C1. Prime nozioni di geometria

C1.1 Introduzione

Già dai tempi antichi la geometria è stata utilizzata per scopi pratici. La costruzione di un ponte, la recinzione di un campo, la misura dell'area di un terreno ai fini di stimarne la produzione e determinare quindi le tasse sono alcuni esempi pratici di utilizzo della geometria. Per risolvere questi casi pratici ci si "arrangiava" utilizzando l'intuito. Non veniva provato con un ragionamento che ciò che effettivamente si calcolava si basasse su una corretta teoria.
Gli antichi greci, per primi, affrontarono il problema di verificare con ragionamenti logici se le conclusioni intuitive fossero corrette o meno. Anziché effettuare molte prove al fine di verificare se una proprietà funzionasse svilupparono un ragionamento logico generale che garantisse la sicurezza del risultato. Non è infatti con numerosi esempi che si verifica se una certa proprietà è vera. Infatti è in teoria sempre possibile, prima o poi, trovare un esempio contrario.
Lo studio della geometria nasce basandosi su concetti **primitivi**. Tali oggetti primitivi non vengono definiti esattamente, anche se tutti ne hanno una comune idea condivisa.

C1.2 I concetti primitivi

In geometria ci si basa sui seguenti concetti primitivi, ossia concetti di cui non si dà una definizione esatta formale.
Le definizioni seguenti non sono quindi 'esatte'.
Il **punto**, che è un oggetto senza dimensioni. Lo si può immaginare come il segno di una punta di matita sul foglio di carta, ma molto più piccolo, tanto da non essere misurabile la sua larghezza. I punti vengono indicati da lettere maiuscole: A, B, C, …
La **retta**, che è un insieme infinito di punti allineati. La si immagina connessa (ossia non ha buchi), di lunghezza infinita in entrambi i versi, senza larghezza né spessore. Le rette vengono indicate con lettere minuscole: r, s, t, …
Il **piano**, che lo si può immaginare come l'estensione infinita in tutte le direzioni del pavimento, o della lavagna. Lo si immagina senza spessore. I piani vengono indicati con lettere greche: α, β, γ…

C1.3 Assiomi

Per costruire ragionamenti logici si parte dagli assiomi. Gli **assiomi** (o **postulati**) sono "*concetti di cui non si richiede la dimostrazione*", ma li si prende per veri, così come sono. A partire dagli assiomi è possibile effettuare ragionamenti logici che portano a risultati detti teoremi. I **teoremi** sono quindi "*concetti che hanno una dimostrazione*". I **teoremi** sono composti da una **ipotesi**, che è il punto di partenza del ragionamento, da una **tesi**, che è il punto di arrivo del ragionamento, e dalla **dimostrazione**, che è il ragionamento per passare dall'ipotesi alla tesi.
Ecco i **cinque postulati di Euclide,** sui quali egli ha basato lo studio della geometria:

1. Dati due punti distinti esiste una unica retta alla quale appartengono entrambi. Tre punti sulla stessa retta sono detti allineati.
2. La retta si può prolungare all'infinito.
3. Dato un punto e una lunghezza si può tracciare una circonferenza con centro nel punto e raggio uguale alla lunghezza data.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.
5. Dato un punto e una retta a cui il punto non appartiene c'è una unica retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Partendo da tali assiomi è dunque possibile effettuare ragionamenti logici per ricavare nuovi risultati. Ad esempio utilizzando il fatto che per un punto passano infinite rette, prendendone due di queste è ovvio che le due rette si incontrano in un punto. Tali rette sono dette **incidenti** e il loro punto di incontro è detto **intersezione**.
Si è dunque scoperta una nuova cosa, ossia che due rette incidenti si incontrano in un punto detto intersezione.
Questo non è un assioma, ma una conseguenza degli assiomi, ossia un teorema. La geometria che si basa sui cinque postulati precedenti è detta **geometria euclidea**.
Euclide, basandosi sui concetti primitivi e sui cinque postulati ha dimostrato un gran numero di teoremi. Questo non vuol dire che ciò che è affermato dai teoremi è "vero", ma vuol dire che se diamo per scontato che i postulati siano veri, allora lo è anche ciò che è affermato dai teoremi. E' possibile costruire una teoria della geometria differente dalla geometria euclidea sostituendo il quinto postulato con una sua negazione. La teoria della geometria che ne risulta è detta **geometria non euclidea**, ma è un tema che non verrà trattato in questa sede.

