

C4. Isometrie

C4.1 Definizione di isometria

Date due figure congruenti è possibile passare da una all'altra con una trasformazione.

Una **trasformazione geometrica in un piano** è una funzione biunivoca che associa punti del piano a punti del piano. Le trasformazioni che associano a ogni figura una figura ad essa congruente sono dette **isometrie**.

Ad esempio al triangolo ABC in figura C4.1 per mezzo di una isometria è associato il triangolo A'B'C'.

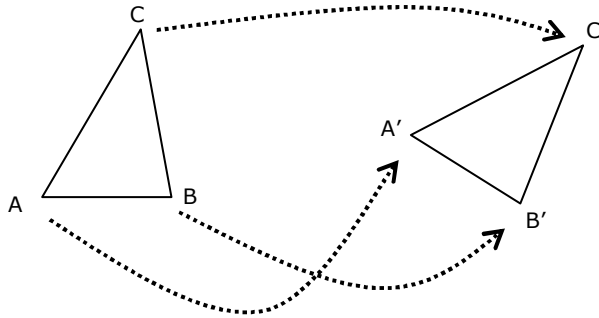


Fig. C4.1
Isometria.
 $f(ABC) = A'B'C'$

Una isometria generica verrà indicata con la lettera f . Per dire che la f trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' si scriverà $f(ABC) = A'B'C'$. A'B'C' è l'**immagine** del triangolo ABC. ABC è la **controimmagine** del triangolo A'B'C'. L'isometria che porta ogni punto in sé stesso è detta **identità** ed è una isometria banale. Nei paragrafi successivi verranno trattate altre isometrie: la traslazione, la simmetria assiale, la simmetria centrale e la rotazione.

C4.2 Traslazione

Un **vettore** è un segmento orientato, ossia un segmento alla cui estremità una freccia ne indica il verso. La retta su cui giace è detta **direzione** del segmento. La freccia indica il **verso** del segmento.

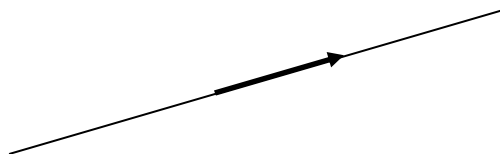


Fig. C4.2
Un vettore e la sua direzione.

Prendendo un punto A e facendolo scorrere nella direzione e nel verso dato si ottiene un altro punto A'.

Si indicherà la traslazione con la lettera τ e si scriverà $\tau(A)=A'$.

Nella figura C3.3 si ha un punto A e un vettore. Utilizzando il vettore dato il punto A viene traslato nel punto A'.

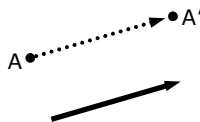


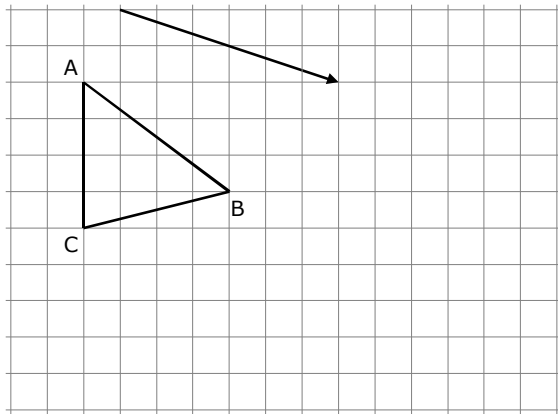
Fig. C4.3
Traslazione di un punto.

E' possibile traslare anche figure geometriche: ad esempio per traslare un triangolo basta traslare i suoi vertici e poi unirli con dei segmenti. E' importante scrivere sempre i nomi dei punti e dei loro traslati in modo da unirli nell'ordine corretto. Ciò è particolarmente importante per poligoni con più di tre lati.

