C2. Congruenza

C2.1 Figure congruenti

Due figure geometriche sono **congruenti** se sono sovrapponibili perfettamente. Il simbolo di congruenza è $\cong$.

Ecco alcuni esempi di figure congruenti:
- Due quadrati con i lati della stessa lunghezza sono congruenti.
- Due punti qualsiasi sono congruenti.
- Due segmenti di lunghezze diverse non sono congruenti.
- Due rette sono sempre congruenti.
- Un triangolo e un quadrato non sono congruenti.
- Gli angoli retti sono tutti congruenti tra loro.
- Gli angoli piatti sono tutti congruenti tra loro.

C2.2 Relazione di equivalenza

Una relazione è detta di equivalenza se valgono le seguenti proprietà:
- RIFLESSIVA $A\mathcal{R}A$
- SIMMETRICA se $A\mathcal{R}B$ allora $B\mathcal{R}A$
- TRANSITIVA se $A\mathcal{R}B$ e $B\mathcal{R}C$ allora $A\mathcal{R}C$

C2.3 Esempi di relazioni di equivalenza

La relazione "essere nati lo stesso anno" è una relazione di equivalenza.
Infatti:
- RIFLESSIVA ognuno è nato il suo stesso anno e quindi $A\mathcal{R}A$.
- SIMMETRICA se A è nato lo stesso anno di B allora B è nato lo stesso anno di A.
- TRANSITIVA se A è nato lo stesso anno di B e B è nato lo stesso anno di C allora A è nato lo stesso anno di C.

La relazione "essere più alti di un altro" non è una relazione di equivalenza.
Infatti:
- RIFLESSIVA chiunque non è più alto di sé stesso, quindi la riflessiva non vale.
- SIMMETRICA se A è più alto di B allora non è vero che B è più alto di A, e la simmetrica non vale.
- TRANSITIVA se A è più alto di B e B è più alto di C allora A è più alto di C, quindi la transitiva vale.

Per essere una relazione di equivalenza devono valere tutte e tre, le prime due non valgono e quindi la relazione "essere più alti di un altro" non è una relazione di equivalenza.

C2.4 La congruenza è una relazione di equivalenza

Infatti:
- RIFLESSIVA ogni figura è sovrapponibile perfettamente a sé stessa.
- SIMMETRICA se A è sovrapponibile a B allora B è sovrapponibile perfettamente ad A.
- TRANSITIVA se A è sovrapponibile perfettamente a B e B è sovrapponibile perfettamente a C allora A è sovrapponibile perfettamente a C.

Valgono tutte e tre le proprietà dunque la congruenza è una relazione di equivalenza.

C2.5 Congruenza come spostamento rigido

Si può immaginare una congruenza come una trasformazione, ossia uno spostamento rigido.
Ad esempio una congruenza è "spostare a destra di 3 quadretti". Spostando una figura a destra di 3 quadretti si ottiene una figura congruente a quella di partenza.
Considerando la congruenza come uno spostamento rigido allora la si può applicare a un oggetto in una certa posizione ottenendo un oggetto congruente ad esso in un'altra posizione. In tal modo una congruenza trasforma:
- Rette in rette.
- Segmenti in segmenti.
- Angoli in angoli.

C2.6 Congruenza e uguaglianza

Essere congruente NON VUOL DIRE essere uguale.
In un condominio capita spesso che gli appartamenti uno sopra l'altro siano congruenti, ma non è vero che il primo appartamento è uguale al secondo. Altrimenti il signor Rossi del primo piano e il signor Bianchi del secondo piano abiterebbero nella stessa casa!
Quindi due quadrati congruenti non sono lo stesso quadrato, ma sono due diversi quadrati. Essendo sovrapponibili perfettamente sono congruenti, ma sono diversi. Il simbolo di uguaglianza in matematica ha senso solo se le due quantità, quella prima del simbolo e quella dopo il simbolo, sono esattamente la stessa cosa. Ciò non accade per due figure congruenti, in quanto esse, occupando posizioni differenti nello spazio, non sono la stessa figura.

C2.7 Lunghezza e ampiezza

Tutti i segmenti congruenti tra loro hanno qualcosa in comune che viene chiamato **lunghezza**.
Tutti gli angoli congruenti tra loro hanno qualcosa in comune che viene chiamato **ampiezza**.

