Soluzioni matematica di base febbraio 2014

1) $\sqrt{x} < x\sqrt{2}$

Si ricorda che le disequazioni irrazionali del tipo $\sqrt{p} < q$ sono equivalenti al sistema

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ q > 0 \\ p < q^2 \end{cases}$$

Per risolvere la nostra disequazione dobbiamo dunque risolvere il sistema $\begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{2} > 0 \\ x < 2x^2 \end{cases}$

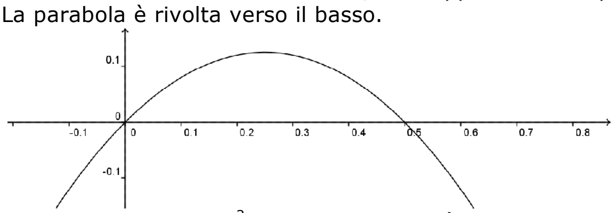
La prima disequazione del sistema è già risolta.
La seconda disequazione del sistema si risolve dividendo per $\sqrt{2}$ ambo i membri, ottenendo x>0.
Risolviamo la terza.

$x < 2x^2$

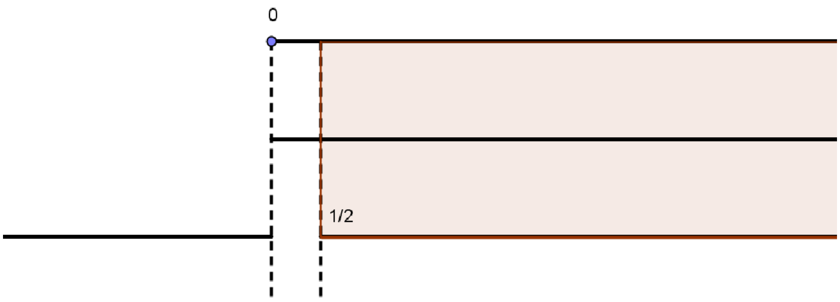
$x - 2x^2 < 0$

$x(1-2x) < 0$

L'equazione associata x(1-2x)=0 ha due soluzioni $x_1=0$ e $x_2=1/2$, che rappresentano i punti di intersezione della parabola $y=x-2x^2$ con l'asse x. La parabola è rivolta verso il basso.



Ci si chiede per quali valori della x l'espressione $x-2x^2<0$, e la soluzione è data dagli intervalli in cui la parabola è si trova sotto l'asse x. Essi sono gli intervalli x<0 e x>1/2.
Ora si devono intersecare le soluzioni delle tre disequazioni.



La soluzione è la zona in comune delle soluzioni, ossia x>1/2. La risposta esatta è la d.

2)
Nel testo sono presenti tre condizioni.
Prima condizione: la parabola generica $y=ax^2+bx+c=0$ passa per il punto (1,3). Sostituendo al posto di x e y i valori 1 e 3 nell'equazione generica della parabola otteniamo 3=a+b+c.
Seconda condizione: la parabola generica e la retta y=3x sono tangenti. Si scrive il sistema tra parabola generica e retta, si ricava un'equazione di secondo grado e si pone il Δ=0.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 3x \Rightarrow ax^2 + bx + c - 3x = 0 \Rightarrow ax^2 + x(b-3) + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (b-3)^2 - 4ac = 0$ è la seconda condizione.

Terza condizione: la parabola generica e la retta y=0 sono tangenti. Si scrive il sistema tra parabola generica e retta, si ricava un'equazione di secondo grado e si pone il Δ=0.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ è la terza condizione.
Ora si risolve il sistema con le tre condizioni.

$$\begin{cases} 3 = a+b+c \\ (b-3)^2 - 4ac = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a+b+c \\ b^2 - 6b + 9 - 4ac = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a+b+c \\ -6b + 9 = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a+b+c \\ -6b = -9 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a+\frac{3}{2}+c \\ b = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -3+\frac{3}{2}+c \\ b = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} - c \\ b = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} - 4\left(\frac{3}{2} - c\right)c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} - c \\ b = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} - 6c + 4c^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} - c \\ b = \frac{3}{2} \\ \frac{9 - 24c + 16c^2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} - c \\ b = \frac{3}{2} \\ (3-4c)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{4} \end{cases}$$

La parabola cercata ha dunque equazione

$y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}\left(x^2 + 2x + 1\right)$.

