C5. Triangoli

C5.1 Definizioni

Un **triangolo** è un poligono con tre lati.
In figura C5.1 i **lati** sono i segmenti AB=c, AC=b e BC=a.
Gli **angoli (interni)** sono $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$.
Si dice che un angolo è **opposto** a un lato se il vertice dell'angolo non è uno degli estremi del lato.
In figura C5.1 il lato a e l'angolo $C\hat{A}B$ sono detti **opposti**.
Sono opposti anche il lato ...... e l'angolo ....
Sono opposti anche il lato ...... e l'angolo ....
Si dice che un angolo è **adiacente** a un lato se esso è uno dei lati dell'angolo.
Sono adiacenti il lato ...... e l'angolo ....
Sono adiacenti anche il lato ...... e l'angolo ....
Sono adiacenti anche il lato ...... e l'angolo ....
E' consuetudine disegnare il triangolo in modo che l'angolo α, che ha come vertice A, sia opposto al lato a, e che, inoltre, l'angolo β, che ha come vertice B, sia opposto al lato b, e che, infine, l'angolo γ, che ha come vertice C, sia opposto al lato c.
Si dice che un angolo è **compreso** tra i due lati che lo determinano.
In figura C5.1 l'angolo $C\hat{A}B$ è compreso tra i lati CA e CB.
L'angolo .... è compreso tra i lati ...... e ......
L'angolo .... è compreso tra i lati ...... e ......
L'angolo $B\hat{C}D$, come già detto, è un **angolo esterno** del triangolo. La somma dei tre lati a, b e c è detta **perimetro**.

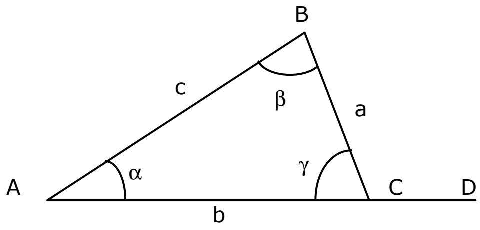

Fig. C5.1
Triangolo.

C5.2 Classificazione dei triangoli in base ai lati

Un triangolo è detto:
Equilatero se ha tutti i lati uguali tra loro.
Isoscele se ha due lati uguali tra loro.
Nel triangolo isoscele i due lati uguali tra loro sono detti **lati obliqui**, l'altro è detto **base**.
Scaleno se ha tutti i lati diversi tra loro.

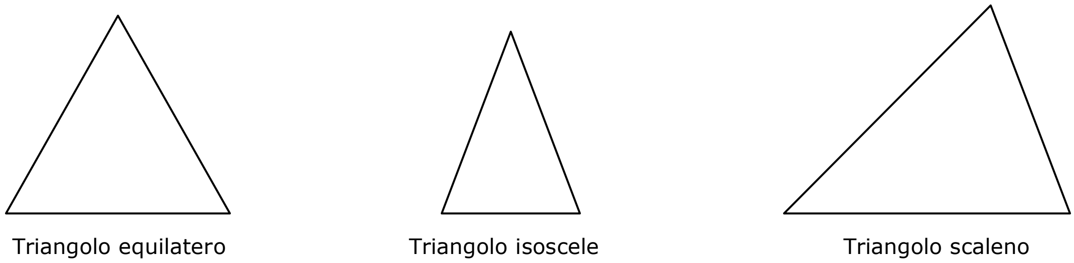

Fig. C5.2
Classificazione dei triangoli in base ai lati.

C5.3 Classificazione dei triangoli in base agli angoli

Un triangolo è detto:
Acutangolo se ha tutti gli angoli acuti.
Ottusangolo se ha un angolo ottuso.
Rettangolo se ha un angolo retto.
Nei triangoli rettangoli i due lati perpendicolari tra loro sono detti **cateti**, l'altro è detto **ipotenusa**.

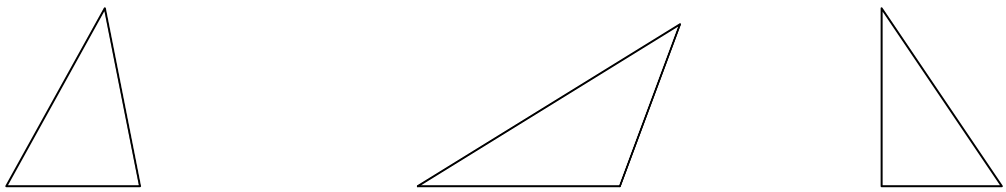

Fig. C5.3
Classificazione dei triangoli in base agli angoli

C5.4 Mediane e baricentro

Le **mediane** sono le rette passanti per un vertice e per il punto medio del lato opposto.
Le tre mediane di un triangolo si incontrano nel **baricentro**.