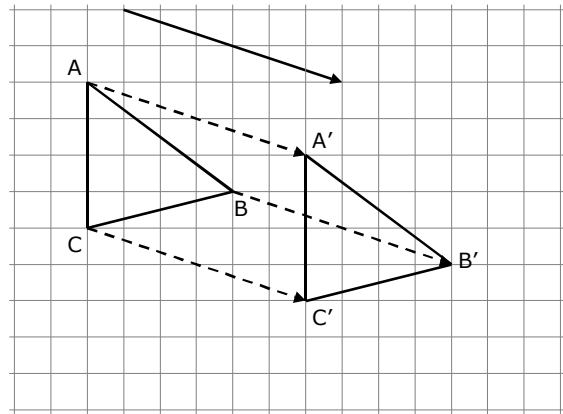
Se l'esercizio è svolto su un foglio a quadretti per svolgere l'esercizio si devono contare correttamente i quadretti.

C4.3 Esercizio svolto sulla traslazione

Dato il triangolo ABC traslarlo secondo il vettore dato.



Testo dell'esercizio



Svolgimento

Fig. C4.4

Esercizio svolto sulla traslazione.

C4.4 Composizione di traslazioni

Se si hanno due vettori è possibile effettuare due traslazioni una di seguito all'altra, una con il primo vettore e una con il secondo vettore. Prima di proseguire si provi a rispondere alle seguenti domande:

- Se si effettuano due traslazioni consecutive di una figura cosa si ottiene?
- E' la stessa cosa effettuare prima la traslazione con il primo vettore e poi con il secondo o viceversa?
- E' possibile effettuare una sola traslazione usando un solo vettore al posto delle due traslazioni con due vettori?

C4.5 Simmetria assiale

Sia data una retta detta **asse di simmetria** e un punto.

Per effettuare la simmetria assiale del punto rispetto all'asse si effettua il seguente procedimento:

- Si traccia la retta passante per il punto e perpendicolare all'asse di simmetria.
- Si misura la distanza tra il punto e l'asse.
- Si riporta tale distanza dall'altra parte rispetto all'asse.

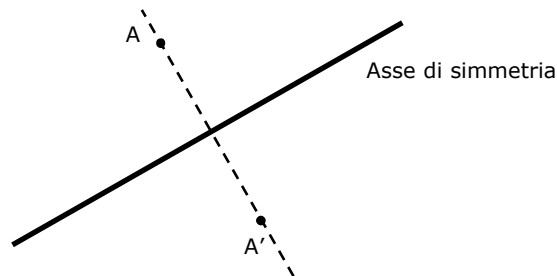


Fig. C4.5

Simmetria assiale.

E' possibile effettuare tutto ciò utilizzando una costruzione geometrica con riga e compasso:

- Si punta il compasso con centro in A e ampiezza maggiore della distanza tra A e l'asse di simmetria e si traccia tale circonferenza.
- La circonferenza interseca l'asse di simmetria in due punti che vengono chiamati B e C.
- Si punta in B con la stessa ampiezza utilizzata precedentemente e si traccia una circonferenza.
- Si punta in C con la stessa ampiezza utilizzata precedentemente e si traccia una circonferenza.
- Le due circonferenze con centri in B e C si incontrano nel punto A', che è il simmetrico di A rispetto all'asse.

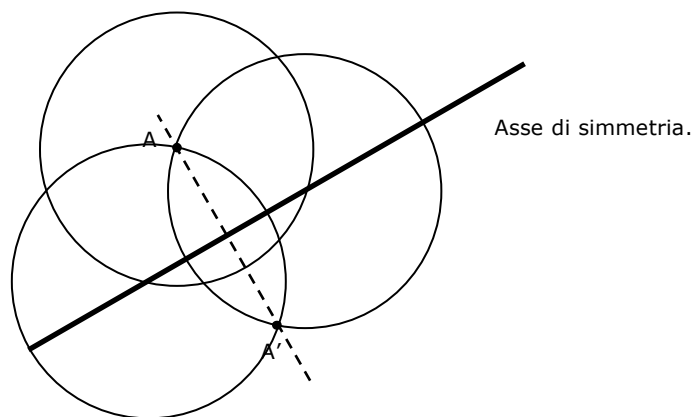
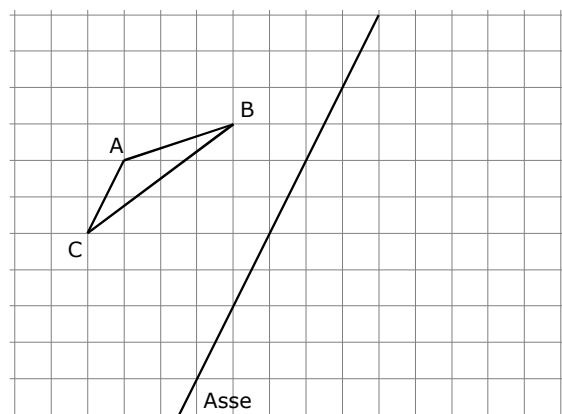


