Soluzioni maggio 2014 architettura

1) Si ricordi che non si può usare la calcolatrice.
L'idea è portare tutto a base 2 e semplificare, se possibile. Si cerca inoltre di portare tutte le radici allo stesso indice.
$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$.
$\sqrt[4]{4}$
$\sqrt[8]{8} = \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{2^2} = \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$
$\sqrt[16]{16} = \sqrt[16]{2^4} = \sqrt[4]{2}$
$\sqrt[8]{4} = \sqrt[8]{2^2} = \sqrt[4]{2}$
Tre valori sono uguali a $\sqrt[4]{2}$ e sono ovviamente minori di $\sqrt[4]{4}$.
Scriviamo in maniera differente $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ e confrontiamo questo numero con $\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$. Entrambi sono multipli di $\sqrt[4]{2}$ secondo i coefficienti $\sqrt[8]{2}$ e $\sqrt[4]{2}$, quindi sono questi due che vanno confrontati. La radice ottava di due è minore della radice quarta di due, dunque il numero più grande è $\sqrt[4]{4}$. La risposta corretta è la b.

2) Metodo algebrico.

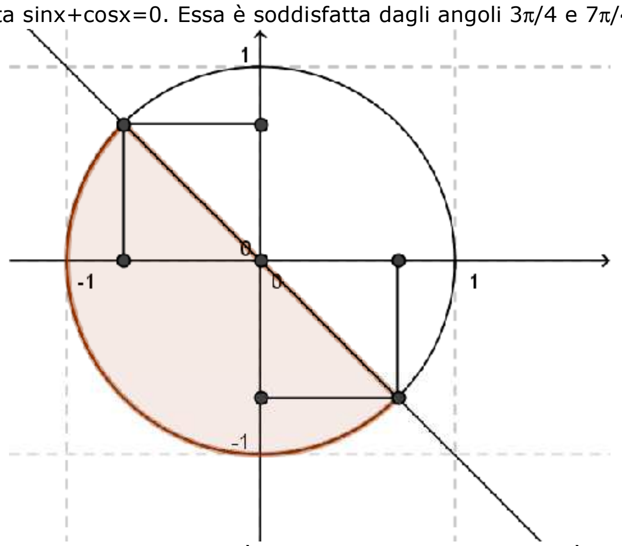
$$x^2 - y^2 + 2x = 0$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 - 1 = 0$$
$$(x+1)^2 - y^2 = 1$$

Cambio di variabile x+1=X

$$X^2 - y^2 = 1 .$$

Quest'equazione è della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, che è l'equazione dell'iperbole, dunque la risposta corretta è la a.
Non vi sarebbe mai venuto in mente? Ok. Allora andiamo per esclusione.
Una retta non è perché è di secondo grado.
Una circonferenza non è perché non è della forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$
Una parabola non è perché sia x che y sono di secondo grado, e le equazioni delle parabole sono $x=ay^2+by+c$ e $y=ax^2+bx+c$, e non ricadiamo in nessuna delle due.
Un'ellisse non è perché nell'ellisse sia x che y hanno segno più.
In realtà questo ragionamento non è perfettamente corretto, per classificare le coniche in forma generica il procedimento è più complesso… comunque si arriva (con un po' di fortuna) al risultato.

3) $\sqrt{2}\sin x + \sqrt{3}\sin^2 2x < \sqrt{3} - \sqrt{2}\cos x - \sqrt{3}\cos^2 2x$
Portiamo tutto a primo membro e raccogliamo $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ dove possibile.
$\sqrt{2}\sin x + \sqrt{3}\sin^2 2x - \sqrt{3} + \sqrt{2}\cos x + \sqrt{3}\cos^2 2x < 0$
$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin^2 2x + \cos^2 2x - 1) < 0$
Per la relazione fondamentale della trigonometria $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(1-1) < 0 \Rightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) < 0$
Si dividono ambo i membri per $\sqrt{2}$ (è possibile perché $\sqrt{2}$ è positivo, altrimenti dividendo ambo i membri per un numero negativo avremmo dovuto cambiare il verso della disequazione.
$\sin x + \cos x < 0$
Risolviamo l'equazione associata sinx+cosx=0. Essa è soddisfatta dagli angoli $3\pi/4$ e $7\pi/4$.



In figura è rappresentato l'intervallo in cui sinx+cosx è minore di zero. La soluzione è dunque $3\pi/4<x<7\pi/4$ e la risposta corretta è la b.