$y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

La risposta esatta è quindi la a.

3) $\left|x^3\right| + y^3 = 1$

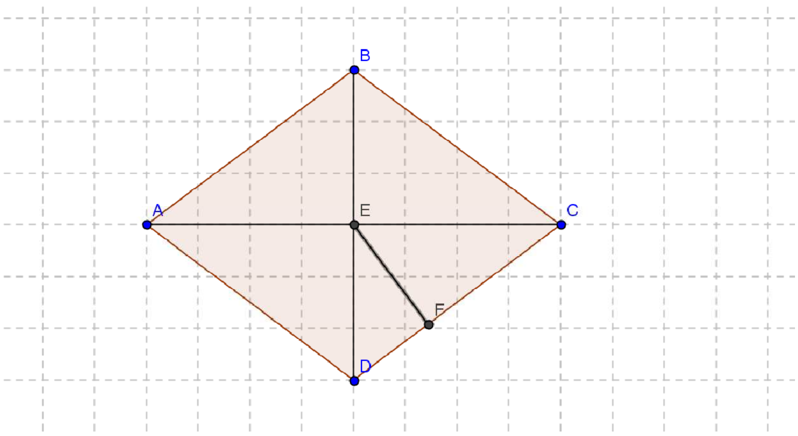
Il valore assoluto di x alla terza è positivo o zero.

$y^3 = 1 - \left|x^3\right| \Rightarrow y = \sqrt{1 - \left|x^3\right|}$

$1 - \left|x^3\right|$ è dunque un numero minore o uguale a 1, perché da 1 si sottrae un numero positivo o zero.

La radice $\sqrt{1 - \left|x^3\right|}$ di un numero minore o uguale a 1 è anch'essa minore o uguale a 1. Ne segue che $y \le 1$. La risposta corretta è dunque la e.

4)



Le diagonali AC e BD si incontrano nel loro punto medio E, dunque CE=4 e DE=3.

Per il teorema di Pitagora il lato del rombo CD è lungo $CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Il raggio della circonferenza inscritta nel rombo è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo CDE, ossia il segmento EF.

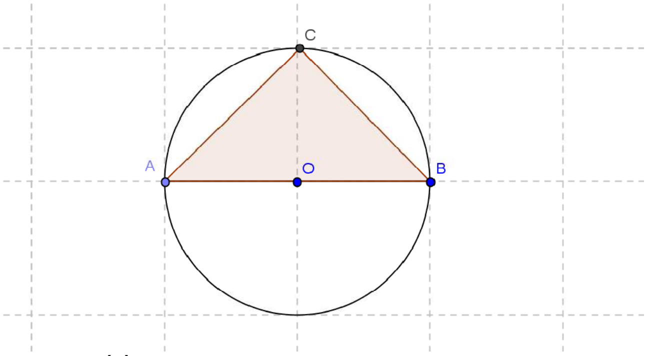
Per il primo teorema di Euclide $ED^2 = DF \cdot CD$, dunque $DF = \frac{ED^2}{CD} = \frac{9}{5}$.

Per differenza $FC = CD - DE = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}$.

Per il secondo teorema di Euclide $EF^2 = DF \cdot FC$.

$EF = \sqrt{DF \cdot FC} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \frac{12}{5} = 2,4$. La risposta corretta è la e.

5) Sin noti che l'angolo BAC non è 45°. Lo sarebbe se $AC = r\sqrt{2}$, ma $AC = \frac{10}{7}r$, che pur essendo molto vicino a $r\sqrt{2}$ non è uguale a esso.



Il triangolo ABC è rettangolo in C perché è inscritto in una circonferenza di diametro AB.
Per le note formule di trigonometria:
Un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.