Fig. C4.6
Costruzione di una
simmetria assiale con riga
e compasso.

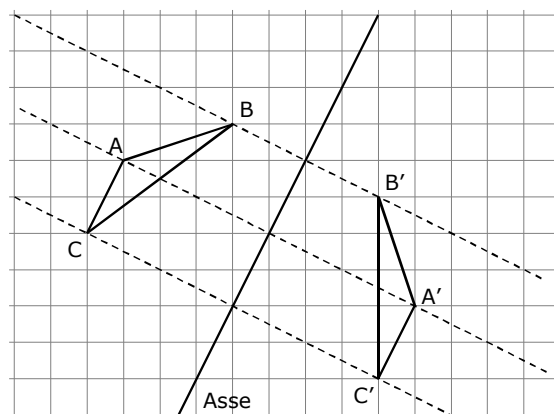
E' possibile effettuare simmetrie assiali anche di figure geometriche: per trovare il simmetrico di un triangolo basta effettuare la simmetria assiale dei singoli vertici e poi unire le immagini dei vertici. E' importante scrivere sempre i nomi dei punti e dei loro simmetrici in modo da unirli nell'ordine corretto, e ciò è particolarmente importante per poligoni con più di tre lati. Se l'esercizio è svolto su un foglio a quadretti si devono contare i quadretti per svolgere l'esercizio correttamente.

C4.6 Esercizio svolto sulla simmetria assiale

Dato il triangolo ABC e l'asse di simmetria effettuare la simmetria assiale.



Testo dell'esercizio



Svolgimento

Fig. C4.7
Esercizio svolto sulla simmetria assiale.

C4.7 Domande sulla simmetria assiale

- E' possibile ottenere una simmetria assiale con una trasformazione nello spazio?
- Cosa succede effettuando due volte una simmetria assiale rispetto allo stesso asse?
- Un **punto unito** è un punto che dopo la trasformazione rimane nello stesso posto. Quali sono i punti uniti di una simmetria assiale?
- Che cosa si ottiene effettuando la simmetria assiale di un segmento?
- Che cosa si ottiene effettuando la simmetria assiale di due rette parallele?

C4.8 Asse di simmetria

Gli assi di simmetria di una figura sono le rette che tagliano una figura in due parti che si corrispondono per una simmetria assiale.

Ad esempio il quadrato ha 4 assi di simmetria, il triangolo isoscele uno, il rettangolo due, come si vede nella figura C4.8.

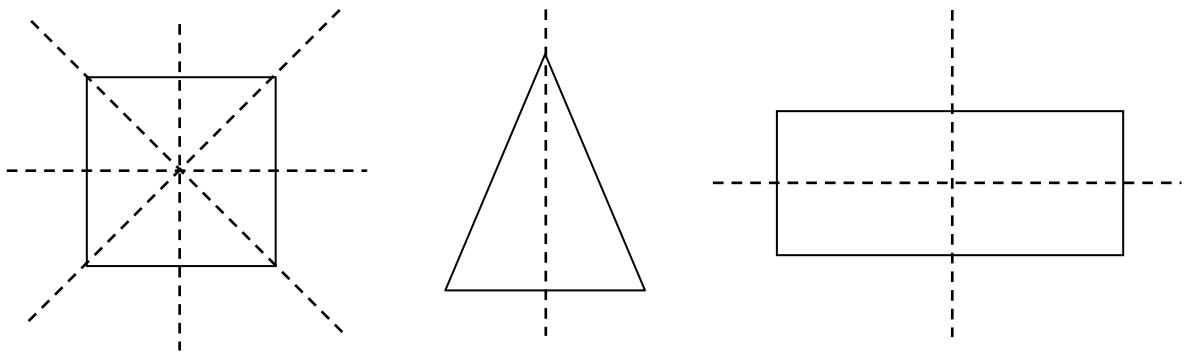


Fig. C4.8
Asse di simmetria di alcune figure geometriche.