C2.8 Costruzioni geometriche

Quando si vuole eseguire una costruzione geometrica, secondo la geometria Euclidea, si possono utilizzare esclusivamente una riga e un compasso non graduati. Non è dunque permesso misurare i cm con il righello! Nelle costruzioni che seguiranno si cercherà di seguire tale procedura.

Costruzione (trasporto di un segmento)
Dato un segmento AB e una semiretta r di origine O è possibile costruire un segmento OC che giace sulla semiretta ed è congruente ad AB.

Si deve tracciare, utilizzando il terzo postulato di Euclide, la circonferenza di centro O e di raggio di lunghezza AB. Essa interseca la semiretta r nel punto C, e il segmento OC è congruente al segmento AB.
In pratica si apre il compasso con ampiezza AB e si traccia poi la circonferenza con centro O e raggio di lunghezza AB.

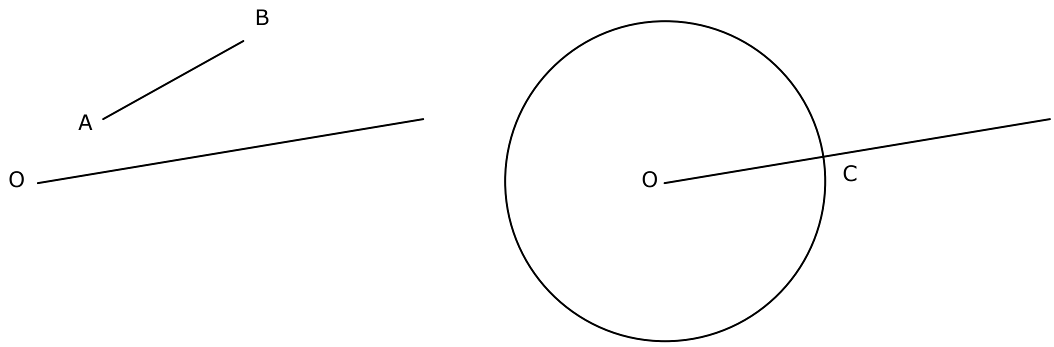


Fig. C2.1
Trasporto di un segmento.

Costruzione (trasporto di un angolo)
Dato un angolo $A\hat{B}C$ è possibile costruirne uno congruente.

Si effettui per esercizio questa costruzione utilizzando il procedimento seguente:

- Dato l'angolo $\hat{B}$ si utilizzi il compasso e si tracci una circonferenza di centro B e apertura a piacere che intersechi i due lati dell'angolo in A e C.
- Si tracci poi una semiretta r di origine E.
- Si disegni poi la circonferenza di centro E e raggio AB che intersechi la semiretta r in F.
- Si disegni poi la circonferenza di centro F e raggio AC. Essa interseca la circonferenza precedente in D.
- Si tracci la semiretta di origine E passante per D e si ottiene così l'angolo $D\hat{E}F$ congruente ad $A\hat{B}C$.

C2.9 Confronto tra segmenti

Dati due segmenti è possibile confrontarli, ossia capire se uno dei due è maggiore o minore dell'altro.
Siano dati i segmenti AB e CD in figura C2.2. Si sovrappone A con C, si sovrappongono per quanto possibile i due segmenti e si confrontano B e D.
Se B si trova tra C e D, dunque AB è minore di CD, e CD è maggiore di AB. Si scrive $AB<CD$.

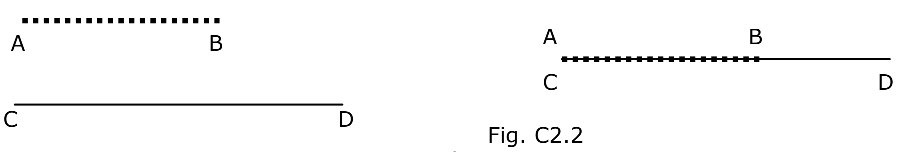


Fig. C2.2
Confronto tra segmenti.

Se, al contrario, fosse D a trovarsi tra A e B allora il segmento CD sarebbe minore di AB, e AB maggiore di CD.
Se B e D coincidessero allora i due segmenti sarebbero congruenti e si scriverebbe $AB \cong CD$.