C1.4 Assioma dell'ordine

L'assioma dell'ordine afferma che data una retta è possibile mettere in ordine i suoi punti, e che dati due punti A e B è sempre possibile trovare un punto C compreso tra A e B.

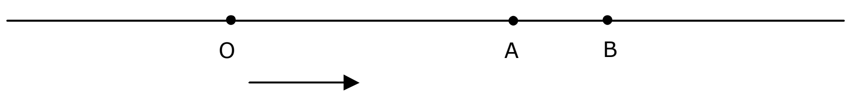

Fig. C1.1
Ordine dei punti in una retta.

Su una retta è convenzione fissare un punto chiamato **origine** e un **verso**, rappresentato da una freccia.

Immaginando che la retta sia un fiume in cui l'acqua scorre nel verso rappresentato dalla freccia, si può dire che 'A *precede* B', e si indica con '$A<B$'. Un'altra relazione che è possibile considerare è 'A *precede oppure è uguale* a B', e si indica con '$A \leq B$'.
Valgono le seguenti proprietà:
1) **proprietà riflessiva** – **$A \leq A$ per ogni elemento A**. (Ogni elemento è in relazione con se stesso)
2) **proprietà antisimmetrica** – **se $A \leq B$ e $B \leq A$ allora $A=B$.** (Se un elemento A è in relazione con B e B è in relazione con A allora A e B sono uguali)
3) **proprietà transitiva** - **se $A \leq B$ e $B \leq C$ allora $A \leq C$.**
Quando in una relazione valgono queste tre proprietà si dice che è una **relazione d'ordine**.
Non esiste un punto che precede tutti gli altri, quindi la retta è illimitata.

C1.5 Semirette

Ogni punto su una retta la suddivide in due **semirette.**
La semiretta ha quindi un punto, detto **origine**, che, una volta fissato un verso, precede (o segue) tutti gli altri.

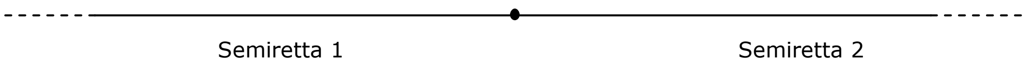

Fig. C1.2
Semirette.

C1.6 Segmenti

Un **segmento** è la parte di retta compresa tra due suoi punti detti **estremi** del segmento.

Fig. C1.3
Segmento.

Due segmenti sono detti **consecutivi** se hanno un solo vertice in comune.
Sono detti **adiacenti** se sono consecutivi e appartengono alla stessa retta.

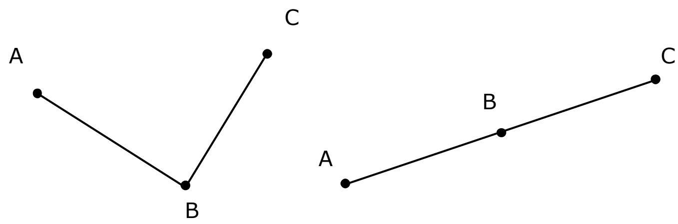

Fig. C1.4
Segmenti consecutivi e adiacenti.

Segmenti a due a due consecutivi formano una **spezzata**.
Una **poligonale** è una spezzata chiusa, ossia una spezzata in cui il primo e l'ultimo estremo coincidono. La figura formata dalla poligonale e dai punti al suo interno è detta **poligono**. Gli estremi dei segmenti sono detti **vertici** del poligono. I segmenti sono detti **lati** del poligono. Un segmento che congiunge due vertici del poligono non consecutivi è detto **diagonale** del poligono. Un segmento che congiunge due punti della poligonale è detta **corda** del poligono.