4)

$$\frac{x^3-3x+2}{x^3-1}<1 \Rightarrow \frac{x^3-3x+2}{x^3-1}-1<0 \Rightarrow \frac{x^3-3x+2-1\left(x^3-1\right)}{x^3-1}<0 \Rightarrow \frac{x^3-3x+2-x^3+1}{x^3-1}<0 \Rightarrow$$

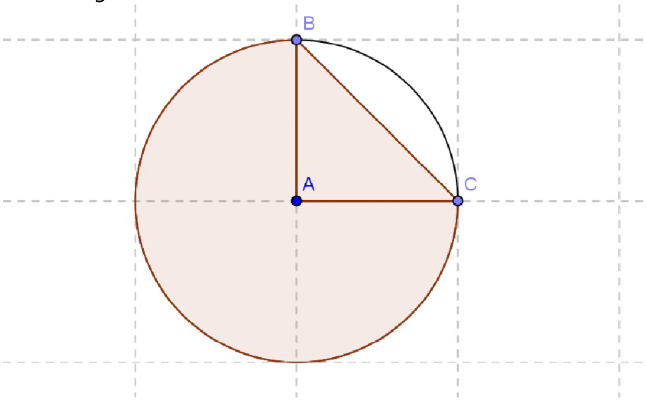
$$\Rightarrow \frac{-3x+3}{x^3-1}<0 \Rightarrow \frac{-3(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}<0$$

Si semplificano numeratore e denominatore ponendo $x\neq 1$.

$$\frac{-3}{x^2+x+1}<0$$

Il numeratore è negativo, il denominatore è positivo per ogni valore della x, il loro rapporto è negativo per ogni valore della x, dunque la disequazione è sempre verificata, ricordando che $x\neq 1$. La risposta giusta è la a.

5) Si deve notare che se un quadrato ha lato R la sua diagonale è lunga $R\sqrt{2}$, dunque la corda di lunghezza $R\sqrt{2}$ è quella rappresentata in figura con il segmento BC.



L'area cercata è la parte non colorata del cerchio.

Calcoliamo dapprima l'area del triangolo ABC. $\text{Area}(\text{triangolo ABC})=\frac{R^2}{2}$.

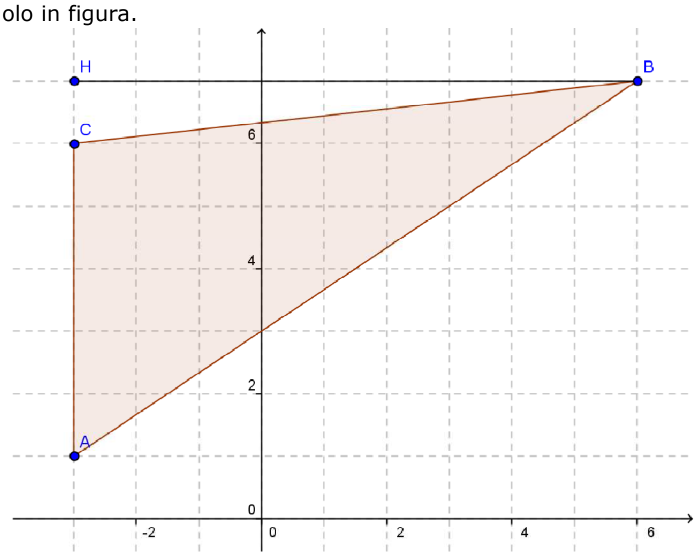
Calcoliamo poi l'area del cerchio di centro A e raggio AB. $\text{Area}(\text{cerchio})=R^2\cdot\pi$.

L'area di un quarto di cerchio è dunque $\text{Area}(\text{quarto di cerchio})=\frac{R^2\cdot\pi}{4}$.

La parte non colorata del cerchio è l'area di un quarto di cerchio meno l'area del triangolo ABC, dunque

$\text{Area}(\text{non colorata})=\frac{R^2\cdot\pi}{4}-\frac{R^2}{2}=\frac{R^2\cdot\pi-2R^2}{4}=\frac{R^2(\pi-2)}{4}$. La risposta è dunque la e.

6) Si cerca l'area del triangolo in figura.

