C3. Rette parallele e perpendicolari

C3.1 Rette perpendicolari

Due rette r ed s sono dette **perpendicolari** se incrociandosi formano quattro angoli congruenti. Si scrive $r \perp s$.

C3.2 Teorema: rette perpendicolari formano angoli retti

Due rette perpendicolari formano 4 angoli retti.
Ipotesi: due rette sono perpendicolari.
Tesi: gli angoli che formano incrociandosi sono retti.
Dimostrazione: due rette perpendicolari formano 4 angoli uguali. La somma di questi quattro angoli uguali è un angolo giro. Un angolo giro diviso in quattro parti uguali forma 4 angoli retti.

Come si fa a capire se due rette sono perpendicolari?
Si controlla l'ampiezza degli angoli che esse formano incrociandosi. Se formano 4 angoli retti sono perpendicolari. In realtà basta che uno dei quattro sia retto, se uno lo è lo sono anche gli altri.

C3.3 Costruzione della perpendicolare

Problema: data una retta r e un punto P trovare la perpendicolare alla retta r passante per il punto P.

Metodo I: con riga e squadretta.
Si fissa la riga sulla retta r e si fa scorrere la squadra sulla riga fino a fare passare la squadra per il punto P.

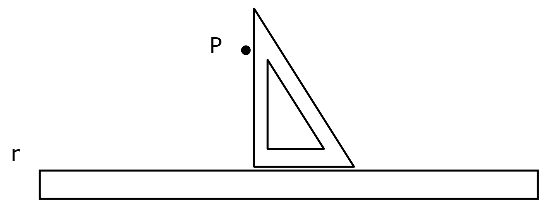

Fig. C3.1
Costruzione della perpendicolare con
riga e squadretta.

Metodo II: con riga e compasso.
- Si traccia la circonferenza passante per P che interseca la retta r in A e B.
- Si traccia la circonferenza di centro A e raggio AB.
- Si traccia la circonferenza di centro B e raggio BA.
- Le circonferenze di centri A e B e raggio AB si intersecano in C e D.
- La retta passante per C e D passa anche per P ed è la retta s passante per P perpendicolare a r.

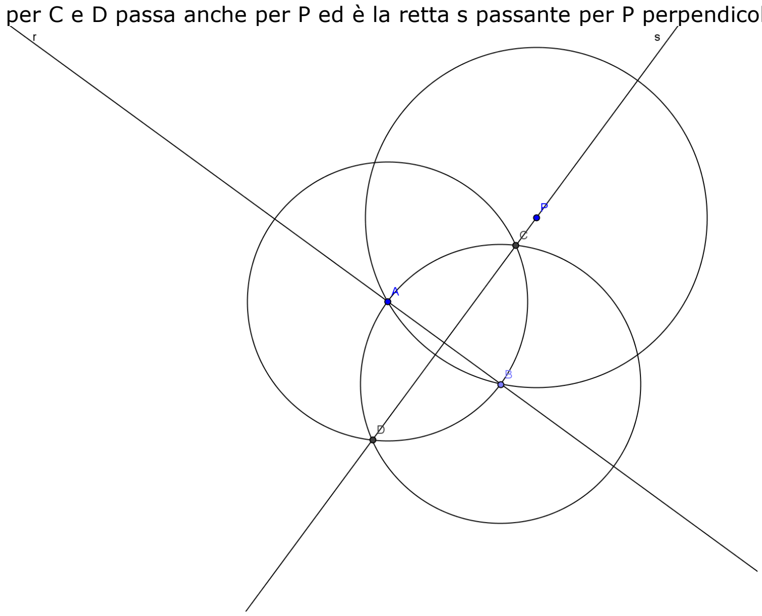

Fig. C3.2
Costruzione della retta s passante per P e perpendicolare a r.

Metodo III: contando i quadretti nel foglio a quadretti.
Questo metodo verrà approfondito in seguito in geometria analitica.

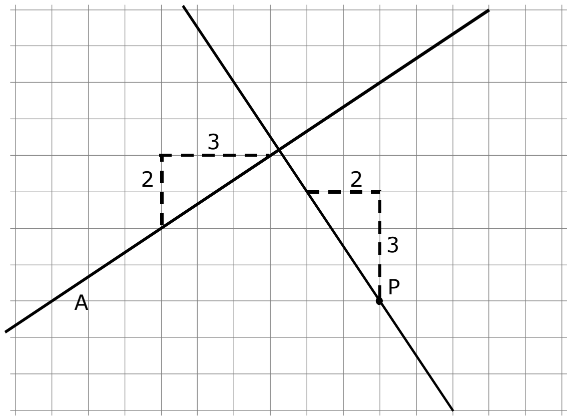

Fig. C3.3
Costruzione della perpendicolare contando i quadretti.