C2.10 Somma e differenza di segmenti

Somma di segmenti
Dati i segmenti AB e CD si può costruire, come mostrato nella figura seguente, un segmento BE congruente a CD ed adiacente ad AB. Il segmento AE è la somma di AB e CD e si scrive $AB+CD \cong AE$.

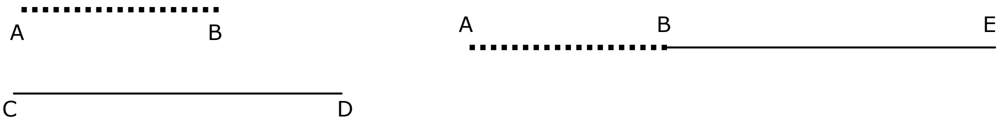


Fig. C2.3
Somma di segmenti.

Differenza di segmenti
Dati i segmenti AB e CD si sovrappone A con C e si sovrappongono per quanto possibile i due segmenti.
Il segmento BD è la differenza di AB e CD. Nella sottrazione va scritto prima il segmento maggiore dei due che in questo caso è CD, quindi si scrive CD-AB≅BD.

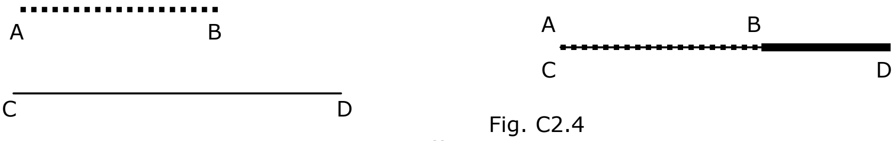


Fig. C2.4
Differenza tra segmenti.

Multiplo di un segmento
Dato $n \in \mathbb{N}$ si indica con AB≅nCD il segmento AB congruente a CD+CD+…+CD (n volte). AB è **multiplo** di CD.

Costruzione (multiplo di un segmento)
Costruzione di AB=3CD.
Dato il segmento CD si tracci una semiretta r qualsiasi di origine A. Si disegni la circonferenza avente centro A e raggio CD. Essa incontra la semiretta r in un punto E. Si disegni la circonferenza avente centro E e raggio CD. Essa incontra la semiretta r in A e in un altro punto F. Si tracci, infine la circonferenza avente centro F e raggio CD. Essa incontra la semiretta r in E e in un altro punto B. Il segmento AB è 3 volte il segmento CD.

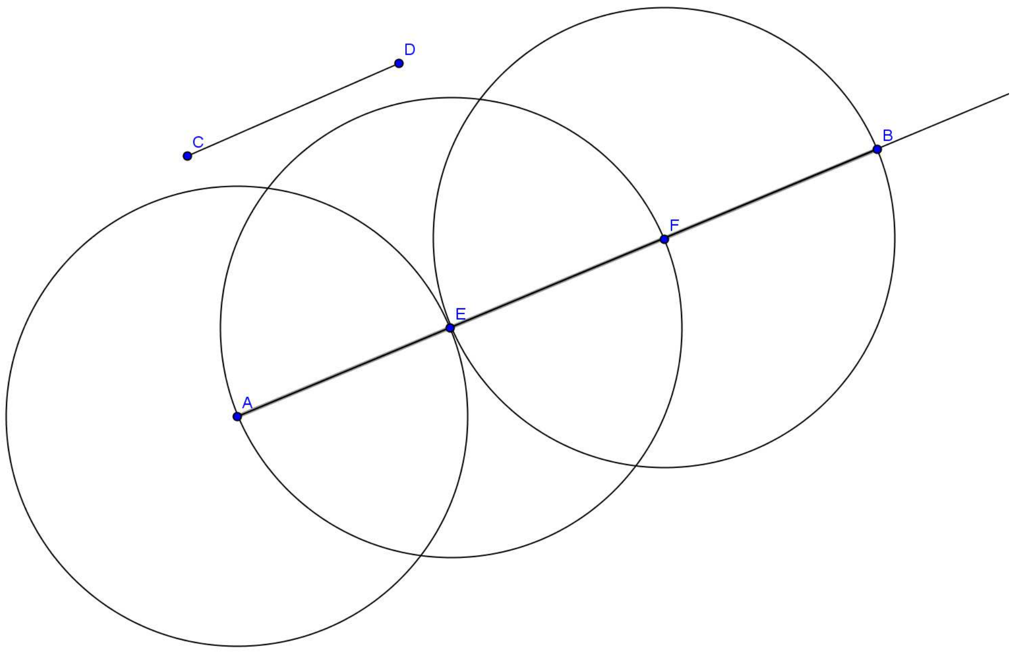


Fig. C2.5
Costruzione del multiplo di un segmento.

