# C6. Quadrilateri

## C6.1 Definizioni

Un *poligono* di 4 lati è detto **quadrilatero**.
I lati di un quadrilatero che hanno un vertice in comune sono detti **consecutivi**.
I lati di un quadrilatero non *consecutivi* tra loro sono detti **opposti**.
Due vertici che appartengono allo stesso lato sono detti **consecutivi**.
Due vertici che non appartengono allo stesso lato sono detti **opposti**.
Due angoli che hanno un lato in comune sono detti **adiacenti**.
Due angoli che non hanno un lato in comune sono detti **opposti**.

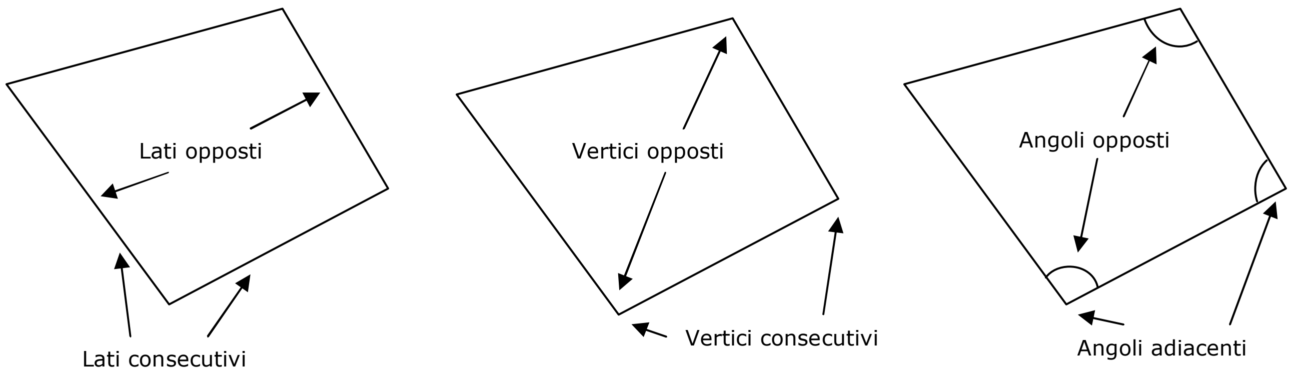


Fig. C6.1
Definizioni relative ai quadrilateri.

## C6.2 Trapezio

Un **trapezio** è un quadrilatero avente due lati paralleli.
I lati paralleli sono detti **base minore** e **base maggiore**. Gli altri due lati sono detti **lati obliqui**.
Un trapezio è **scaleno** se i lati obliqui non sono congruenti.
Un trapezio è detto **isoscele** se i lati obliqui sono congruenti.
Un trapezio è detto **rettangolo** se un lato obliquo è perpendicolare alle due basi.
La distanza tra le basi è detta **altezza**.

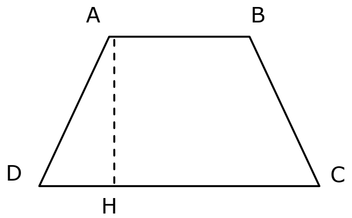


Fig. C6.2
Trapezio isoscele.

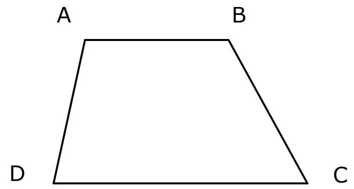


Fig. C6.3
Trapezio scaleno.

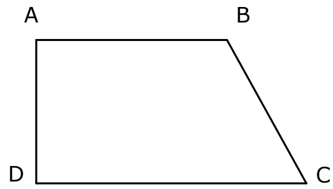


Fig. C6.4
Trapezio rettangolo.

**Proprietà dei trapezi**
Gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono supplementari.
Tale proprietà è facilmente verificabile considerando che i due angoli adiacenti al lato obliquo sono coniugati interni, prendendo in considerazione le rette parallele su cui giacciono le basi, tagliate dalla retta trasversale ad esse su cui giace il lato obliquo. Si è visto precedentemente che gli angoli coniugati interni sono in questo caso supplementari.

## C6.3 Teorema degli angoli alla base del trapezio isoscele

**Teorema**
In un trapezio isoscele gli angoli alla base sono congruenti.
IPOTESI: AB è parallelo a CD, AD $\cong$ BC.
TESI: $A\hat{D}C \cong D\hat{C}B$.
DIMOSTRAZIONE:

I metodo: la retta r è asse di simmetria del trapezio, per cui gli angoli $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}B$ si corrispondono in una simmetria assiale, quindi sono congruenti.