Il procedimento visto permette di tracciare la retta s perpendicolare alla retta r passante per un punto $P \notin r$, ma se si vuole tracciare la perpendicolare a una retta r passante per un punto $P \in r$ il procedimento è lo stesso.

C3.4 Proiezione e distanza

Data una retta r e un punto P si traccia la perpendicolare s alla retta r passante per il punto P.
Il punto d'intersezione Q tra r ed s è detto **proiezione** di P su r, o anche **piede della perpendicolare**.
Il segmento PQ è detto distanza di P da r. La **distanza** di un punto P da una retta r è dunque la distanza tra il punto P e il piede della perpendicolare.

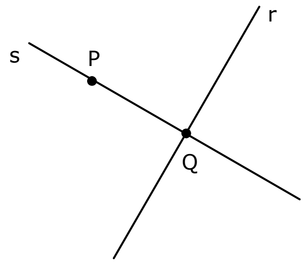

Fig. C3.4
Costruzione della proiezione di P su r.

Il procedimento appena visto permette di trovare la proiezione di un punto su una retta. E' possibile determinare anche la proiezione di un segmento su una retta con il procedimento seguente.

Procedimento per determinare la proiezione di un segmento AB su una retta r:
- Si traccia la retta s perpendicolare a r passante per A.
- Si traccia la retta t perpendicolare a r passante per B.
- Si trova il punto A' intersezione di r ed s.
- Si trova il punto B' intersezione di r e t.
- Il segmento A'B' è detto proiezione ortogonale del segmento AB sulla retta r.

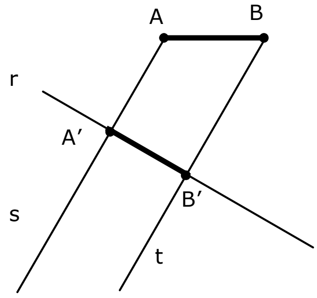

Fig. C3.5
Costruzione della proiezione del segmento AB su r.

C3.5 Rette incidenti, coincidenti e parallele

Le rette che hanno un solo punto in comune sono dette **incidenti**.
Le rette che hanno tutti i punti in comune (cioè sono sovrapposte) sono dette **coincidenti**.
Due rette r ed s sono dette **parallele** se non hanno punti di intersezione oppure coincidono. Si scrive r\\s.

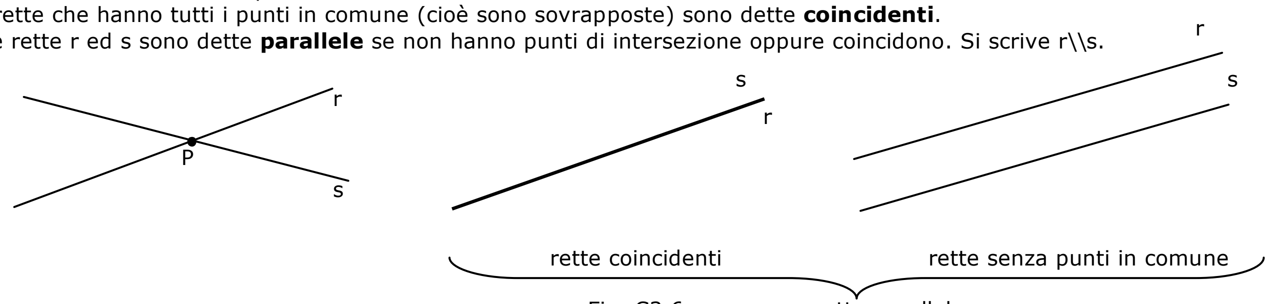

Fig. C3.6
Rette incidenti, coincidenti e parallele.

C3.6 Tracciare rette parallele a una retta data

Come si fa a tracciare una retta parallela a una retta data passante per un punto esterno ad essa?

Metodo I: con riga e squadretta.
Si fissa un lato della squadretta sulla retta e l'altro sulla riga. Tenendo fissa la riga si fa scorrere la squadra fino a farla passare per il punto esterno. Il quinto postulato di Euclide afferma proprio che per un punto qualsiasi del piano è possibile tracciare una ed una sola retta parallela alla retta data passante per il punto.