Sottomultiplo di un segmento
Si indica con $AB \cong \frac{1}{n} CD$ il segmento AB tale che CD≅AB+AB+…AB (n volte).

Costruzione (sottomultiplo di un segmento)
Per effettuare la costruzione del sottomultiplo di un segmento è necessario utilizzare alcune nozioni (rette parallele e teorema di Talete) che saranno trattate in capitoli successivi. Ciò nonostante si presenta comunque qui la costruzione per motivi di completezza.

Costruzione di $AE \cong \frac{1}{4} CD$

- Dato il segmento CD si tracci una semiretta r di origine C con $D \notin r$.
- Si tracci una circonferenza di centro C e raggio a piacere. Essa incontra la semiretta r in E_1.
- Si tracci una circonferenza di centro E_1 e raggio uguale al precedente. Essa incontra la semiretta r in F_1.

- Si tracci una circonferenza di centro F_1 e raggio uguale al precedente. Essa incontra la semiretta r in G_1.
- Si tracci una circonferenza di centro G_1 e raggio uguale al precedente. Essa incontra la semiretta r in H_1.
- Si tracci la retta s passante per D e H_1.
- Si tracci la retta t parallela a s passante per G_1. Essa incontra il segmento CD in G.
- Si tracci la retta u parallela a s passante per F_1. Essa incontra il segmento CD in F.
- Si tracci la retta v parallela a s passante per E_1. Essa incontra il segmento CD in E.
- Il segmento AE è il segmento cercato.

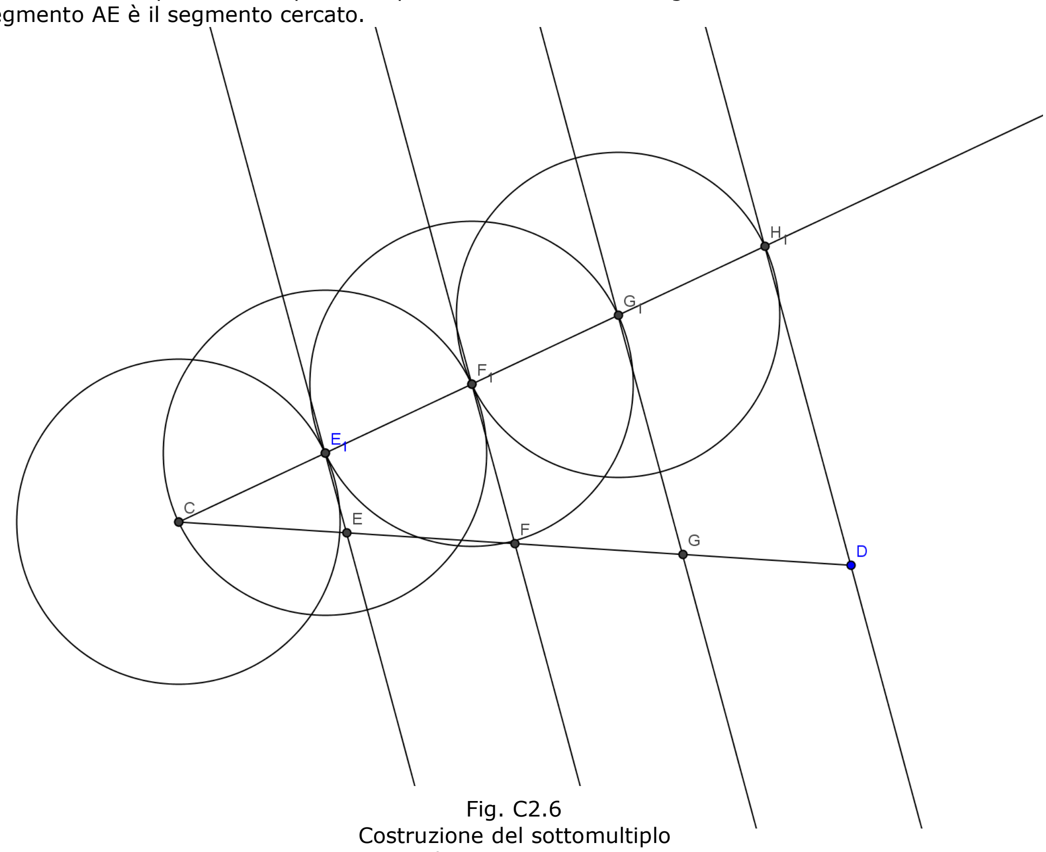


Fig. C2.6
Costruzione del sottomultiplo
di un segmento.