Si presenta anche un'altra dimostrazione che utilizzi i criteri di congruenza dei triangoli.

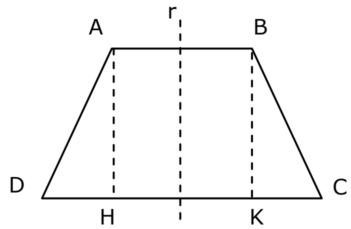


Fig. C6.5
Teorema degli angoli alla base
del trapezio isoscele.

II metodo:
I triangoli ADH e BCK hanno:

- AH ≅ BK perché la distanza tra due rette parallele è costante.
- AD ≅ BC per ipotesi.
- $A\hat{H}D$ e $B\hat{K}C$ sono retti e quindi congruenti tra loro.
  Quindi, per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, i triangoli ADH e BKC sono congruenti.
  In particolare, gli angoli $A\hat{D}C = A\hat{D}H$ e $D\hat{C}B = D\hat{C}K$ sono congruenti. ■

**Osservazione**
In base al teorema precedente anche DH e KC sono congruenti.
Ne segue che anche gli angoli $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ sono congruenti.

**Teorema**
In un trapezio isoscele le diagonali sono congruenti.
IPOTESI: AB è parallelo a CD, AD≅BC.
TESI: AC≅BD.

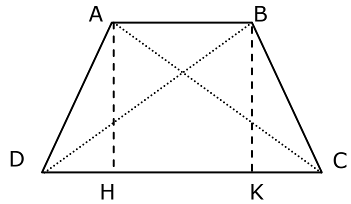


Fig. C6.6
Teorema delle diagonali del
trapezio isoscele.

DIMOSTRAZIONE
Si considerino i due triangoli ABD e ABC. Essi hanno congruenti:

- AB≅AB perché è in comune.
- AD≅BC per ipotesi.
- $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ sono congruenti per il teorema precedente.

I due triangoli sono congruenti per il I criterio di congruenza. Hanno dunque congruenti tutti gli angoli e tutti i lati. In particolare AC≅BD.

## C6.4 Parallelogramma

Un **parallelogramma** è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli.
**L'altezza** di un parallelogramma è il segmento che ha come vertice un vertice del parallelogramma e che è perpendicolare al lato opposto.

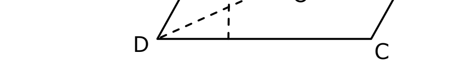


Fig. C6.7
Parallelogramma.

**Teorema**
Un parallelogramma possiede un centro di simmetria.
DIMOSTRAZIONE: Si traccia la diagonale BD e se ne prende il punto medio O.
Il punto medio è il centro di simmetria. Si consideri la simmetria di centro O.
In tale simmetria a B corrisponde D e a D corrisponde B. Alla retta AD corrisponde la retta BC e viceversa. Alla retta AB corrisponde la retta CD e viceversa.■

Le dimostrazioni che fanno uso delle simmetrie erano molto in voga nella didattica degli anni novanta, ma sono oggi considerate carenti dal punto di vista del rigore logico, quindi si ritiene opportuno evitarle.
**Osservazione**
Nella proprietà precedente anche la diagonale AC ha lo stesso punto medio della diagonale BD.

## C6.5 Teoremi sui parallelogrammi

**Teorema C6.5a**
I lati opposti di un parallelogramma sono congruenti.
IPOTESI: AB\\CD, AD\\BC.
TESI: AB≅CD, AD≅BC.

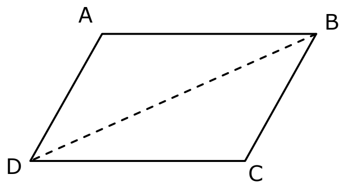


Fig. C6.8
Teorema sui parallelogrammi.

DIMOSTRAZIONE
Si considerino i triangoli ABD e CDB. Essi hanno congruenti:
- BD≅BD perché è in comune
- $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ perché alterni interni delle rette AD e BC tagliate dalla trasversale BD.
- $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$ perché alterni interni delle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD.

Per il secondo criterio di congruenza i triangoli ABD e CDB sono congruenti, quindi hanno congruenti tutti i lati e tutti gli angoli. In particolare AB≅CD e AD≅BC.

**Teorema C6.5b**
Gli angoli opposti di un parallelogramma sono congruenti.
IPOTESI: AB\\CD, AD\\BC.
TESI: $D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$, $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$.

