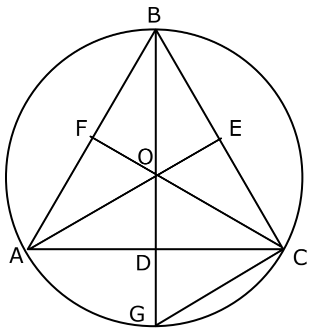

Fig. C8.21
Calcolo della distanza del centro di un triangolo equilatero
da lati e vertici.

Esercizio C8.17i
Sapendo che il perimetro di un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza di raggio r è 5r, determinarne i lati.
Svolgimento: si fa riferimento alla figura C8.22.

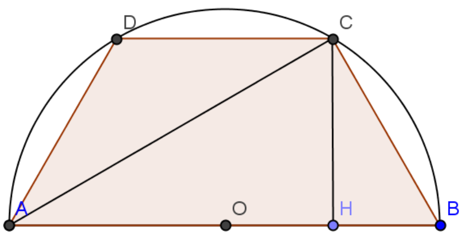

Fig. C8.22
Trapezio inscritto in una semicirconferenza.

Si indichino con x la misura della base minore CD e con y la misura dei lati obliqui.
Dal perimetro si ricava la seguente relazione: x+y+y+r+r=5r, da cui x+2y=3r.
E' possibile ricavare BH sottraendo la base minore dalla maggiore e dividendo per due.

BH=(AB-CD)/2=(2r-x)/2

Il triangolo ABC è rettangolo e applicando ad esso il I teorema di Euclide si ottiene che $AB \cdot BH = BC^2$, che espresso con le incognite x e y diventa $2r \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right) = y^2$.

Si deve dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3r \\ 2r \cdot \left(\frac{2r-x}{2}\right) = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2y \\ 2r \cdot \left(\frac{2r-(3r-2y)}{2}\right) = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2y \\ r \cdot (2r - 3r + 2y) = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2y \\ r \cdot (-r + 2y) = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2y \\ -r^2 + 2yr = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2y \\ y^2 - 2yr + r^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2y \\ (y-r)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3r - 2r \\ y = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \end{cases} \Rightarrow$$

La base minore è quindi lunga come il lato obliquo ed ha la stessa lunghezza del raggio della semicirconferenza.