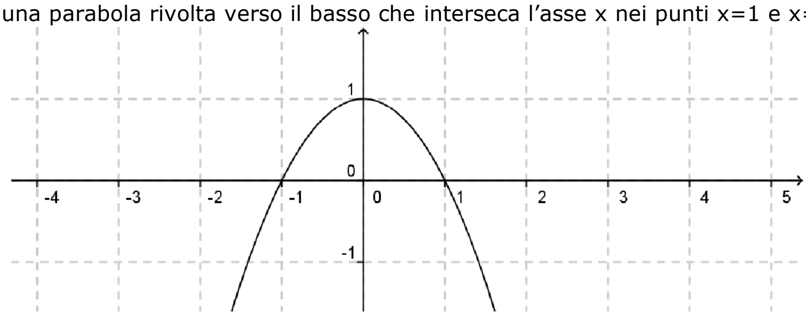


Considerando la base AC=5 e l'altezza BH=9 si ha $\text{Area}=\frac{AC\cdot BH}{2}=\frac{5\cdot 9}{2}=\frac{45}{2}$. La risposta corretta è la a.

7)

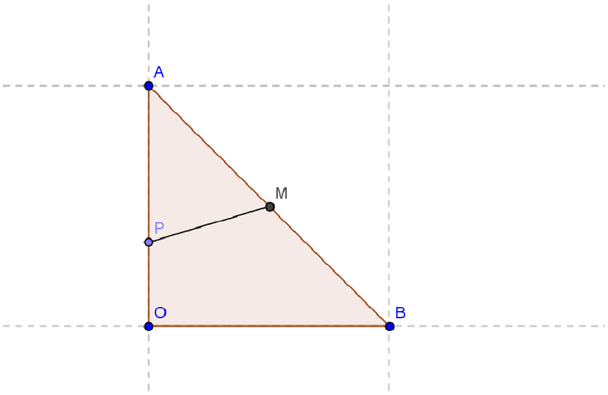
$\frac{1}{1-x^2} \geq 0$.

Il numeratore a primo membro è positivo, dunque il segno di $\frac{1}{1-x^2}$ dipende esclusivamente dal segno del denominatore $1-x^2$. Si tenga presente però che x deve essere differente da -1 e da 1.
$y=1-x^2=(1-x)(1+x)$ è una parabola rivolta verso il basso che interseca l'asse x nei punti x=1 e x=-1.

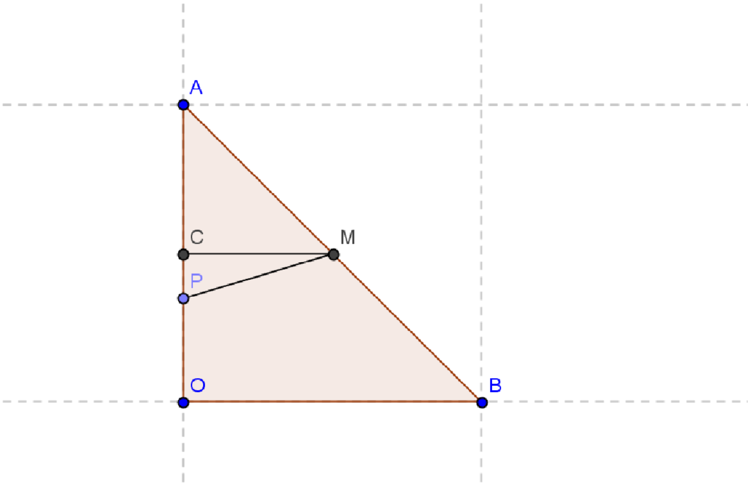


Essa è maggiore o uguale a zero nei punti in cui si trova sopra l'asse x e nei punti di intersezione con l'asse, dunque la soluzione sarebbe $-1 \leq x \leq 1$. Ricordando però che x deve essere differente da -1 e da 1 si ottiene la soluzione $-1<x<1$.
La risposta corretta è dunque la b.

8)



Si cerca un punto P su OA=1 tale che l'area di APM sia metà dell'area di OPMB.
L'area di AOB è $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, dunque l'area di AMP deve essere un terzo dell'area di AOB, ossia $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.



Si consideri nella seconda figura il triangolo ACM di area $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$. P deve essere preso in maniera tale che l'area di PCM sia $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{4-3}{24} = \frac{1}{24}$.

Sapendo che $CM = \frac{1}{2}$ si ha $\frac{PC \cdot CM}{2} = \text{Area}(PCM) \Rightarrow \frac{PC \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{PC}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow PC = \frac{1}{6}$.

$OP = OA - AC - CP = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6-3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La risposta corretta è la d.