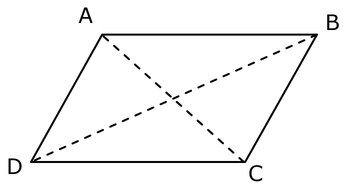


Fig. C6.9
Teorema sui parallelogrammi.

DIMOSTRAZIONE
Dal teorema precedente risulta che i triangoli ABD e CDB sono congruenti, quindi sono congruenti in particolare gli angoli $D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$.
Resta da dimostrare che $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$. Ricordando che ABD e CDB sono congruenti, quindi sono congruenti in particolare gli angoli $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ e $B\hat{D}C \cong A\hat{B}D$. Da ciò segue che $A\hat{D}C \cong A\hat{D}B + B\hat{D}C \cong D\hat{B}C + A\hat{B}D \cong A\hat{B}C$.

**Teorema C6.5c**
Gli angoli adiacenti di un parallelogramma sono supplementari.
IPOTESI: AB\\CD, AD\\BC.
TESI: $D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$, $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$.

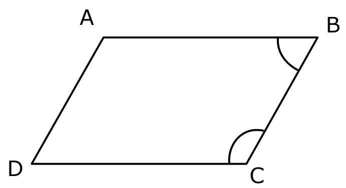


Fig. C6.10
Teorema sui parallelogrammi.

DIMOSTRAZIONE
Considerando le rette parallele AB e CD e la trasversale BC gli angoli $B\hat{C}D$ e $A\hat{B}C$ sono angoli coniugati interni, quindi sono supplementari.

**Teorema C6.5d**
Le diagonali di un parallelogramma si incontrano nel loro punto medio.
IPOTESI: AB\\CD, AD\\BC.
TESI: AO≅OC, BO≅OD.

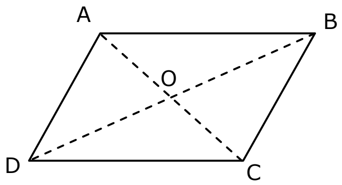

Fig. C6.11
Teorema sui parallelogrammi.

DIMOSTRAZIONE
Si considerino i triangoli AOB e DOC. Essi hanno congruenti:
- AB≅CD perché i lati opposti di un parallelogramma sono congruenti per il primo teorema del paragrafo.
- $A\hat{C}D \cong C\hat{A}B$ perché alterni interni delle rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC.
- $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$ perché alterni interni delle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BD.

Per il secondo criterio di congruenza i triangoli AOB e DOC sono congruenti, quindi hanno congruenti tutti i lati e tutti gli angoli. In particolare AO≅OC e BO≅OD.

## C6.6 Condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un parallelogramma

Tutti i parallelogrammi sono quadrilateri. Il viceversa non è vero. Esistono quadrilateri che non sono parallelogrammi.
Il problema è: come si fa a riconoscere se un quadrilatero è un parallelogramma? Si tratta di trovarne le condizioni sufficienti.
Prima di esporre le condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un parallelogramma spieghiamo bene cosa significa "**condizione sufficiente**". Si può dire che, visto che se mi tagliano la testa allora muoio, che è **condizione sufficiente che mi taglino la testa per morire**. Una condizione sufficiente affinché sia vero qualcos'altro è dunque un qualcosa che, se è vero, implica che è vero anche il qualcos'altro.
Per i teoremi di questo paragrafo si esporrà la dimostrazione solo del primo.

**Teorema C6.6a**
Un quadrilatero è un parallelogramma se entrambe le coppie di lati opposti sono congruenti.
IPOTESI: AB≅CD, AD≅BC.
TESI: AB\\CD, AD\\BC.

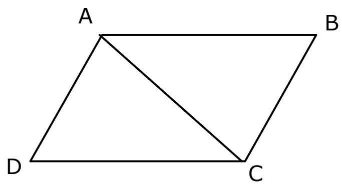

Fig. C6.12
Teorema sui parallelogrammi.

DIMOSTRAZIONE
Si considerino i triangoli ADC e ABC. Essi hanno congruenti:
- AB≅CD per ipotesi.
- AD≅BC per ipotesi.
- AC≅AC perché è in comune.

Per il terzo criterio essi sono dunque congruenti, e in particolare lo sono gli angoli $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, che sono alterni interni delle due rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC. Essendo gli angoli alterni interni congruenti le rette su cui giacciono i lati AB e CD sono parallele. E' analoga la dimostrazione per i lati BC e AD considerando gli angoli $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$.