C4.9 Asse di un segmento

L'asse di un segmento è la retta passante per il punto medio del segmento e perpendicolare ad esso. E' possibile tracciare l'asse di un segmento con una costruzione geometrica con riga e compasso, come mostrato in figura C4.10. Si provi per esercizio a scrivere il procedimento della costruzione geometrica dell'asse di un segmento.

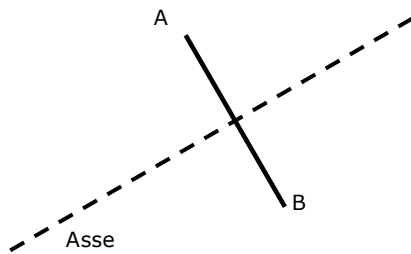


Fig. C4.9
Asse di un segmento

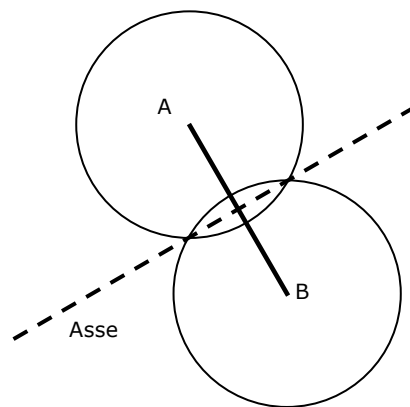


Fig. C4.10
Costruzione geometrica dell'asse di un segmento

C4.10 Simmetria centrale

Sia dato un punto O detto **centro di simmetria** e un punto A. Per effettuare la simmetria centrale del punto rispetto al centro di simmetria si effettua il seguente procedimento:

- Si traccia la retta passante per il punto e per il centro di simmetria.
- Si misura la distanza tra il punto e il centro di simmetria.
- Si riporta tale distanza dall'altra parte rispetto all'asse.

E' possibile effettuare tutto ciò con una costruzione geometrica con riga e compasso:

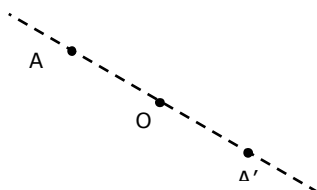


Fig. C4.11
Simmetria centrale

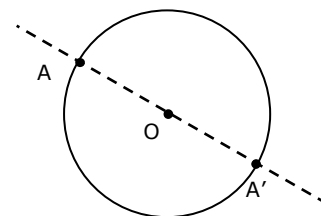
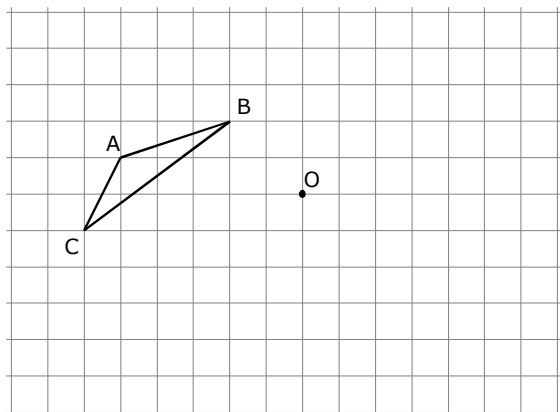


Fig. C4.12
Costruzione geometrica della simmetria centrale con riga e compasso.