Per trovare una mediana si deve:
- Trovare il punto medio di un lato del triangolo. Per fare ciò si può usare il righello oppure usare la costruzione geometrica dell'asse del segmento (C3.9).
- Tracciare la retta passante per il punto medio e il vertice opposto, che è la mediana.

Per trovare il baricentro basta tracciare DUE mediane e trovarne il punto di intersezione.

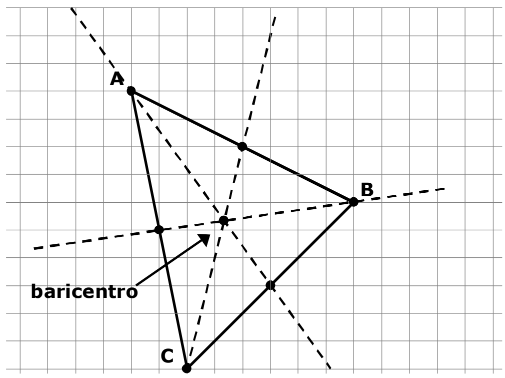

Fig. C5.4
Costruzione del baricentro
tracciando le mediane.

C5.5 Altezze e ortocentro

Le **altezze** sono le rette passanti per un vertice e perpendicolari al lato opposto.
Le tre altezze di un triangolo si incontrano **nell'ortocentro**.

Per trovare una altezza si deve:
- Tracciare la retta passante per un vertice e perpendicolare al lato opposto. Per tracciare tale retta si utilizza la costruzione della perpendicolare vista al punto C4.3.

Per trovare l'ortocentro basta tracciare DUE altezze e trovarne il punto di intersezione.

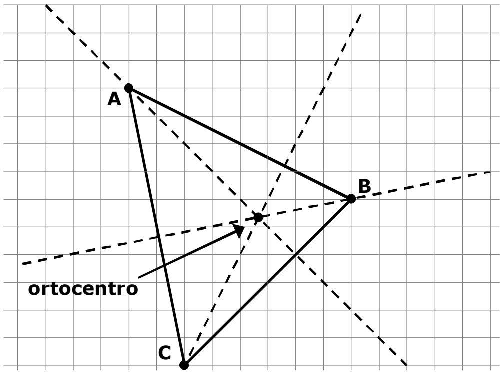

Fig. C5.5
Costruzione dell'ortocentro
tracciando le altezze.

C5.6 Assi e circocentro

Gli **assi** sono le rette passanti per il punto medio di un lato e perpendicolari allo stesso lato.
I tre assi di un triangolo si incontrano nel circocentro.

Per trovare le equazioni di un asse si deve:

- Trovare l'asse del segmento come nella costruzione geometrica C3.9.

Per trovare il circocentro basta trovare DUE assi e trovarne il punto di intersezione.
Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

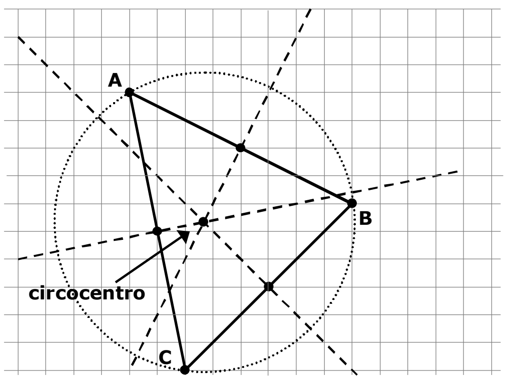

Fig. C5.6
Costruzione del circocentro
tracciando gli assi.

C5.7 Costruzione geometrica della bisettrice

Procedimento per tracciare la bisettrice di un angolo:

- Si traccia, con apertura qualsiasi del compasso, la circonferenza 1 con centro nel vertice. Si trovano così due punti A e B di intersezione tra la circonferenza e i lati dell'angolo.
- Si tracciano, con la stessa apertura del compasso, le circonferenze 2 e 3 di centro A e B. Si trova così il punto C di intersezione tra le circonferenze 2 e 3.
- La retta passante per C e il vertice dell'angolo è la bisettrice.