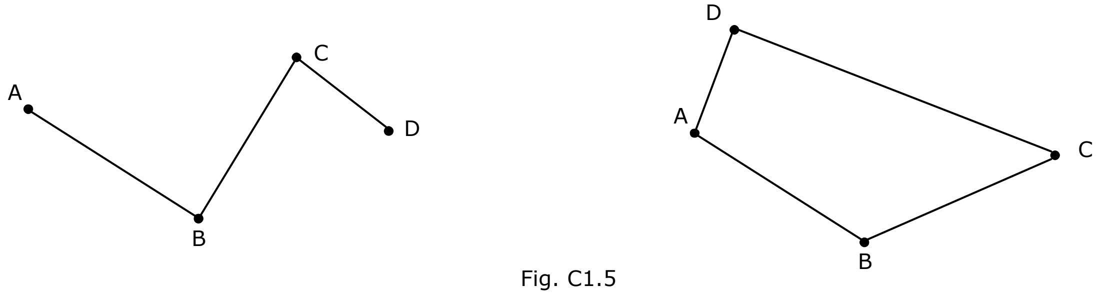

Fig. C1.5
Spezzata e poligonale.

Una poligonale separa il piano in due parti: quella formata dai punti interni alla poligonale o appartenenti alla poligonale stessa e quelli esterni alla poligonale. La parte interna è detta **figura** geometrica piana.

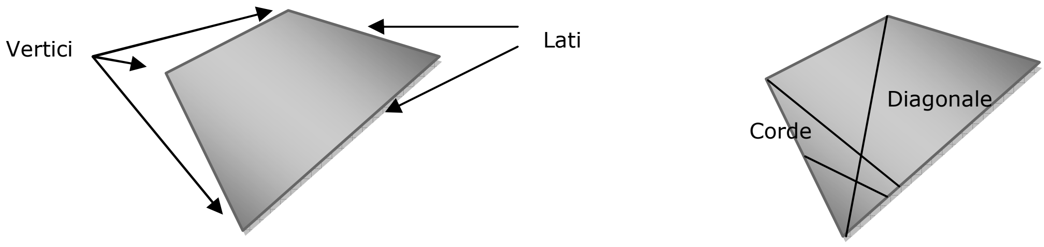

Fig. C1.6
Poligoni.

Una figura è detta **convessa** se, presi due punti qualsiasi A e B appartenenti alla figura, il segmento AB è contenuto interamente nella figura.

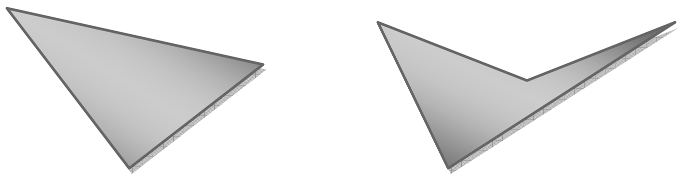

Fig. C1.7
Figure convesse e non convesse.

C1.7 Piano

Intuitivamente il piano è il prolungamento all'infinito di un foglio di carta.
Una retta in un piano lo divide in due parti ognuna delle quali è detta **semipiano**.

C1.8 Angoli

Due semirette con lo stesso punto come origine dividono il piano in due parti, ognuna delle quali è detta **angolo**.
Le due semirette sono dette **lati** dell'angolo.
Se le due semirette fanno parte della stessa retta, essendo una il prolungamento dell'altra, allora formano un angolo **piatto**. L'angolo piatto viene indicato con π. Se le due semirette sono sovrapposte allora formano un angolo **giro**, che viene indicato con 2π.

