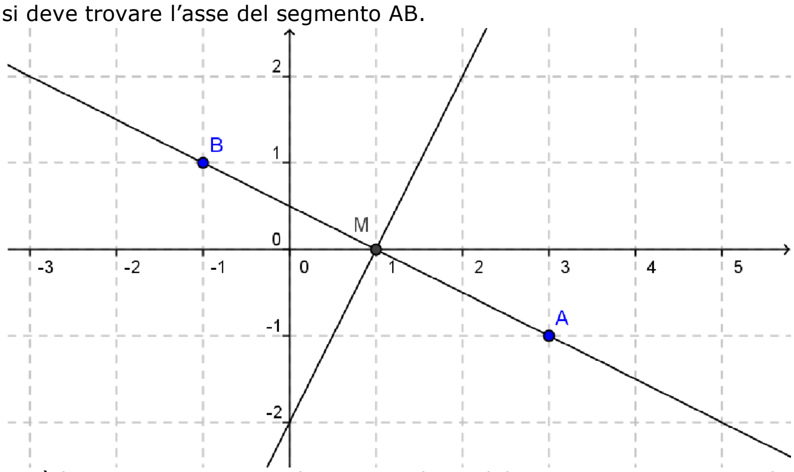
Soluzioni matematica di base dicembre 2013

1) In una circonferenza il centro è equidistante da tutti i suoi punti. I centri di tutte le circonferenze passanti per A e B sono dunque i punti equidistanti da A e da B. I punti equidistanti da A e da B sono quelli che fanno parte dell'asse del segmento AB, dunque si deve trovare l'asse del segmento AB.

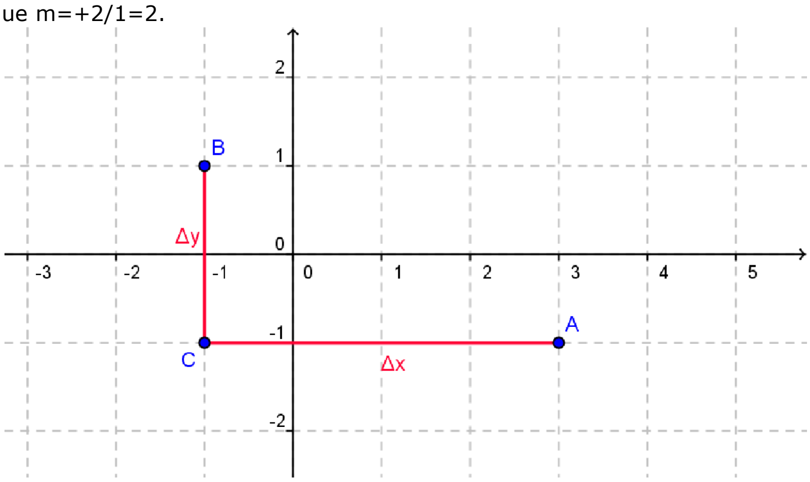


L'asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio M del segmento AB e perpendicolare alla retta passante per A e B. Ricordando che due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari sono inversi e opposti il procedimento da utilizzare è dunque il seguente:
- Trovare il punto medio M del segmento AB
- Trovare il coefficiente angolare della retta passante per A e B
- Trovare la retta passante per M con coefficiente angolare inverso e opposto a quello della retta passante per A e B.

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3-1}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=(1,0)$$

Il coefficiente angolare della retta passante per A e B è negativo perché la retta AB scende. Il suo valore è $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Senza fare calcoli si possono vedere dal grafico i valori di Δy e Δx. m=-2/4=-1/2. Il coefficiente angolare della retta perpendicolare è dunque m=+2/1=2.



Retta passante per un punto.

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-0=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2\Rightarrow -2x+y+2=0$$

Cambiando i segni si ottiene 2x-y-2=0, dunque la soluzione corretta è la c.

2) $\sqrt{a^2+b^4}=a+b^2$

Andiamo per esclusione.
- è vera per ogni a,b∈R? Sia a=1, b=1 e si ottiene $\sqrt{2}=2$. FALSO
- vera solo se a=b=0? No, se a=1 e b=0 si ottiene 1=1 che è vero, dunque non è vera solo se a=b=0. FALSO
- $\sqrt{a^2+b^4+2ab^2}=\sqrt{(a+b^2)}=|a+b^2|\neq a+b^2$ FALSO
- vera ∀a∈R se b=0. $\sqrt{a^2+0}=|a|\neq a+0$ FALSO

Per esclusione la risposta corretta è la e. SI poteva dimostrare anche direttamente come segue:
- vera ∀b∈R se a=0. $\sqrt{0+b^4}=|b^2|=b^2=0+b^2$ VERO

3) $\cos^4 x=\sin^4 x+\frac{\sin 2x}{\sqrt{3}}, 0\leq x\leq 2\pi$.

Si porta a primo membro $\sin^4$x e poi si scompone in fattori $\cos^4$x-$\sin^4$x.