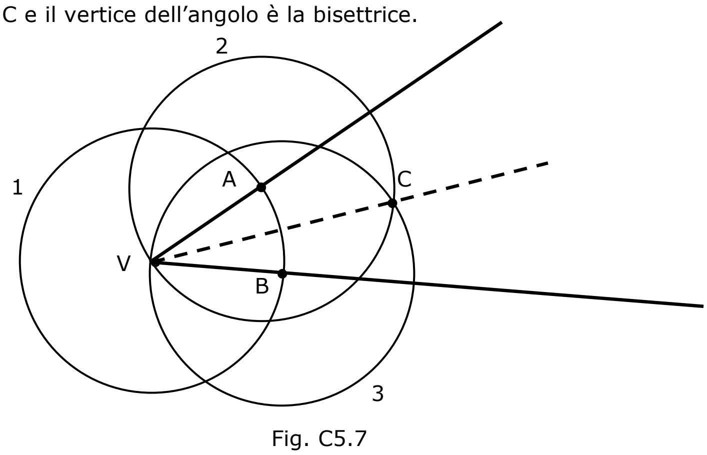

Fig. C5.7
Costruzione geometrica della
bisettrice.

C5.8 Bisettrici e incentro

Le **bisettrici** sono le rette passanti per un vertice che tagliano l'angolo in due parti uguali.
Le tre bisettrici di un triangolo si incontrano nell'**incentro**. L'incentro è il centro della circonferenza inscritta.

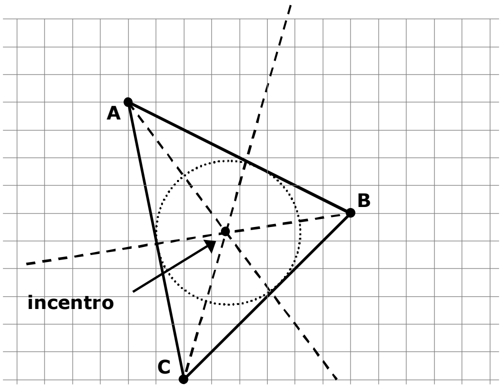

Fig. C5.8
Costruzione dell'incentro
tracciando le bisettrici.

C5.9 Congruenza di triangoli

Due triangoli sono congruenti se sono perfettamente sovrapponibili, ossia se hanno tutti i lati congruenti tra loro a due a due e tutti gli angoli congruenti tra loro a due a due.

Fig. C5.9
Triangoli congruenti.

Quindi i triangoli in figura C5.4 sono congruenti se hanno AB≅DE, BC≅EF, AC≅DF, $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$, $B\hat{C}A \cong E\hat{F}D$ e $C\hat{A}B \cong F\hat{D}E$.
Per capire se due triangoli sono congruenti vanno quindi confrontati tutti i lati e tutti gli angoli. La verifica risulta quindi di lunga attuazione. Esistono però alcuni teoremi chiamati **criteri di congruenza** che permettono di confrontare solo alcuni lati e/o angoli per essere comunque sicuri che due triangoli siano effettivamente congruenti.

C5.10 I criterio di congruenza

I criterio di congruenza
Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso tra essi allora i due triangoli sono congruenti.

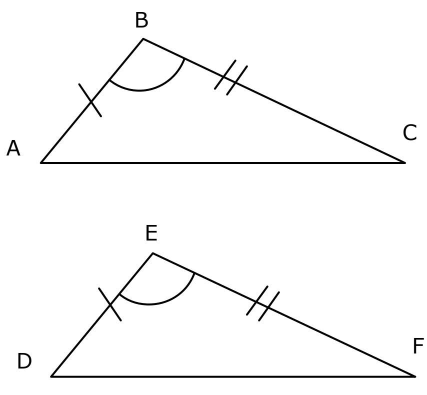

Fig. C5.10
I criterio di congruenza.