Da questo teorema si può capire se un quadrilatero è effettivamente un parallelogramma senza bisogno di verificare che i lati opposti siano paralleli. Se infatti sappiamo che le coppie di lati opposti sono entrambi congruenti allora siamo sicuri che il quadrilatero è un parallelogramma.

**Teorema C6.6b**
Un quadrilatero è un parallelogramma se entrambe le coppie di angoli opposti sono congruenti.
IPOTESI: $D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$, $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$.
TESI: AB\\CD, AD\\BC.

Da questo teorema si può capire se un quadrilatero è effettivamente un parallelogramma senza bisogno di verificare che i lati opposti siano paralleli. Se infatti sappiamo che le coppie di angoli opposti sono entrambi congruenti allora siamo sicuri che il quadrilatero è un parallelogramma.

**Teorema C6.6c**
Un quadrilatero è un parallelogramma se ha una coppia di lati opposti paralleli e congruenti.
IPOTESI: AB≅CD, AB\\CD.
TESI: AD\\BC.

Da questo teorema si può capire se un quadrilatero è effettivamente un parallelogramma senza bisogno di verificare che i lati opposti siano paralleli. Se infatti sappiamo che una coppia di lati opposti sono paralleli e congruenti allora siamo sicuri che il quadrilatero è un parallelogramma.

**Teorema C6.6d**
Un quadrilatero è un parallelogramma se le diagonali si intersecano nel loro punto medio.
IPOTESI: AO≅OC, BO≅OD.
TESI: AB\\CD, AD\\BC.

Da questo teorema si può capire se un quadrilatero è effettivamente un parallelogramma senza bisogno di verificare che i lati opposti siano paralleli. Se infatti sappiamo che le diagonali si intersecano entrambe nel loro punto medio allora siamo sicuri che il quadrilatero è un parallelogramma.

**Teorema C6.6e**
Un quadrilatero è un parallelogramma se tutte le coppie di angoli adiacenti sono supplementari.
IPOTESI: $A\hat{B}C + B\hat{C}D \cong \pi$, $B\hat{C}D + C\hat{D}A \cong \pi$, $C\hat{D}A + D\hat{A}B \cong \pi$, $A\hat{B}C + D\hat{A}B \cong \pi$.
TESI: AB\\CD, AD\\BC.

Da questo teorema si può capire se un quadrilatero è effettivamente un parallelogramma senza bisogno di verificare che i lati opposti siano paralleli. Se infatti sappiamo che gli angoli consecutivi sono supplementari allora siamo sicuri che il quadrilatero è un parallelogramma.

## C6.7 Rettangolo

Un **rettangolo** è un quadrilatero con i 4 angoli congruenti.

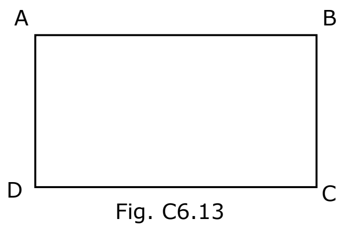


Fig. C6.13
Rettangolo.

I rettangoli sono trapezi, per cui valgono per essi tutte le proprietà che si sono finora elencate per i trapezi, e sono anche parallelogrammi, per cui valgono per essi tutte le proprietà che si sono finora elencate per i parallelogrammi.
Sono però un caso particolare di parallelogrammi, e per questa loro particolarità valgono delle proprietà che verranno ora elencate che *non* valgono per tutti i parallelogrammi.

**Simmetria**
I rettangoli hanno due assi di simmetria.
Infatti le rette r ed s nella figura C6.14 sono assi di simmetria del rettangolo ABCD.

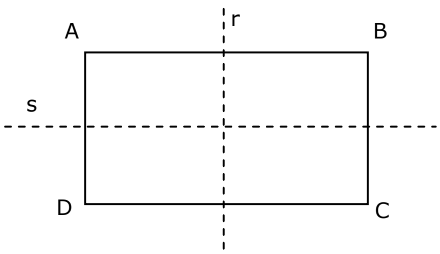


Fig.C6.14
Assi di simmetria di un rettangolo.

**Teorema delle diagonali di un rettangolo**
I rettangoli hanno le diagonali congruenti.
IPOTESI: ABCD è un rettangolo.
TESI: AC≅ BD.

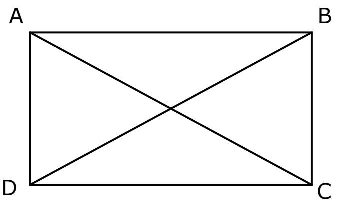


Fig. C6.15
Teorema delle diagonali di un rettangolo.

