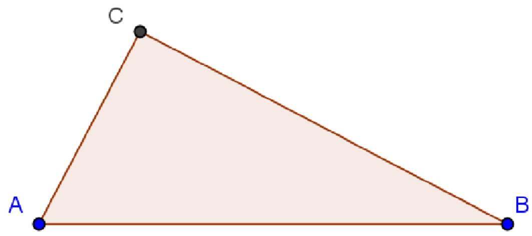
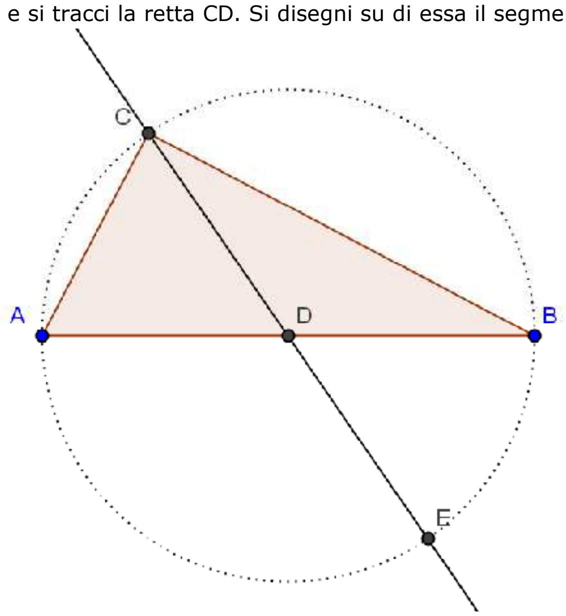
Soluzioni giugno 2014 architettura

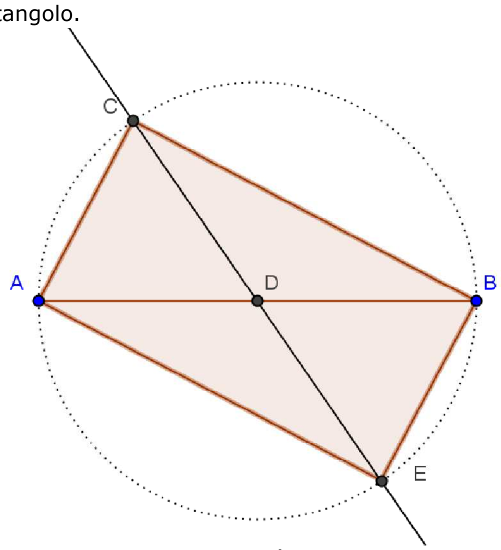
1) Dato il triangolo in figura si effettui la seguente costruzione.



Si trovi D punto medio di AB e si tracci la retta CD. Si disegni su di essa il segmento DE congruente a CD.



L'angolo ACB è retto perché insiste su un diametro della circonferenza di centro D e raggio CD, l'angolo AEB è retto perché insiste su un diametro della circonferenza di centro D e raggio CD, e anche CAE e CBE sono retti per la stessa ragione. Dunque ACBE è un rettangolo.



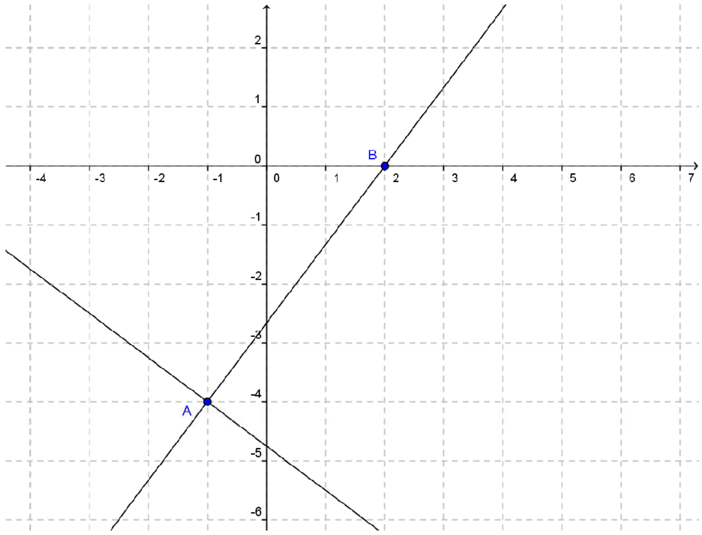
Le diagonali AB e CE di un rettangolo sono congruenti, D è il punto medio di CE, dunque CD è la metà di AB, ossia $2\sqrt{3}$. La risposta corretta è pertanto la C.