Ipotesi: AB≅DE, BC≅EF, $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$.
Tesi: ABC≅DEF.
Dimostrazione:

Si sovrappone il segmento AB al segmento DE, il segmento BC al segmento EF e l'angolo $A\hat{B}C$ all'angolo $D\hat{E}F$. Tale sovrapposizione è possibile perché per ipotesi questi lati e l'angolo compreso sono congruenti.
Allora il vertice A risulta sovrapposto al vertice D e il vertice C risulta sovrapposto al vertice F. Avendo tutti i vertici sovrapposti i due triangoli sono congruenti.

Osservazione: non basta che due triangoli abbiano congruenti due lati e un angolo affinché essi siano congruenti. Si consideri infatti la costruzione seguente:

- Si consideri un triangolo ABC ottuso in B.
- Si tracci la circonferenza di centro B e raggio BC.
- Si consideri il punto E di intersezione tra la circonferenza e il lato AC.

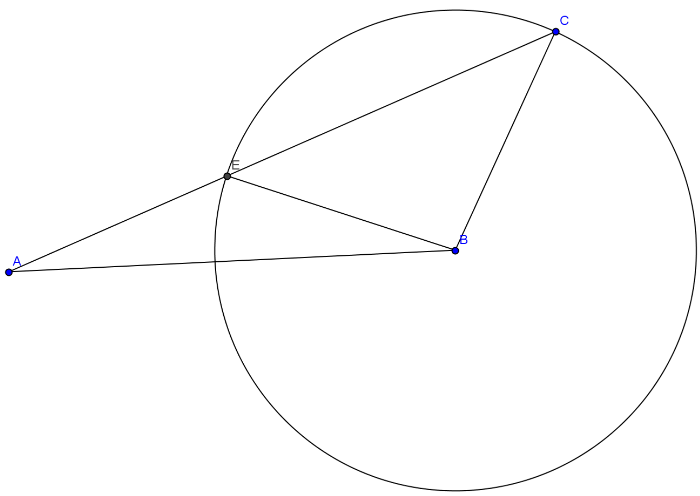

Fig. C5.11
Nel I criterio di congruenza l'angolo congruente deve essere quello compreso tra i lati congruenti.

I triangoli ABC e ABE hanno congruenti i lati AB≅AB perché in comune, BC≅BE per costruzione e $B\hat{A}C \cong B\hat{A}E$ perché in comune, ma i due triangoli non sono congruenti.

C5.11 II criterio di congruenza

II criterio di congruenza
Se due triangoli hanno congruenti due angoli e il lato compreso tra essi allora i due triangoli sono congruenti.
Ipotesi: AB≅DE, $C\hat{A}B \cong F\hat{D}E$, $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$.
Tesi: ABC≅DEF.
Dimostrazione: omessa, simile alla precedente.

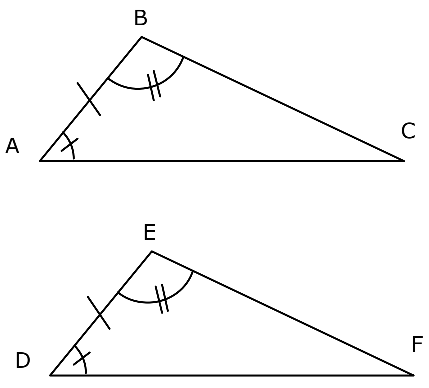

Fig. C5.12
II criterio di congruenza.

In realtà la dimostrazione del II criterio di congruenza simile alla precedente non è un ragionamento ben fatto. Hilbert, che ha rivisto la geometria euclidea sotto il punto di vista dell'impostazione assiomatica, aggiunge il II criterio di congruenza agli assiomi.

Anche in questo caso è necessario che il lato congruente nei due triangoli sia quello compreso tra gli angoli congruenti, altrimenti il teorema non vale, come si può vedere con la seguente costruzione:

- Si consideri un triangolo ottuso in B.
- Si tracci la circonferenza di centro B e raggio BC. Essa incontra il lato AB in D.
- Si tracci la parallela ad AC passante per D. Essa incontra il lato BC in E.