C2.11 Punto medio di un segmento

Dato un segmento AB è detto **punto medio** del segmento AB quel punto $M \in AB$ tale che $AM \cong MB$.

Costruzione (punto medio di un segmento)

- Dato il segmento AB si traccino le circonferenze di centri A e B e raggio AB.
- Esse si incontrano in due punti C e D.
- Si tracci la retta CD. Essa incontra il segmento AB nel punto medio M.

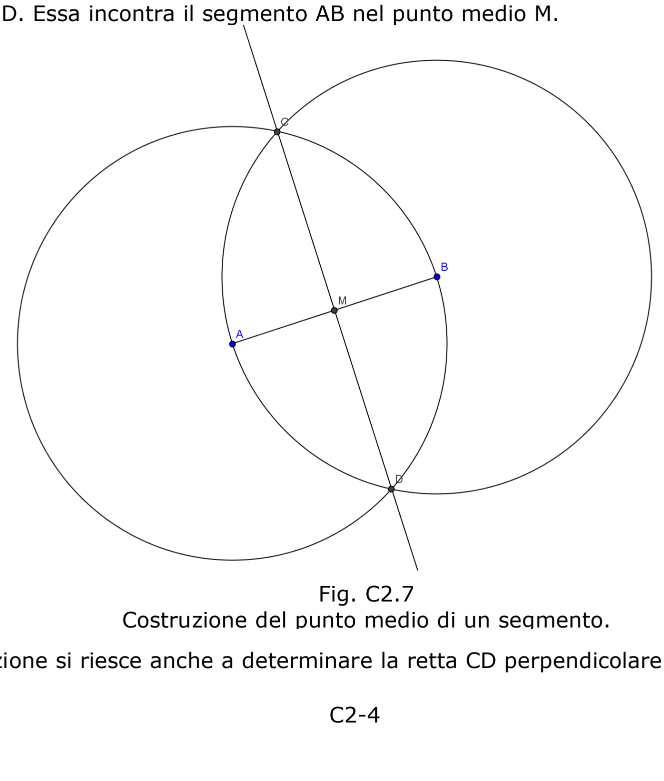


Fig. C2.7
Costruzione del punto medio di un segmento.

Si noti che con tale costruzione si riesce anche a determinare la retta CD perpendicolare ad AB.

C2.12 Confronto fra angoli

Dati due angoli è possibile confrontarli, ossia capire se uno dei due è maggiore o minore dell'altro.
Siano dati gli angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ in figura C2.8. Si sovrappone il lato AB con il lato DE e si confrontano i lati BC ed EF.
Il lato BC si trova dentro l'angolo $D\hat{E}F$, quindi $A\hat{B}C$ è minore di $D\hat{E}F$ e $D\hat{E}F$ è maggiore di $A\hat{B}C$.

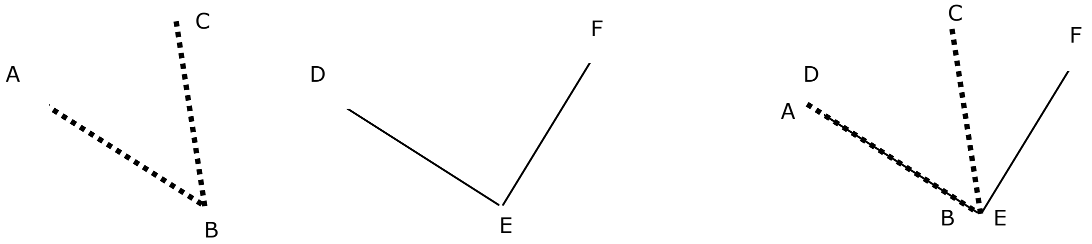


Fig. C2.8
Confronto di angoli.