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{\sin 2x}{\sqrt{3}}\Rightarrow(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{3}}$$

Per la regola fondamentale della trigonometria vale $\sin^2x+\cos^2x=1$.
Per la formula di duplicazione del coseno vale $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$.

$$\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot 1=\frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos 2x=\frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\sqrt{3}$$

Per la definizione di tangente di un angolo vale $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$tg2x=\sqrt{3}$$

La tangente di un angolo vale $\sqrt{3}$ per gli angoli di ampiezza $\frac{\pi}{3}+k\pi$.

$$2x=\frac{\pi}{3}+k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$$

Assegnando a k i valori 0, 1, 2, 3 si ottiene:

$$\text{se } k=0 \text{ allora } x=\frac{\pi}{6}+\frac{0\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

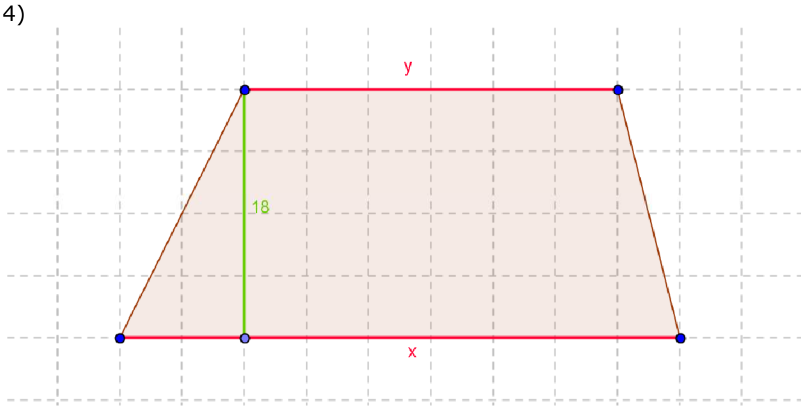
$$\text{se } k=1 \text{ allora } x=\frac{\pi}{6}+\frac{1\pi}{2}=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{se } k=2 \text{ allora } x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{2}=\frac{7\pi}{6}$$

$$\text{se } k=3 \text{ allora } x=\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi+9\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$$

La risposta corretta è dunque la a.

4)



L'area del rettangolo che ha per lati le basi del trapezio ha area xy=60.
Il quadrato di lato 12 ha area 144. Il quadrato è equivalente al trapezio, pertanto l'area del trapezio è

$$\frac{(x+y)\cdot 18}{2}=144.$$

Si imposta un sistema a due equazioni e due incognite.

$$\begin{cases} xy=60 \\ \frac{(x+y)\cdot 18}{2}=144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=60 \\ (x+y)\cdot 9=144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=60 \\ x+y=\frac{144}{9}=16 \end{cases}$$

Senza proseguire i calcoli si noti che si cercano due numeri (positivi) che hanno somma 16 e prodotto 60. Sono ovviamente 6 e 10. La risposta corretta è la b.

5)

$$x^2-2xy+y^2=0$$

$$(x-y)^2=0 \Leftrightarrow x-y=0$$

Questa è l'equazione di una retta. La risposta corretta è la a.

6)

$$\frac{\sqrt{|x|-2}}{2-x}\le 0.$$

Il numeratore è sempre positivo dove è definito, ed è definito per $|x|-2\ge 0 \Rightarrow |x|\ge 2 \Rightarrow x\le -2 \vee x\ge 2$.

Dal fatto che il numeratore sia sempre positivo segue che il segno della frazione è dato solo dal segno del denominatore 2-x, e $2-x\le 0$ per $x\ge 2$. Va però escluso x=2 perché non fa parte del dominio, dunque si ha x>2.
L'intersezione tra $S_1=\{x\le -2 \vee x\ge 2\}$ e $S_2=\{x>2\}$ è $\{x>2\}$. La risposta corretta è la b.

7)

Il raggio della circonferenza richiesta è R, il suo centro deve dunque distare 2R da O e R dall'asse x.
Si cerca dunque un punto (α,β) nel primo quadrante tale che la sua distanza dall'asse x sia R e dal punto O sia 2R.
Dal fatto che la sua distanza dall'asse x sia R segue che $\beta=R$, dunque il punto cercato ha coordinate (α,R) e dista 2R dall'origine (0,0).
Per la distanza tra due punti si ha:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2+(R-0)^2}=2R \Rightarrow \sqrt{\alpha^2+R^2}=2R \Rightarrow \alpha^2+R^2=4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2=3R^2 \Rightarrow \alpha=R\sqrt{3}$$

Il centro ha dunque coordinate $\left(R\sqrt{3},R\right)$ ed ha raggio R. L'equazione della circonferenza richiesta è dunque

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow \left(x-R\sqrt{3}\right)^2+(y-R)^2=R^2 \Rightarrow x^2+3R^2-2xR\sqrt{3}+y^2+R^2-2Ry=R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2xR\sqrt{3}-2Ry+3R^2=0$$

La risposta corretta è dunque la d.

8)

$k^2x^2-k(2k+1)x+2k^2+k-6=0$ è una equazione parametrica con a=k^2, b=-k(2k+1), c=$2k^2$+k-6.

Se le soluzioni sono una il reciproco dell'altra si ha $x_1=\frac{1}{x_2}$, dunque $x_1 \cdot x_2=1$.

E' noto che il prodotto delle radici è uguale a $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$, e da ciò si ottiene

$$\frac{2k^2+k-6}{k^2}=1 \Rightarrow 2k^2+k-6=k^2 \Rightarrow k^2+k-6=0$$

Scomponendo in fattori si ha (k+3)(k-2)=0, dunque $k_1=-3$ e $k_2=2$.

Purtroppo tale soluzione non è tra quelle proposte, e ciò si verifica perché se k=-3 si ottiene l'equazione $9x^2-15x+9=0$, le cui soluzioni sono $x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225-4(9)(9)}}{18}=\frac{15\pm\sqrt{225-324}}{18}$ … Essendo il discriminante negativo le soluzioni saranno pure una il reciproco dell'altra, ma NON SONO REALI come richiesto dal testo, ma sono COMPLESSE!

Se invece k=2 l'equazione di partenza diventa $4x^2-10x+4=0$ le cui soluzioni sono

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4(4)(4)}}{8}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{8}=\frac{10\pm6}{8}$$

$$x_1=\frac{10+6}{8}=2$$

$$x_2=\frac{10-6}{8}=\frac{1}{2}$$

Esse sono reali e una il reciproco dell'altra. La soluzione corretta è dunque la d.