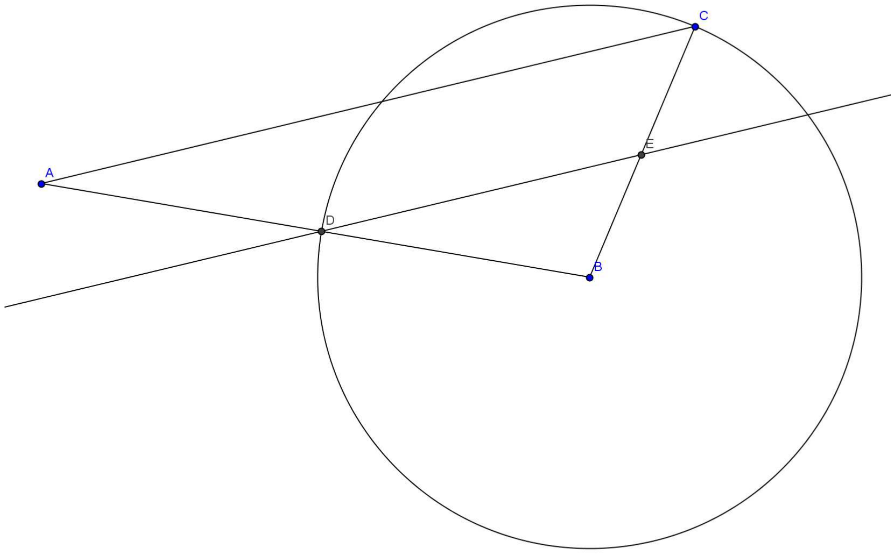

Fig. C5.13
Nel II criterio di congruenza il lato congruente deve essere quello compreso tra gli angoli congruenti.

I triangoli ABC e ADE hanno congruenti il lato BC≅BD per costruzione, $A\hat{B}C \cong D\hat{B}E$ perché in comune, $A\hat{C}B \cong D\hat{E}B$ perché alterni interni, ma i due triangoli non sono congruenti.

C5.12 III criterio di congruenza

III criterio di congruenza
Se due triangoli hanno congruenti i tre lati allora sono congruenti.
Ipotesi: AB≅DE, BC≅EF, AC≅DF.
Tesi: ABC≅DEF.
Dimostrazione: omessa.

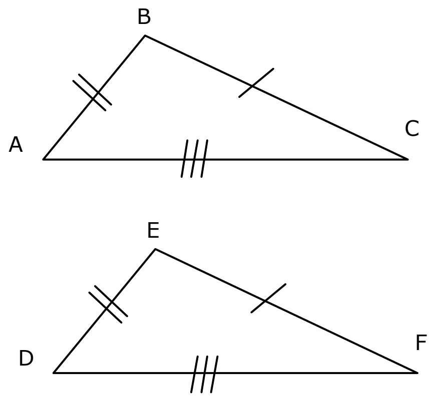

Fig. C5.14
III criterio di congruenza.

C5.13 Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli

Nei triangoli rettangoli si è già certi che c'è un angolo congruente, ed è quello retto. E' possibile quindi trovare criteri di congruenza più semplici dei tre criteri precedenti.
I criterio: se due triangoli rettangoli hanno congruenti i due cateti allora sono congruenti.
II criterio: se due triangoli rettangoli hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto opposto allora sono congruenti.
III criterio: se due triangoli rettangoli hanno congruenti un cateto e l'angolo acuto adiacente allora sono congruenti.
IV criterio: se due triangoli rettangoli hanno congruenti l'ipotenusa e un angolo acuto allora sono congruenti.
V criterio: se due triangoli rettangoli hanno congruenti l'ipotenusa ed un cateto allora sono congruenti.

C5.14 Alcuni esercizi svolti che utilizzano i criteri di congruenza

Esercizio C5.14a
Si consideri il segmento AB avente punto medio M. Si tracci una retta r passante per M e si disegnino su di essa, da parti opposte rispetto a M, due punti P e Q tali che PM≅MQ. Si dimostri che AP≅BQ.
IPOTESI: AM≅MB, PM≅MQ.
TESI: AP≅BQ.

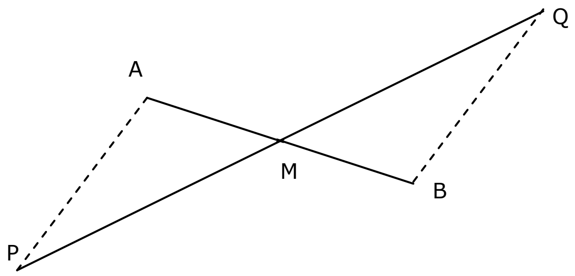

Fig. C5.15
Disegno per svolgere l'esercizio C5.14a.