2) $\sqrt{18}+\sqrt{72}$
Si porti fuori dal simbolo di radice.
$18=2\cdot 3^2$, $72=2^3\cdot 3^2$.
Si divide l'esponente per l'indice della radice (che è due). Il quoziente della divisione è l'esponente che va fuori dalla radice mentre il resto della divisione è l'esponente che resta dentro la radice.
2:2=1 con il resto di zero
3:2=1 con il resto di uno
$\sqrt{18}+\sqrt{72}=3\sqrt{2}+6\sqrt{2}$
E' ora possibile sommare i termini simili.
$\sqrt{18}+\sqrt{72}=3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}$
Si porti ora il 9 dentro la radice; per far ciò lo si eleva al quadrato e lo si moltiplica per il radicando.
$\sqrt{18}+\sqrt{72}=3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}=\sqrt{81\cdot 2}=\sqrt{162}$
La risposta corretta è pertanto la D.

3) $\frac{1}{2}\sin^2 2x-\cos^2 x\geq\frac{2\sin^2 x+1}{2}$.
Si utilizza la formula di duplicazione sin2x=2sinxcosx. Si distribuisce il 2 a secondo membro tra i due termini del numeratore.
$\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2-\cos^2 x\geq\sin^2 x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}4\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x\geq\sin^2 x+\frac{1}{2}$
Si porta $\cos^2x$ a secondo membro.
$2\sin^2 x\cos^2 x\geq\cos^2 x+\sin^2 x+\frac{1}{2}$
La relazione fondamentale della trigonometria afferma che $\sin^2x+\cos^2x=1$.
$2\sin^2 x\cos^2 x\geq 1+\frac{1}{2}$
$2\sin^2 x\cos^2 x\geq\frac{3}{2}$
Si dividono ambo i membri per 2.
$\sin^2 x\cos^2 x\geq\frac{3}{4}$
Si sa che $a^2>b$ è equivalente ad $a<-\sqrt{b}\vee a>\sqrt{b}$, dunque
$\sin x\cos x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\vee\sin x\cos x\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ragioniamo ora sul prodotto di sinx cosx.
Esso assume valore zero se uno tra sinx e cos x vale zero, ossia negli angoli 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.
Assume valore massimo in 45° (e 225°), dove entrambi valgono $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{o } \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, e il loro prodotto vale $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Il loro prodotto non potrà dunque essere in nessun caso maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente il prodotto sinxcosx assume valore minimo in 135° e 315°, nei quali uno dei due vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e l'altro $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, e il loro prodotto vale $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$. Il loro prodotto non potrà dunque essere in nessun caso minore di $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'equazione proposta non ha dunque soluzioni e la risposta corretta è la b.

4) $k^2+x-k^2x+k-2=0$
Isoliamo la x a primo membro.
$x-k^2x=-k^2-k+2$
Cambiamo i segni e raccogliamo la x.
$k^2x-x=k^2+k-2$
$x\left(k^2-1\right)=k^2+k-2$
Scomponiamo in fattori.
$x(k-1)(k+1)=(k+2)(k-1)$.
Si può notare che sia a primo membro che a secondo membro è presente il fattore k-1.
Esso assume valore zero per k=1, e in tal caso l'equazione diventa l'identità 0=0, ossia una equazione indeterminata, e le equazioni indeterminate di primo grado hanno come soluzioni tutti i valori possibili della x.
Dunque se k=1 ci sono infinite soluzioni. Non ci sono altri valori che annullino entrambi i membri dell'equazione dunque la risposta corretta è la e. Se ci fossero stati altri valori che annullavano entrambi i membri dell'equazione allora sarebbe stato vero che se k=1 c'erano infinite soluzioni, ma non il viceversa, e nella risposta e è scritto "se e solo se", ossia k=1 è l'unico valore per cui ho infinite soluzioni.

5) Tra le rette passanti per A=(-1,-4) quella che ha la massima distanza da B=(2,0) è quella passante per A e perpendicolare ad AB.