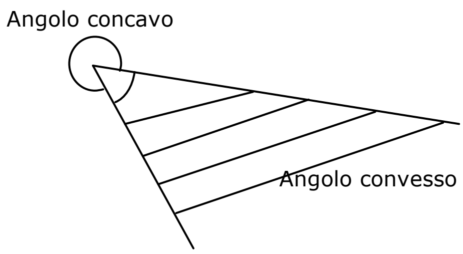

Fig. C1.8
Angolo.

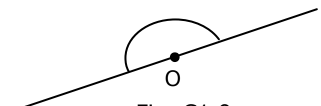

Fig. C1.9
Angolo piatto.

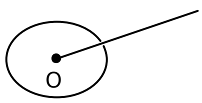

Fig. C1.10
Angolo giro.

Due angoli sono **consecutivi** se hanno in comune l'origine e un lato.
Due angoli sono **adiacenti** se sono consecutivi e i lati non coincidenti appartengono alla stessa retta.
Due angoli sono detti **opposti al vertice** se i lati di uno sono i prolungamenti dell'altro.
Nella figura C1.11 gli angoli $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ sono opposti al vertice.
La notazione per indicare un angolo è dunque $A\hat{O}B$, l'origine dell'angolo è compresa nella notazione tra gli altri due punti e ha sopra il segno dell'angolo stilizzato.

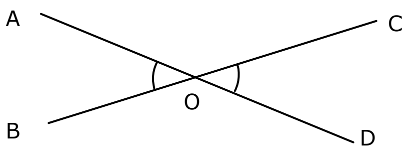

Fig. C1.11
Angoli opposti al vertice.

C1.9 Primi teoremi

Utilizzando le definizioni e gli assiomi di questo capitolo è possibile dimostrare alcuni semplici teoremi.

Teorema C1.9a
Se due rette sono distinte allora si incontrano al massimo in un punto.
IPOTESI: due rette sono distinte.
TESI: esse hanno in comune al massimo un punto.
DIMOSTRAZIONE: se esse avessero in comune due punti allora, per il primo postulato di Euclide, sarebbero coincidenti. L'ipotesi afferma che esse sono distinte, quindi non sono coincidenti e dunque non possono avere in comune due punti. Ne consegue che ne hanno al massimo uno in comune.

La dimostrazione è il ragionamento logico per passare dall'ipotesi alla tesi. Per fare ciò è possibile effettuare una dimostrazione diretta, ossia il ragionamento logico parte dall'ipotesi per arrivare alla tesi. Un altro modo è quello di effettuare una dimostrazione per assurdo. Nelle dimostrazioni per assurdo si nega la tesi e effettuando un ragionamento logico si arriva a una contraddizione. Ciò dimostra che abbiamo sbagliato a negare la tesi e quindi la stessa dev'essere vera. La precedente dimostrazione è stata fatta per assurdo; si è infatti negata la tesi, affermando "se esse avessero in comune due punti" e si è arrivati, utilizzando il primo postulato di Euclide alla contraddizione che le due rette sono coincidenti, quando l'ipotesi afferma che esse sono distinte. Era dunque sbagliato supporre che potessero avere in comune due punti, dunque ne hanno in comune al massimo uno.

Teorema C1.9b
Un segmento è formato da infiniti punti.
IPOTESI: ho un segmento AB.
TESI: esso è formato da infiniti punti.
DIMOSTRAZIONE: Per l'assioma dell'ordine dati due punti A e B è possibile trovare un punto C compreso tra essi. Ripetendo il ragionamento con il segmento AC si trova un punto D compreso tra A e C. Si può ripetere tale ragionamento infinite volte, quindi il segmento AB è formato da infiniti punti.

Molte volte il ragionamento sembra così ovvio che si potrebbe pensare che non valga la pena di fare la dimostrazione. Sappiate che senza la dimostrazione capita di dare per scontate alcune cose che invece poi, ragionando, sono false, e così anche matematici famosi hanno preso delle cantonate. La dimostrazione è dunque fondamentale e decisiva per poter affermare qualsiasi cosa.