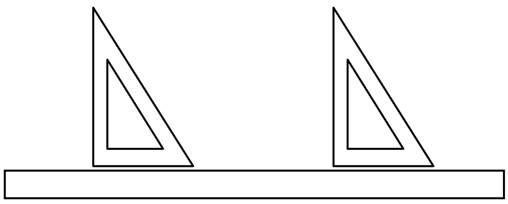

Fig. C3.7
Tracciare con riga e squadra una retta parallela ad una retta data passante per un punto esterno ad essa.

Metodo II: con riga e compasso.
Prima parte: si traccia la retta s perpendicolare a r e passante per P, come visto in C4.3, figura C4.2.
Seconda parte: una volta costruita la retta s perpendicolare a r passante per P si prosegue così

- Si traccia una circonferenza di centro P e raggio qualsiasi, essa interseca s in F e G.
- Si traccia una circonferenza di centro F e raggio a piacere ma maggiore di FP.
- Si traccia una circonferenza di centro G e raggio a piacere ma maggiore di GP.
- Le due circonferenze di centri F e G si intersecano in H e I.
- La retta passante per I e H passa anche per P ed è la retta t passante per P parallela a r.

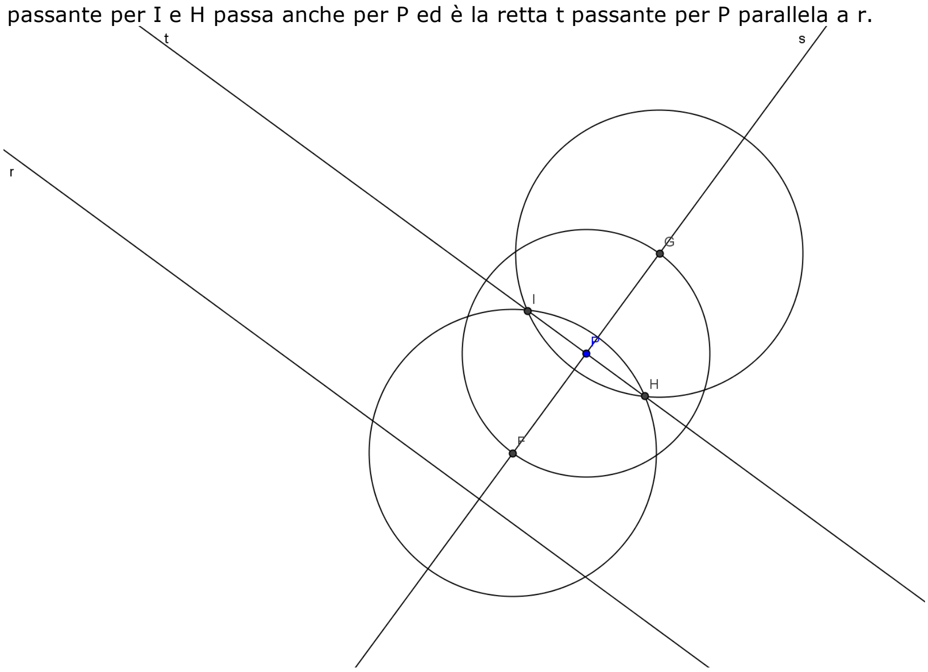

Fig. C3.8
Costruzione della retta t passante per P e parallela a r.

Metodo III: contando i quadretti
Questo metodo verrà approfondito in seguito in geometria analitica.

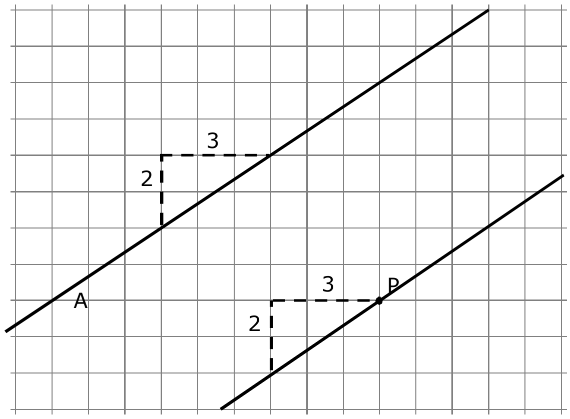

Fig. C3.9
Costruzione della parallela contando i quadretti.