Si può dunque scrivere $AC = AB \cdot \cos\left(B\hat{A}C\right)$, da cui segue $\cos\left(B\hat{A}C\right) = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{10}{7}r}{2r} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

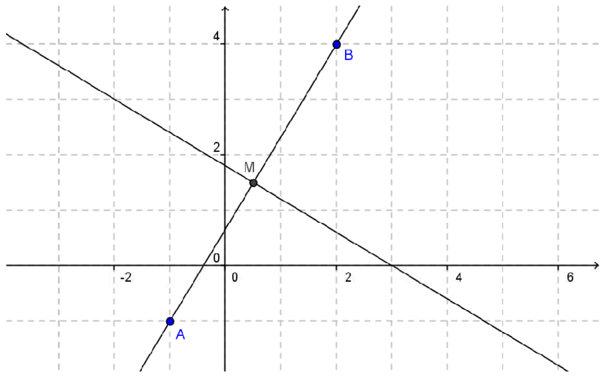
Per determinare il seno dell'angolo BAC si utilizza la regola fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\sin^2\left(B\hat{A}C\right) + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\left(B\hat{A}C\right) = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

$\sin\left(B\hat{A}C\right) = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$ portando fuori

ATTENZIONE: l'angolo BAC è acuto, il seno degli angoli minori di 90° è positivo, dunque $\sin\left(B\hat{A}C\right) = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ e $\cos\left(B\hat{A}C\right) = \frac{5}{7}$. La soluzione corretta è dunque la c.

6)

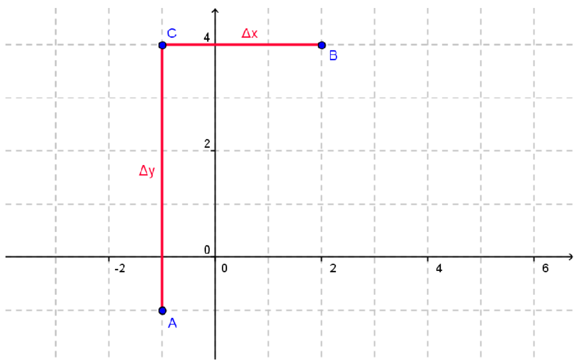


L'asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio M del segmento AB e perpendicolare alla retta passante per A e B. Ricordando che due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari sono inversi e opposti il procedimento da utilizzare è dunque il seguente:

- Trovare il punto medio M del segmento AB
- Trovare il coefficiente angolare della retta passante per A e B
- Trovare la retta passante per M con coefficiente angolare inverso e opposto a quello della retta passante per A e B.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare della retta passante per A e B è positivo perché la retta AB sale. Il suo valore è $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Senza fare calcoli si possono vedere dal grafico i valori di Δy e Δx. m=5/3. Il coefficiente angolare della retta perpendicolare è dunque m=-3/5.



Retta passante per un punto.

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10y-15}{10}=\frac{-6x+3}{10}\Rightarrow 6x+10y-18=0$$

Dividendo tutto per due si ottiene 3x+5y-9=0, dunque la soluzione corretta è la a.

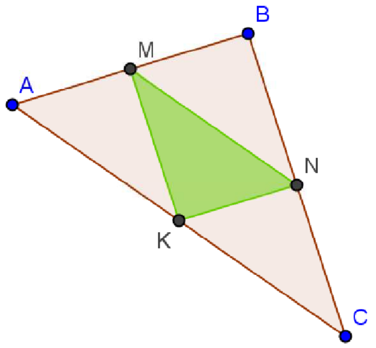
7)

$$\begin{cases}3x-y=5\\6kx+4y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y=-3x+5\\6kx+4y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-5\\6kx+4(3x-5)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-5\\6kx+12x-20=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=3x-5\\6x(k+2)=21\end{cases}$$

Il valore k=-2 fa sì che la seconda equazione diventi 0=21, che rende l’equazione impossibile.
La risposta corretta è dunque la e.

8)



Dato il triangolo MNK formato dai punti medi di ABC si ha che il lato AB (di cui M è punto medio) è parallelo al lato NK, il lato AC (di cui K è punto medio) è parallelo al lato MN e il lato BC (di cui N è il punto medio) è parallelo al lato MK.
Si nota che il triangolo ABC può essere suddiviso in 4 triangoli congruenti: AMK, KNC, BMN e MNK.
Sia S l’area di MNK, allora l’area di ABC è 4s. Il rapporto tra l’area di ABC e quella di MNK è 4S/S=4. La risposta corretta è dunque la c.