I triangoli AMP e BMQ hanno congruenti:

- AM≅MB per ipotesi
- PM≅MQ per ipotesi
- $A\hat{M}P \cong B\hat{M}Q$ perché sono angoli opposti al vertice

Avendo congruenti due lati e l'angolo compreso tra essi sono congruenti per il I criterio di congruenza.
Essendo congruenti hanno congruenti tutti i lati e tutti gli angoli, quindi sono in particolare congruenti AP e BQ.

Esercizio C5.14b
Dato un triangolo ABC si consideri la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ e sia D il suo punto di intersezione con il lato BC. Si considerino sui lati AB e AC due punti E ed F tali che gli angoli $E\hat{D}A$ e $F\hat{D}A$ siano congruenti. Si dimostri che AE≅AF.
IPOTESI: $E\hat{A}D \cong F\hat{A}D$, $E\hat{D}A \cong F\hat{D}A$.
TESI: AE≅AF.

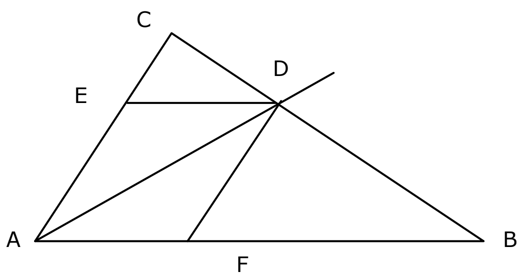

Fig. C5.16
Disegno per svolgere l'esercizio C5.14b.

I triangoli AED e AFD hanno congruenti:

- $E\hat{A}D \cong F\hat{A}D$ perché AD è la bisettrice dell'angolo con vertice A.
- $E\hat{D}A \cong F\hat{D}A$ per ipotesi
- AD≅AD perché è in comune ai due triangoli.

Avendo congruenti due angoli e il lato compreso tra essi sono congruenti per il II criterio di congruenza.
Essendo congruenti hanno congruenti tutti i lati e tutti gli angoli, quindi sono in particolare congruenti AE e AF.

C5.15 Proprietà del triangolo isoscele

Il triangolo isoscele ha un asse di simmetria, che è la retta passante per il vertice e per il punto medio della base.
Valgono i seguenti risultati:

- In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti, in quanto si corrispondono in una simmetria assiale.
- Se un triangolo ha due angoli congruenti allora è isoscele, in quanto i due angoli si corrispondono in una simmetria assiale e quindi ha due lati uguali.
- Se un triangolo è equilatero allora ha tutti gli angoli uguali.
- Se un triangolo ha tutti gli angoli uguali allora è equilatero.

Si dimostrano per esercizio alcune di queste proprietà cercando di non utilizzare le simmetrie ma utilizzando nella dimostrazione i criteri di congruenza dei triangoli.

Esercizio C5.15a
In un triangolo isoscele ABC di base AB gli angoli alla base sono congruenti.
IPOTESI: AC≅BC.
TESI: $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$.

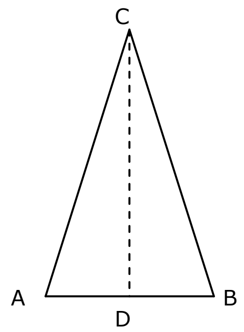

Fig. C5.17
Disegno per svolgere l'esercizio C5.15a.

DIMOSTRAZIONE
Si tracci la bisettrice dell'angolo C. Essa interseca la base AB nel punto D.
Si considerino i due triangoli ACD e BCD. Essi hanno congruenti

- $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$ perché CD è la bisettrice dell'angolo con vertice C.
- $AC \cong BC$ per ipotesi
- $CD \cong CD$ perché è in comune ai due triangoli.

Per il I criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti e hanno congruenti pertanto tutti i lati e tutti gli angoli. In particolare $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$.

Esercizio C5.15b
Un triangolo isoscele ABC avente due angoli congruenti è isoscele.
IPOTESI: $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$.
TESI: $AC \cong BC$.

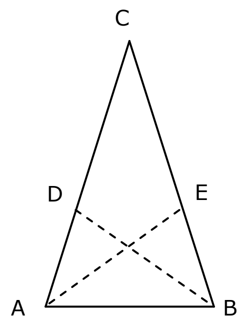

Fig. C5.18
Disegno per svolgere l'esercizio C5.15b.