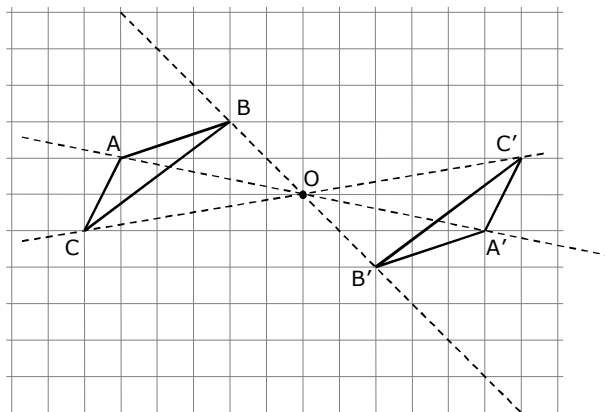
E' possibile effettuare simmetrie centrali anche di figure geometriche: per trovare il simmetrico di un triangolo basta effettuare la simmetria centrale dei vertici e poi unirli. E' importante scrivere sempre i nomi dei punti e dei loro simmetrici in modo da unirli nell'ordine corretto. Ciò è particolarmente importante per poligoni con più di tre lati. Se l'esercizio è svolto su foglio a quadretti per svolgere l'esercizio correttamente si devono contare i quadretti.

C4.11 Esercizio svolto sulla simmetria centrale

Dato il triangolo ABC e il centro di simmetria effettuare la simmetria centrale.



Testo dell'esercizio



Svolgimento

Fig. C4.13

Esercizio svolto sulla simmetria centrale.

C4.12 Centro di simmetria

Se si effettua la simmetria centrale di una figura rispetto a un punto e si ottiene la figura stessa allora il punto in questione è detto **centro di simmetria della figura**.

Il quadrato ha centro di simmetria, infatti la simmetria centrale rispetto al punto O in figura manda A in C, B in D, C in A e D in B. I triangoli, anche quelli isosceli o equilateri, non hanno centro di simmetria.

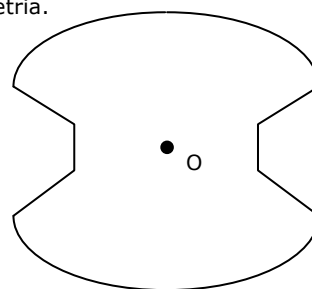
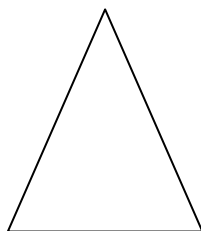
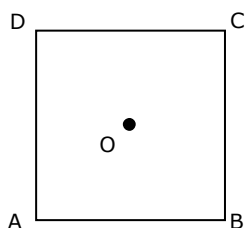


Fig. C4.14

Centri di simmetria di figure geometriche.

C4.13 Domande sulla simmetria

- E' possibile ottenere una simmetria centrale con una trasformazione nello spazio?
- Cosa succede effettuando due volte una simmetria centrale rispetto allo stesso centro?
- Un punto unito è un punto che dopo la trasformazione rimane nello stesso posto. Quali sono i punti uniti di una simmetria centrale?
- Che cosa si ottiene effettuando la simmetria centrale di un segmento?
- Cosa corrisponde ad una retta passante per il centro di simmetria?
- Se c'è il centro di simmetria ci sono sempre assi di simmetria?
- Se ci sono assi di simmetria c'è sempre il centro di simmetria?

C4.14 Rotazioni

Dato un punto O detto **centro di rotazione**, un punto A ed un angolo α è possibile effettuare la rotazione del punto rispetto al centro di rotazione con il seguente procedimento:

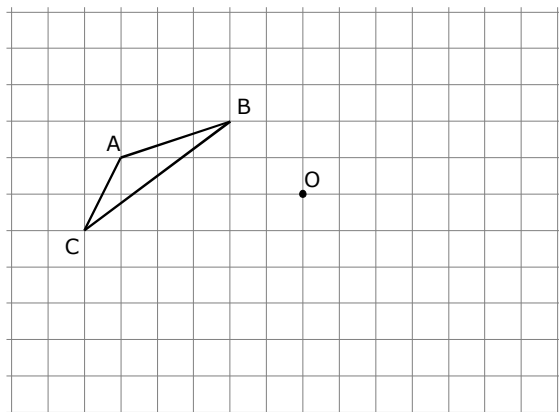
- Si traccia la retta r passante per il punto e per il centro di rotazione.
- Si ruota di un angolo α la retta r dell'angolo dato e si trova la retta r'.
- Si misura la distanza tra il centro di rotazione e il punto e si riporta tale distanza sulla retta r'.