Si deve dunque determinare per prima cosa il coefficiente angolare della retta AB, successivamente la retta passante per A perpendicolare ad AB.

- Coefficiente angolare della retta AB.

La retta AB sale, dunque il coefficiente angolare è positivo. Il coefficiente angolare è $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Si vede dal grafico che per andare da A a B si sale di 4 e ci si sposta di 3, dunque $\Delta y=4$ e $\Delta x=3$. $m = \frac{4}{3}$.

- Retta passante per A perpendicolare ad AB.

Il coefficiente angolare di una retta perpendicolare a una retta data è inverso e opposto di quello della retta di partenza, dunque $m_\perp = -\frac{3}{4}$.

Per determinare la retta passante per un punto A di coefficiente angolare m noto si usa la formula

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

$$y-(-4) = -\frac{3}{4}\left(x-(-1)\right)$$

$$y+4 = -\frac{3}{4}(x+1)$$

$$y+4 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

Si porta tutto a primo membro e si mettono tutti i termini a denominatore comune.

$$y+4+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{4y+16+3x+3}{4} = 0$$

$$3x+4y+19 = 0$$

La risposta corretta è pertanto la b.

6) Si ricorda che la misura di una circonferenza di raggio r è $2\pi r$.

La misura della circonferenza della ruota anteriore è $2\pi R$, ma $2R=1$ metro, dunque la misura della circonferenza della ruota anteriore è π metri.

La misura della circonferenza della ruota posteriore è $2\pi r$, e cinque mezzi giri della ruota posteriore misurano $\frac{5}{2}2\pi r = 5\pi r$.

Il testo afferma che un giro della ruota anteriore (che abbiamo detto ha lunghezza π metri) equivale a cinque mezzi giri della ruota posteriore (che ha lunghezza $5\pi r$). Ne ricaviamo l'equazione $5\pi r=\pi$ metri.

$$5\pi r = \pi \text{ metri}$$

Si dividono ambo i membri per 5π e si ricava r.

$$\frac{5\pi r}{5\pi} = \frac{\pi}{5\pi} \text{ metri}$$

$$r = \frac{1}{5} \text{ metri} = 20\text{cm}$$

La risposta corretta è dunque la e.

7) Andiamo per esclusione.
a) 8n+6m è sempre divisibile per 4? Se pongo n=0 e m=1 si ha 8n+6m=6 che non è divisibile per 4.
b) 8n+6m è divisibile per 4 se e solo se n è dispari? Se pongo n=1 (che è dispari) e m=1 si ha 8n+6m=14 che non è divisibile per 4.
c) 8n+6m è sempre divisibile per 3? Se pongo n=1 e m=0 si ha 8n+6m=8 che non è divisibile per 3.
d) 8n+6m è divisibile per 3 se e solo se m è divisibile per 3? Se pongo n=1 e m=3 (che è divisibile per 3) ottengo 8n+6m=26 che non è divisibile per 3.
e) 8n+6m è divisibile per 4 se e solo se m è pari.
Per esclusione siamo certi che la risposta corretta è la e, ma proviamo a mostrare che tale risposta è corretta per altra via. Se m è pari può essere scritto come m=2a, con a intero.

$$8n+6m=8n+6(2a)=8n+12a=$$

Raccogliamo 4, ottenendo

$$=4(2n+3m)$$

8n+6m è dunque un multiplo di 4, quindi è divisibile per 4.

8)
Risolviamo il problema algebricamente.
Per determinare l'iperbole tangente a una retta data si scrive il sistema tra iperbole e retta, non si risolve il sistema ma si pone il delta uguale a zero.

$$\begin{cases} xy = k \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{y} \\ \frac{k}{3y} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{4k + 3y^2 = 12y}{12y}$$

$$4k + 3y^2 = 12y$$

$$3y^2 - 12y + 4k = 0$$

Si pone il Δ=0.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(3)(4k) = 144 - 48k = 0$$

$$-48k = -144$$

$$k = \frac{144}{48} = 3$$

Si può ora risolvere il sistema

$$\begin{cases} xy = 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ \frac{3}{3y} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ \frac{1}{y} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ \frac{4 + y^2 = 4y}{4y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{y} \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

La soluzione corretta è quindi la a, ossia il punto (3/2,2)