DIMOSTRAZIONE
Si traccino le bisettrici degli angoli in A e B. Esse incontrano i lati AC e BC rispettivamente in E e D.
Si considerino i due triangoli ABD e ABE. Essi hanno congruenti:

- $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$ per ipotesi.
- $E\hat{A}B \cong D\hat{B}A$ perché essendo BD e AE le bisettrici essi sono la metà di angoli congruenti, quindi sono congruenti anch'essi.
- $AB \cong AB$ perché è in comune ai due triangoli.

Per il II criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti e hanno congruenti pertanto tutti i lati e tutti gli angoli.
In particolare $DB \cong AE$ e $A\hat{D}B \cong A\hat{E}B$.
Si considerino ora i due triangoli BDC e AEC. Essi hanno congruenti:

- $D\hat{C}B \cong E\hat{C}A$ perché è in comune.
- $A\hat{E}C \cong B\hat{D}C$ perché supplementari dei due angoli congruenti $A\hat{D}B \cong A\hat{E}B$ come dimostrato precedentemente.
- $BD \cong AE$ perché è stato dimostrato precedentemente.

Per il II criterio di congruenza i due triangoli BDC e AEC sono congruenti e hanno congruenti pertanto tutti i lati e tutti gli angoli. In particolare $AC \cong BC$.
Il triangolo ABC ha dunque due lati congruenti e quindi è isoscele.

Osservazione:
Non è affatto detto che valgano sia una implicazione che la sua opposta. In particolare si consideri l'esempio seguente:
Se sono cittadino italiano sono cittadino europeo.
Se sono cittadino europeo sono cittadino italiano.
La prima delle due è senz'altro vera, mentre la seconda no, non è affatto detto che un cittadino europeo sia per forza anche cittadino italiano.

Nel caso degli esempi precedenti vale sia una implicazione che la sua opposta, quindi è vero sia che un triangolo isoscele ha due angoli alla base congruenti, sia che se un triangolo ha due angoli congruenti allora è isoscele. Si può pertanto dire che vale una doppia implicazione, ossia:

UN TRIANGOLO E' ISOSCELE ⇔ UN TRIANGOLO HA DUE ANGOLI CONGRUENTI

C5.16 Disuguaglianza triangolare

E' possibile provare il seguente teorema:

Teorema (disuguaglianza triangolare I)
Dato un triangolo ABC ogni lato è minore della somma degli altri due.
IPOTESI: ABC è un triangolo.
TESI: AB<AC+BC, AC<AB+BC, BC<AC+AB.

Vale anche il seguente teorema:

Teorema (disuguaglianza triangolare II)
Dato un triangolo ABC ogni lato è maggiore della differenza degli altri due.
IPOTESI: ABC è un triangolo.
TESI: AB>AC-BC, AC>AB-BC, BC>AC-AB.

Osservazione importante:
Non esistono triangoli aventi lati di lunghezze 2, 4, 7. Infatti 7>2+4 e non vale la disuguaglianza triangolare. Si consideri infatti la costruzione seguente:

- Si tracci un lato AB di lunghezza 7
- Con centro in A si tracci una circonferenza di raggio 2
- Con centro in B si tracci una circonferenza di raggio 4

Le due circonferenze non si incontrano e pertanto non è possibile trovare un triangolo con i lati di lunghezze 2, 4 e 7.

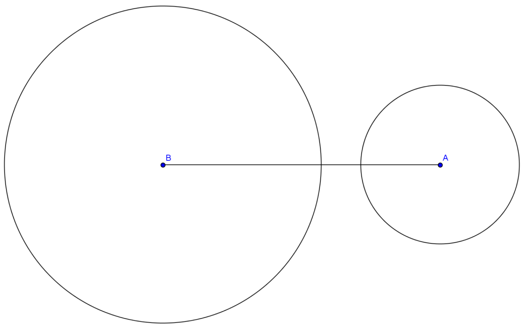

Fig. C5.19
Non esistono triangoli di lati di lunghezza 2, 4 e 7.

Se invece i lati hanno misure 3, 4 e 6 è possibile costruire il triangolo con il seguente procedimento.

- Si tracci un lato AB di lunghezza 6
- Con centro in A si tracci una circonferenza di raggio 3
- Con centro in B si tracci una circonferenza di raggio 4

Le due circonferenze si incontrano in un punto che è il terzo vertice del triangolo.