Si può effettuare ciò con riga e compasso, ma serve anche il goniometro per misurare l'angolo.

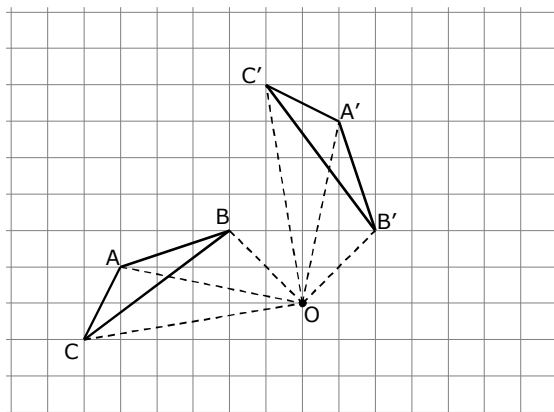
E' possibile effettuare rotazioni anche di figure geometriche: ad esempio per trovare effettuare la rotazione di un triangolo basta effettuare la rotazione dei vertici e poi unirli. E' importante scrivere sempre i nomi dei punti e dei loro simmetrici in modo da unirli nell'ordine corretto. Ciò è particolarmente importante per poligoni con più di tre lati. Se l'esercizio è svolto su foglio a quadretti e le rotazioni sono di 90° basta contare i quadretti per svolgere l'esercizio correttamente, e non c'è bisogno del goniometro.

C4.15 Esercizio svolto sulle rotazioni

Dato il triangolo ABC e il centro di rotazione effettuare la rotazione di 90° in senso orario.



Testo dell'esercizio



Svolgimento

Fig. C4.15

Esercizio svolto sulle rotazioni.

C4.16 Domande sulle rotazioni

- Cosa si ottiene con una rotazione di 180°?
- Se si effettua una rotazione in senso orario di un angolo α e poi in senso antiorario dello stesso angolo cosa si ottiene?
- Ci sono punti uniti in una rotazione?

C4.17 Esempio

E' possibile effettuare una serie di isometrie in un certo ordine. Tale operazione è detta **composizione di isometrie**. Ad esempio è possibile effettuare prima una traslazione e poi una simmetria assiale oppure prima la simmetria assiale e poi la rotazione. Si vede nella figura C3.16 che l'ordine cambia il risultato della trasformazione.

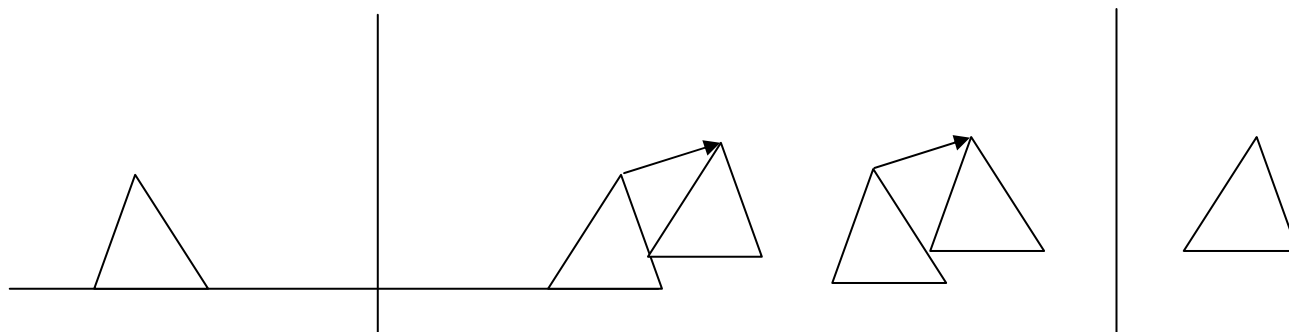


Fig. C4.16

Prima la simmetria assiale e poi la traslazione

Prima la traslazione e poi la simmetria assiale