Si noti che nella costruzione precedente si è dato per scontato che due rette perpendicolari alla stessa retta siano parallele tra loro. Ciò è vero per il teorema delle due perpendicolari che verrà dimostrato in C3.10.

C3.7 Parallelismo come relazione di equivalenza

Teorema
Due rette distinte parallele alla stessa retta sono parallele tra loro.
IPOTESI: due rette r ed s sono parallele alla retta t.
TESI: le rette e r ed s sono parallele.
DIMOSTRAZIONE
Si supponga, per assurdo, che r ed s si incontrino in un punto P. In tal caso esisterebbero due rette r ed s passanti per P e parallele alla retta t. Ciò è in contraddizione con il quinto postulato di Euclide, che afferma che esiste una unica retta passante per P e parallela a t. Non è dunque possibile che esista un punto P nel quale r ed s si incontrano, e pertanto r ed s sono parallele.

Dal teorema precedente si ha che tutte le rette parallele a una retta data sono parallele tra loro. Da ciò si deduce che il parallelismo è una relazione di equivalenza. Infatti valgono le proprietà:

- RIFLESSIVA ogni retta è parallela a sé stessa, poiché è coincidente a sé stessa.
- SIMMETRICA se la retta r è parallela alla retta s allora la retta s è parallela alla retta r.
- TRANSITIVA se r è parallela a s ed s è parallela a t allora la retta r è parallela a t.

Valgono le tre proprietà richieste quindi è una relazione di equivalenza.

L'insieme di tutte le rette passanti per un punto è detto **fascio proprio**.

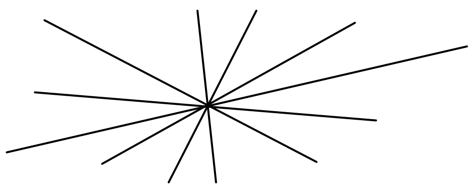

Fig. C3.10
Fascio proprio.

L'insieme di tutte le rette parallele a una retta data è detto **fascio improprio**.

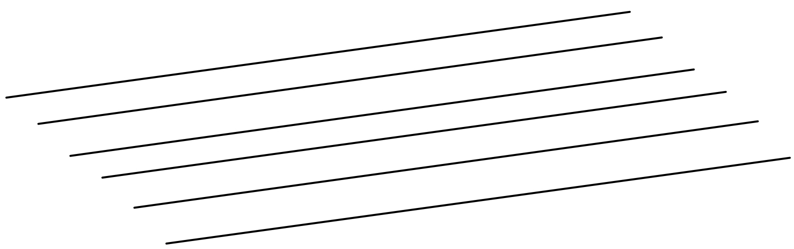

Fig. C3.11
Fascio improprio.

C3.8 Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale

Se si prendono due rette non coincidenti r ed s e una retta t che le interseca si ottengono angoli che vengono chiamati con dei nomi particolari. Si indicano in figura C3.12 gli angoli con dei numeri per comodità di notazione.

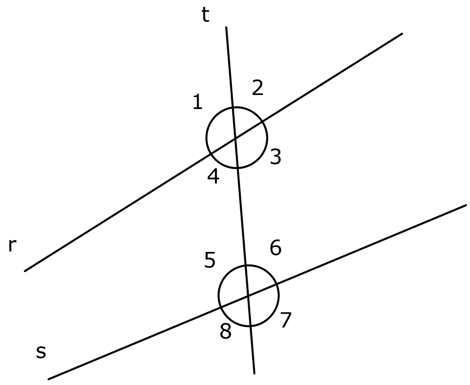

Fig. C3.12
Due rette tagliate da una trasversale.

Sono detti angoli **alterni interni** le coppie di angoli:	4 e 6; 3 e 5.
Sono detti angoli **alterni esterni** le coppie di angoli:	1 e 7; 2 e 8.
Sono detti angoli **corrispondenti** le coppie di angoli:	1 e 5; 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8.
Sono detti angoli **coniugati interni** le coppie di angoli:	4 e 5; 3 e 6.
Sono detti angoli **coniugati esterni** le coppie di angoli:	2 e 7; 1 e 8.

C3.9 Angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale

E' particolarmente importante il caso in cui, nella definizione precedente, le rette r ed s siano parallele.
In tal caso gli angoli precedentemente definiti assumono particolari proprietà.