C2.13 Somma e differenza di angoli

Dati due angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ si sovrappone BC con DE. La somma di $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ è l'angolo $A\hat{E}F$ e si scrive $A\hat{B}C + D\hat{E}F \approx A\hat{E}F$.

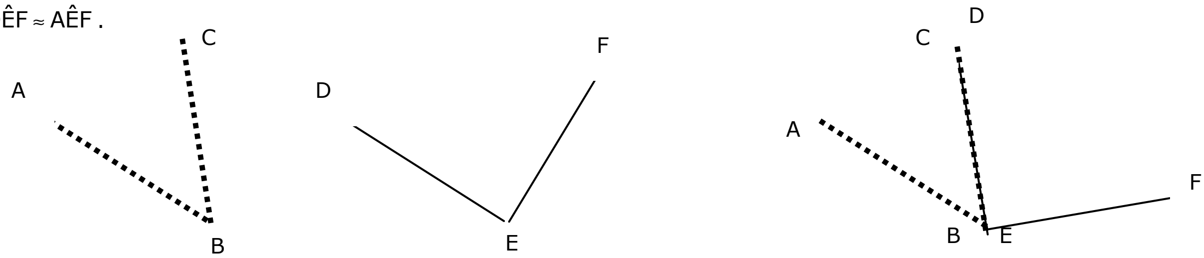


Fig. C2.9
Somma di angoli.

Dati due angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ si sovrappone AB con DE. Nella differenza va messo prima il maggiore dei due che è $D\hat{E}F$. La differenza di $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ è l'angolo $C\hat{E}F$ e si scrive $D\hat{E}F - A\hat{B}C \approx C\hat{E}F$.

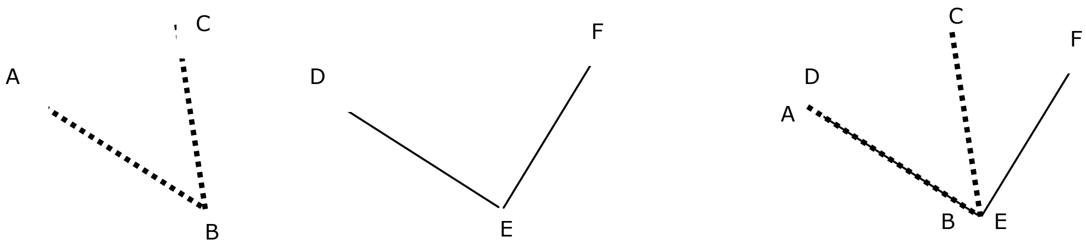


Fig. C2.10
Differenza di angoli.

Osservazione
Sommando o sottraendo angoli congruenti si ottengono angoli congruenti.
Se, ad esempio, sappiamo che $\alpha \cong \gamma$ e $\beta \cong \delta$, allora è vero che $\alpha+\beta \cong \gamma+\delta$ ed è vero anche che $\alpha-\beta \cong \gamma-\delta$.

Multiplo di un angolo
Dato $n \in \mathbb{N}$ si indica con $\alpha \cong n\beta$ l'angolo α congruente a $\beta+\beta+\ldots+\beta$ (n volte). α è **multiplo** di β. In tal caso si può anche dire che β sia **sottomultiplo** di α e si scrive $\beta \cong \frac{1}{n}\alpha$.

Osservazione
Dato un angolo è sempre possibile dividerlo in n parti congruenti tra loro. Non è detto che ciò sia semplice, e non neanche detto che sia possibile effettuare tale costruzione utilizzando solamente la riga e il compasso. In particolare non è possibile dividere un angolo qualsiasi in tre parti congruenti utilizzando solamente riga e compasso. E' possibile invece dividere un angolo in due parti congruenti utilizzando una costruzione con riga e compasso.

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due parti congruenti tra loro.

Costruzione (bisettrice)
- Dato un angolo di vertice A si tracci una circonferenza di centro A e raggio a piacere.
- Essa incontra i due lati dell'angolo in due punti B e C.
- Si traccino le circonferenze di centri B e C e raggio BC. Esse si incontrano in un punto D.

- La semiretta avente origine A e passante per D è la bisettrice dell'angolo dato.