DIMOSTRAZIONE:
Si considerino i triangoli ADC e BDC. Essi hanno congruenti:

- $A\hat{D}C \cong B\hat{C}D$ perché sono angoli retti.
- $AD \cong BC$ perché lati opposti di un rettangolo (che, essendo un parallelogramma, ha i lati opposti congruenti).
- $CD \cong CD$ perché è in comune.

Per il primo criterio essi sono dunque congruenti, e in particolare lo sono i lati AC e BD, e quindi $AC \cong BD$.

Vale anche il teorema inverso, ossia se un parallelogramma ha le diagonali congruenti allora è un rettangolo.

**Condizione sufficiente affinché un parallelogramma sia un rettangolo**
Un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo.
IPOTESI: $AC \cong BD$, ABCD è un parallelogramma.
TESI: ABCD è un rettangolo.

Per determinare se un parallelogramma è un rettangolo in base alla definizione si deve verificare che tutti gli angoli siano retti. In base a quest'ultimo teorema abbiamo un altro criterio per stabilire se un parallelogramma è un rettangolo: se sappiamo che un parallelogramma ha le diagonali congruenti allora siamo certi che è un rettangolo.

## C6.8 Rombo

Il **rombo** è un parallelogramma con i 4 lati congruenti.

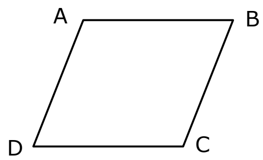


Fig.C6.16
Rombo.

I rombi si rappresentano in due modi distinti, con le diagonali perpendicolari ai margini del foglio o due lati paralleli alla base del foglio, come le due figure C6.16 e C6.17.

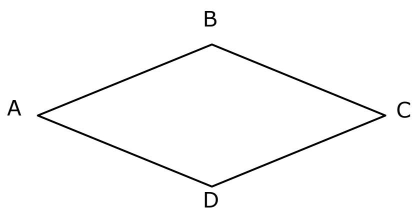


Fig.C6.17
Rombo.

I rombi sono parallelogrammi, per cui valgono tutte le proprietà che si sono finora elencate per i parallelogrammi.
Per la loro particolarità di avere 4 lati congruenti valgono per essi delle proprietà che *non* valgono per tutti i parallelogrammi.
Dimostriamo adesso due proprietà dei rombi, ossia che essi hanno le diagonali che sono perpendicolari tra loro e sono anche bisettrici degli angoli interni.

**Teorema**
Le diagonali di un rombo sono perpendicolari.
IPOTESI: ABCD è un rombo.
TESI: $AC \perp BD$.

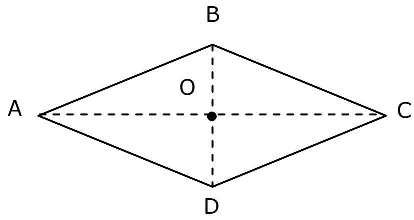


Fig. C6.18
Teorema delle diagonali del rombo.

DIMOSTRAZIONE
Si considerino i triangoli AOB e AOD. Essi hanno congruenti:

- AO in comune
- AB≅AD perché ABCD è un rombo e i rombi hanno i lati uguali.
- BO≅OD perché ABCD è un parallelogramma, e nei parallelogrammi le diagonali si incontrano nel punto medio.

Quindi, per il terzo criterio di congruenza dei triangoli, i triangoli AOB e AOD sono congruenti.

In particolare gli angoli $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}D$ sono congruenti e supplementari, dunque sono retti.

**Teorema**
Le diagonali di un rombo sono bisettrici degli angoli interni del rombo.
IPOTESI: ABCD è un rombo.
TESI: $B\hat{A}O \cong D\hat{A}O$ .

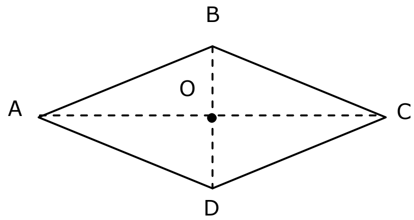


Fig. C6.19
Teorema delle diagonali del rombo.

DIMOSTRAZIONE
Si considerino i triangoli AOB e AOD. Essi hanno congruenti:

- AO in comune
- AB≅AD perché ABCD è un rombo e i rombi hanno i lati uguali.
- BO≅OD perché ABCD è un parallelogramma, e nei parallelogrammi le diagonali si incontrano nel punto medio.