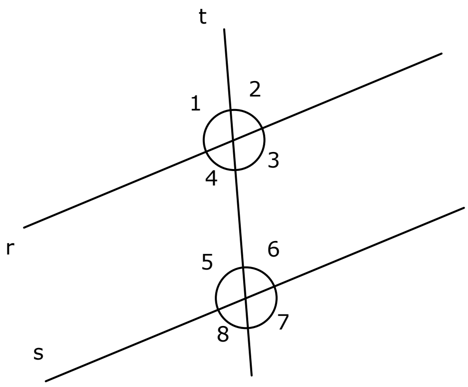

Fig. C3.13
Due rette parallele tagliate da una trasversale.

Se r ed s sono parallele **allora**:
Gli angoli **alterni interni** sono **congruenti**.
Gli angoli **alterni esterni** sono **congruenti**.
Gli angoli **corrispondenti** sono **congruenti**.
Gli angoli **coniugati interni** sono **supplementari**.
Gli angoli **coniugati esterni** sono **supplementari**.

Date due rette parallele tagliate da una trasversale si formano quindi angoli che sono congruenti o supplementari.
Ci si chiede anche se vale anche il contrario, ossia: se due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli congruenti o supplementari le rette sono parallele? La risposta è sì, come spiegato qui di seguito.

C3.10 Criteri di parallelismo

I criterio: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli **alterni interni congruenti** allora sono **parallele**.
II criterio: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli **alterni esterni congruenti** allora sono **parallele**.
III criterio: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli **corrispondenti congruenti** allora sono **parallele**.
IV criterio: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli **coniugati interni supplementari** allora sono parallele.
V criterio: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli **coniugati esterni supplementari** allora sono **parallele**.
Il caso particolare del paragrafo C3.9 e i criteri di parallelismo del paragrafo C3.10 possono essere dimostrati come teoremi. Se ne dimostra uno come esempio.

Teorema C3.10a
Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.
IPOTESI:
Due rette r ed s sono tagliate da una trasversale.
Gli angoli alterni interni sono congruenti.
TESI:
Le rette r ed s sono parallele.

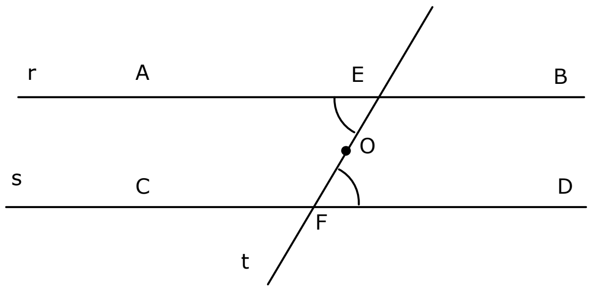

Fig. C3.14
Teorema degli angoli alterni interni.

DIMOSTRAZIONE
Sia O il punto medio del segmento EF.
Si consideri la simmetria centrale di centro O.
Secondo questa simmetria ad E corrisponde F e viceversa.
L'angolo $A\hat{E}F$ è congruente all'angolo $E\hat{F}D$, quindi questi due angoli si corrispondono nella simmetria centrale.
Alla semiretta AE corrisponde alla semiretta FD.
Due rette che si corrispondono in una simmetria centrale sono parallele, quindi le rette AB e CD sono parallele.

Osservazione importante:
Come si fa a capire se due rette sono parallele?
Le si taglia con una trasversale.
Se gli angoli alterni interni che ne risultano sono congruenti allora le rette sono parallele.
Quindi per dimostrare che due rette sono parallele basta mostrare che, tagliandole con una trasversale, gli angoli alterni interni sono congruenti.

Utilizzando i criteri di parallelismo è possibile dimostrare che due rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele, proprietà che avevamo utilizzato per costruire geometricamente la parallela a una retta data.

Teorema C3.10b
Due rette r ed s perpendicolari alla stessa retta t sono parallele.

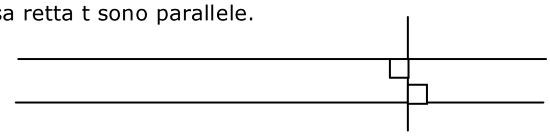

Fig. C3.15
Due rette perpendicolari alla stessa retta sono parallele tra loro.

IPOTESI: $r\perp t$, $s\perp t$.
TESI: r\\s.
DIMOSTRAZIONE
$r\perp t$, quindi r e t incontrandosi formano quattro angoli retti.
$s\perp t$, quindi s e t incontrandosi formano quattro angoli retti.
Gli angoli alterni interni sono perciò entrambi retti, e quindi congruenti. Da ciò segue che r\\s.