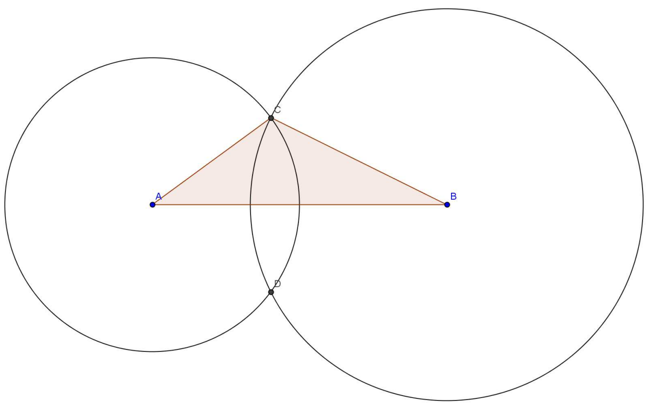

Fig. C5.20
Costruzione del triangolo di lati di lunghezza 3, 4 e 6.

C5.17 Una proprietà dei triangoli rettangoli

E' possibile provare il seguente teorema:

Teorema
La mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.
IPOTESI: ABC triangolo rettangolo in B, AD≅DC.
TESI: $BD \cong \frac{1}{2} AC$.

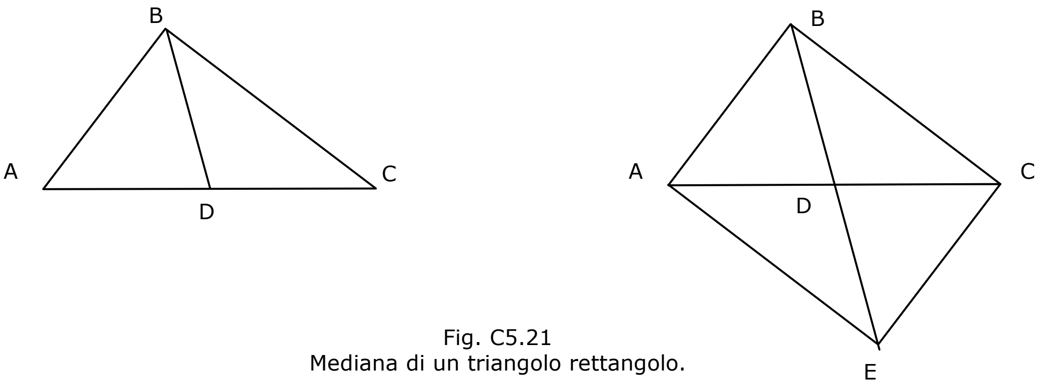

Fig. C5.21
Mediana di un triangolo rettangolo.

DIMOSTRAZIONE
Si prolunga BD di un segmento DE≅BD.
Si considerino i triangoli BDC e ADE. Essi hanno congruenti:

- $B\hat{D}C \cong A\hat{D}E$ perché opposti al vertice.
- AD≅DC per ipotesi.
- DE≅BD per costruzione.

Per il I criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti e hanno congruenti pertanto tutti i lati e tutti gli angoli. In particolare AE≅BC.

Si considerino gli angoli $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$. Essi sono complementari in quanto angoli acuti del triangolo rettangolo ABC.
Si considerino gli angoli $B\hat{C}A \cong C\hat{A}E$. Essi sono congruenti per la congruenza dei triangoli BDC e ADE dimostrata precedentemente. Da ciò segue che $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}E$ sono complementari, dunque l'angolo $B\hat{A}E$, somma di angolo complementari, è retto. Da ciò segue che il triangolo BAE è rettangolo.
Si considerino i triangoli ABC e BAE. Essi hanno congruenti:

- $B\hat{A}E \cong A\hat{B}C$ perché entrambi retti.
- AE≅BC perché lo si è dimostrato precedentemente.
- AB≅AB perché in comune.

Essi sono dunque congruenti e hanno congruenti tutti i lati e tutti gli angoli. In particolare BE≅AC.
Ma BE è la mediana di AC, quindi lo taglia in due parti congruenti. Da ciò segue che $BD \cong \frac{1}{2} BE \cong \frac{1}{2} AC$.