Quindi, per il terzo criterio di congruenza dei triangoli, i triangoli AOB e AOD sono congruenti.

In particolare sono congruenti gli angoli $B\hat{A}O \cong D\hat{A}O$ .

E' possibile anche in questo caso stabilire delle condizioni sufficienti affinché un parallelogramma sia un rombo, e si dimostrano in maniera analoga alle dimostrazioni precedenti.
**Condizioni sufficienti affinché un parallelogramma sia un rombo:**

- Un parallelogramma è un rombo se ha le diagonali perpendicolari.
- Un parallelogramma è un rombo se ha una diagonale bisettrice di un angolo interno.

## C6.9 Quadrato

Un **quadrato** è un parallelogramma con tutti i lati e tutti gli angoli congruenti.
Un quadrato è un parallelogramma, per cui valgono per i quadrati tutte le proprietà dei parallelogrammi.
Un quadrato è un rettangolo, quindi valgono per i quadrati tutte le proprietà dei rettangoli.
Un quadrato è un rombo, per cui valgono per i quadrati tutte le proprietà dei rombi.
In particolare si può dire che un quadrato ha 4 assi di simmetria e un centro di simmetria.

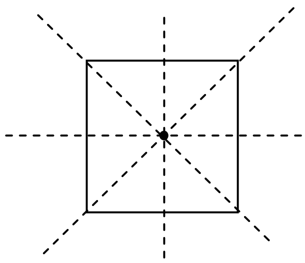

Fig. C6.20
Assi si simmetria di un quadrato.

Vale quindi la seguente serie di relazioni:

Un QUADRATO è

un ROMBO, che è    un RETTANGOLO, che è

un PARALLELOGRAMMA, che è

un QUADRILATERO.

Fig. C6.21
Relazioni tra quadrilateri.

Dal punto di vista insiemistico si può considerare il seguente diagramma di Venn.

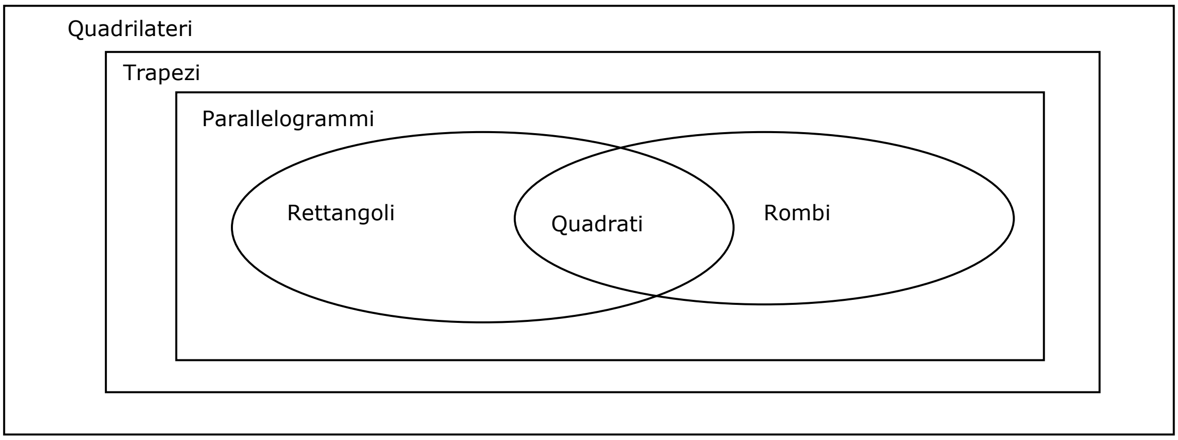


Fig. C6.22
Relazione insiemistica tra quadrilateri.

Dal fatto che il quadrato sia un parallelogramma, un rettangolo e un rombo possiamo dedurre dunque alcune ovvie proprietà:

- Le diagonali del quadrato sono congruenti.
- Le diagonali del quadrato sono perpendicolari.
- Le diagonali del quadrato sono bisettrici degli angoli interni del quadrato.

Si possono anche trovare facilmente le condizioni sufficienti affinché un parallelogramma sia un quadrato.
Un parallelogramma è un quadrato se:

- Le diagonali sono congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo interno.
- Le diagonali sono congruenti e perpendicolari.

Tutte le proprietà precedenti devono essere dimostrate, ma si lasciano tale dimostrazioni come esercizi (nella parte di esercizi).