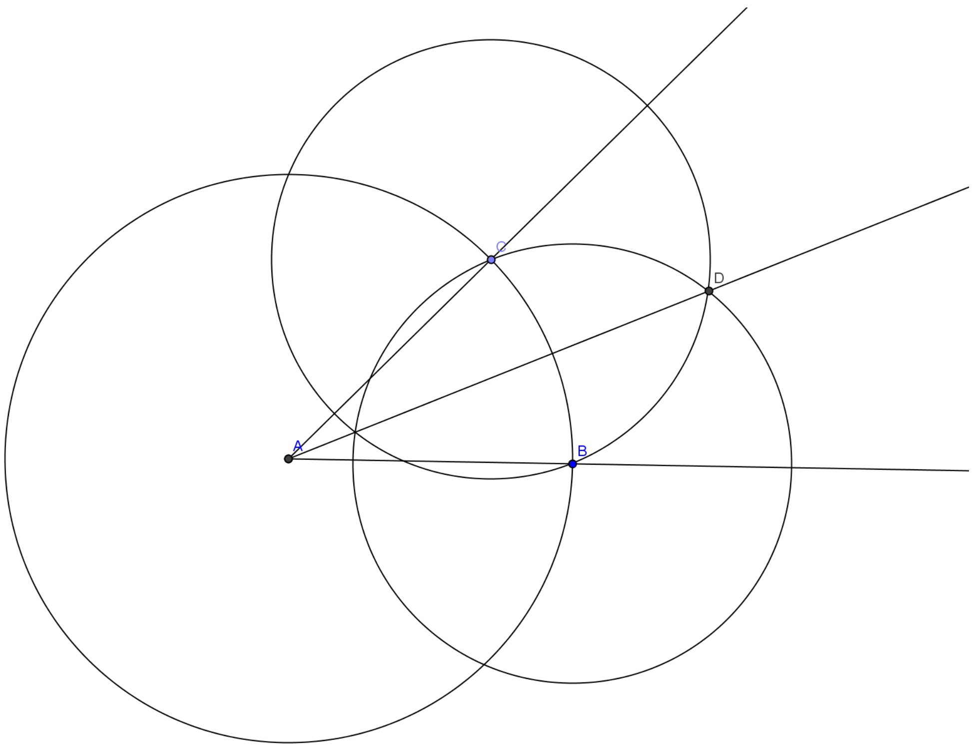


Fig. C2.11
Costruzione della bisettrice
di un angolo.

C2.14 Definizioni relative agli angoli

La bisettrice di un angolo piatto lo divide in due parti uguali. Ognuna di queste è detta **angolo retto**.
L'angolo **retto** è l'angolo che ha come ampiezza la metà di un angolo piatto, ed è indicato con $\pi/2$.
Un angolo minore di un angolo retto è detto **acuto**.
Un angolo maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto è detto **ottuso**.

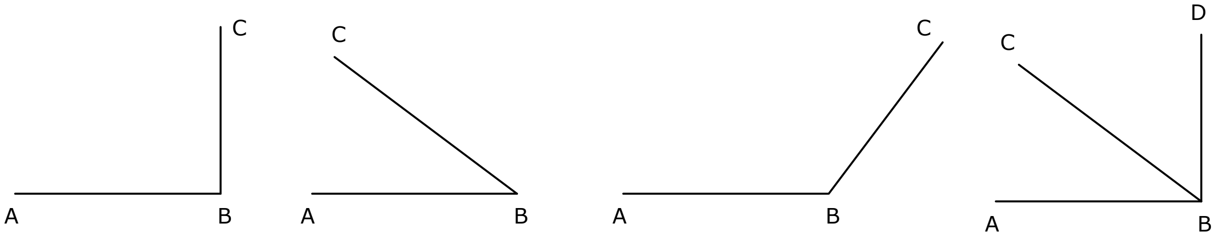
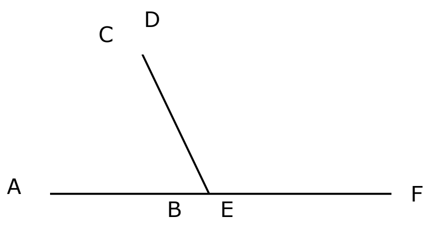


Fig. C2.12

Angolo retto Angolo acuto Angolo ottuso Angoli complementari

Due angoli sono detti **complementari** se la loro somma è un angolo retto.
Due angoli sono detti **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto.
Due angoli sono detti **esplementari** se la loro somma è un angolo giro.
Nella figura C2.13 a sinistra $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ sono supplementari, mentre a destra $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$ sono complementari.