C3.11 Teoremi su triangoli e angoli

In questo paragrafo dimostreremo molte importanti proprietà di triangoli e poligoni utilizzando alcuni importanti teoremi.
Per iniziare è necessario definire l'angolo esterno di un triangolo.
L'angolo $B\hat{C}E$ è **detto angolo esterno** del triangolo.

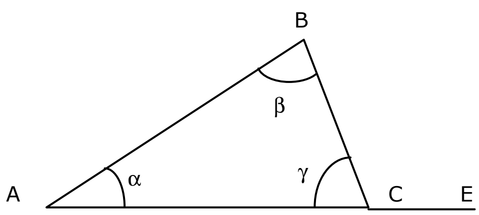

Fig. C4.16
Angolo esterno di un triangolo.

Teorema (dell'angolo esterno di un triangolo)
Ogni angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti.
IPOTESI: ABC è un triangolo.
TESI: $\alpha + \beta \cong B\hat{C}E$

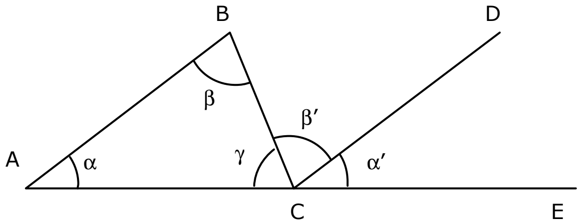

Fig. C3.17
Teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

DIMOSTRAZIONE:
Si traccia la retta CD parallela ad AB passante per C.
Si traccia il prolungamento CE del segmento AC.
Le rette AB e CD sono parallele, tagliate dalla trasversale BC. Gli angoli β e β' sono alterni interni, quindi sono congruenti.
Le rette AB e CD sono parallele, tagliate dalla trasversale AE. Gli angoli α e α' sono corrispondenti, quindi sono congruenti.
Si ha: $\alpha + \beta \cong \alpha' + \beta' \cong B\hat{C}E$.■

Corollario
La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.
IPOTESI: ABC è un triangolo.
TESI: $\alpha + \beta + \gamma \cong \pi$
Ci si riferisce sempre al disegno in figura C3.17.
DIMOSTRAZIONE:
Per il teorema precedente si ha: $\alpha + \beta \cong \alpha' + \beta' \cong B\hat{C}E$.
Vale anche $A\hat{C}E \cong \pi$ per costruzione.
Da ciò segue $\alpha + \beta + \gamma \cong \alpha' + \beta' + \gamma \cong A\hat{C}E \cong \pi$.■

Per i teoremi seguenti si omette la dimostrazione.

Corollario
Gli angoli di un triangolo equilatero hanno ampiezza $\pi/3$.

Corollario
Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari, ossia la loro somma è $\pi/2$.

Corollario
Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.

C3.12 Proprietà degli angoli nei poligoni

In base a quanto detto è possibile calcolare la somma degli angoli interni di un poligono convesso qualsiasi.

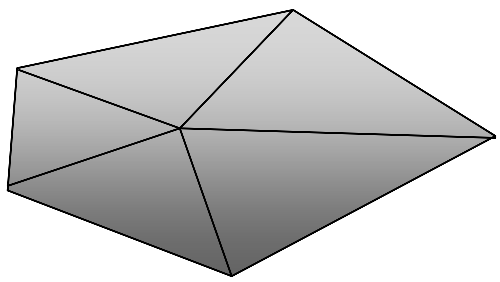

Fig. C3.18
Proprietà degli angoli nei poligoni.

Si consideri un punto qualsiasi all'interno del poligono. E' possibile, utilizzando tale punto, suddividere il poligono in tanti triangoli quanti sono i suoi lati, come mostrato in figura C3.17.

Si indichi con n il numero dei lati del poligono. La somma degli angoli di ogni triangolo è π, quindi la somma degli angoli dei cinque triangoli è $n\pi$. Per ottenere la somma degli angoli interni del poligono bisogna sottrarre l'angolo giro relativo al punto interno al poligono, ossia si deve sottrarre 2π. Da ciò si può dedurre che:

La somma degli angoli interni di un poligono convesso avente n lati è $n\pi-2\pi$.

Esempio: Un esagono ha sei lati, la somma dei suoi angoli interni è dunque $6\pi-2\pi=4\pi$.

Esempio: La somma degli angoli interni di un poligono convesso è 3π. Quanti sono i suoi lati? $3\pi=5\pi-2\pi$, quindi il poligono ha cinque lati.