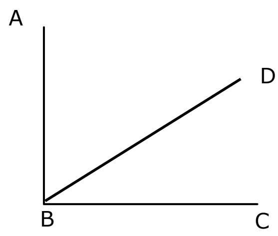


Fig. C2.13
Angoli supplementari e
complementari.

C2.15 Alcuni teoremi relativi agli angoli

E' possibile ora dimostrare alcuni teoremi relativi agli angoli. Spesso è opportuno utilizzare un disegno che permetta di comprendere la dimostrazione.

Teorema C2.15a
I complementari di angoli congruenti sono anch'essi congruenti.
IPOTESI: $\alpha \cong \alpha'$. β complementare di α, β' complementare di α'.
TESI: $\beta \cong \beta'$.
DIMOSTRAZIONE: per ipotesi $\alpha+\beta \cong \pi/2$, $\alpha'+\beta' \cong \pi/2$ e $\alpha \cong \alpha'$.
Dalle prime due relazioni si ha che $\alpha+\beta \cong \alpha'+\beta'$ da cui segue $\alpha+\beta-\alpha' \cong \beta'$.
Considerando che $\alpha \cong \alpha'$ si ottiene che $\beta \cong \beta'$.

Teorema C2.15b
Due angoli opposti al vertice sono congruenti.
IPOTESI: α e β sono angoli opposti al vertice.
TESI: $\alpha \cong \beta$.
DIMOSTRAZIONE: Dal disegno si vede che α e β sono supplementari di γ.
Dunque $\alpha+\gamma \cong \pi$ e $\beta+\gamma \cong \pi$. Da ciò segue che $\alpha+\gamma \cong \beta+\gamma$, da cui $\alpha+\gamma-\gamma \cong \beta$ e infine $\alpha \cong \beta$.

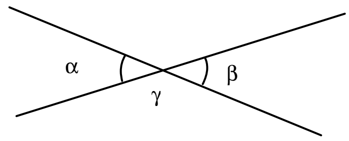


Fig. C2.14
Angoli opposti al vertice
sono congruenti.

C2.16 Misura di segmenti e angoli

Due segmenti sono detti **commensurabili** se hanno un sottomultiplo comune.

Fig. C2.15
Segmenti commensurabili.

I segmenti BC e DE in figura C2.15 sono commensurabili, in quanto il segmento OA è sottomultiplo di BC, in quanto $BC \cong 2OA$, ed è anche sottomultiplo di DE, in quanto $DE \cong 3OA$.
Potrebbe sembrare ovvio che, dati due qualsiasi segmenti, sia sempre possibile dividerli in parti abbastanza piccole da determinare un sottomultiplo comune. Ecco, questa era esattamente la convinzione ai tempi di Pitagora, convinzione dimostratasi poi FALSA. Esistono quindi coppie di segmenti che non hanno sottomultipli comuni e sono detti **incommensurabili**. L'esempio classico di segmenti incommensurabili è dato dal lato di un qualsiasi quadrato e dalla sua diagonale.
Dire che due segmenti AB e CD sono commensurabili equivale a dire che esistono due numeri interi m ed n tali che $nAB \cong mCD$. Ciò equivale a dire che $AB \cong \frac{m}{n}CD$, ossia che esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che $AB \cong \frac{m}{n}CD$.
Due segmenti sono invece incommensurabile se tale numero razionale non esiste. Ciò non vuol dire che i due segmenti non siano confrontabili, perché anche se non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che $AB \cong \frac{m}{n}CD$, esiste comunque un numero reale k tale che $AB \cong kCD$.

Procedimento per misurare un segmento
Si fissano un punto O e un punto A su una retta e si fissa una unità di misura $u \cong OA$.
Si dice che il segmento BC ha **misura** ku se $BC \cong kOA$.
Si dice che i punti B e C hanno **distanza** ku.

Se in figura C2.15 si considera $u \cong OA$ è ovvio che $BC \cong 2u$ e $DE \cong 3u$.

Per misurare gli angoli si usa come unità di misura l'angolo piatto π, che equivale a 180°.