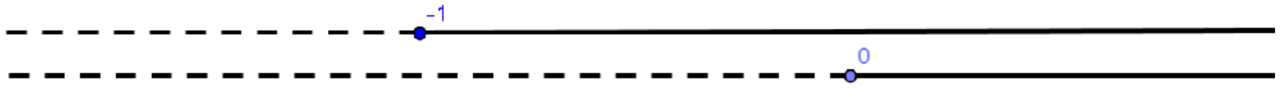
Soluzioni matematica di base settembre 2013

1) $|x+1|<|x|-2$

Si pongono $x+1>0 \Rightarrow x>-1$e $x>0$ e si suddivide R in tre intervalli.



$-x-1<-x-2$
$-x+x<1-2$
$0<-1$ falso
$S_1=\varnothing$

$x+1<-x-2$
$x+x<-1-2$
$2x<-3$
$x<-3/2$, ma nell'intervallo $-1\leq x\leq 0$
$S_2=\varnothing$

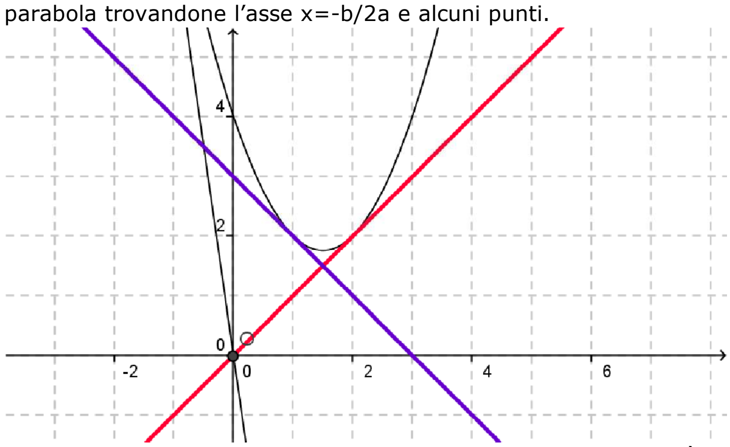
$x+1<x-2$
$x-x<-1-2$
$0<-3$ falso
$S_3=\varnothing$

L'unione di S_1, S_2 e S_3 è ovviamente l'insieme vuoto, dunque la disequazione data non ha soluzioni. La risposta corretta è la c.

2) $\sin^2 50°+\sin^2 40°=?$

Si ricordi che, per le formule degli archi associati, $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$, dunque $\sin 40°=\cos(90°-40°)=\cos 50°$.
Si ottiene $\sin^2 50°+\sin^2 40°= \sin^2 50°+\cos^2 50°$.
Quest'ultima formula è uguale a 1 per la regola fondamentale della trigonometria $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
La risposta corretta è la b.

3) Si tracci il grafico della parabola trovandone l'asse $x=-b/2a$ e alcuni punti.



Se un allievo fa bene il disegno ricava la soluzione direttamente dal grafico… Si vede che è $y=-x+3$. Ossia $x+y=3$ che è la d, comunque facciamo i calcoli.
La retta tangente alla parabola con coefficiente angolare positivo è la retta in rosso.
Troviamola scrivendo il sistema tra parabola e fascio di rette per O e ponendo il $\Delta=0$.

$$\begin{cases} y=x^2-3x+4 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow x^2-3x+4=mx \Rightarrow x^2-3x-mx+4=0 \Rightarrow x^2+x(-3-m)+4=0 \Rightarrow$$

$$(-3-m)^2-4(1)(4)=0$$
$$m^2+6m+9-16=0$$
$$m^2+6m-7=0$$
$$(m+7)(m-1)=0$$
$$m_1=-7, m_2=1$$

La retta con coefficiente angolare positivo è quella con $m=1$. La retta ad essa ortogonale avrà coefficiente angolare inverso e opposto, ossia $m_\perp=-1$.
Il fascio delle rette di coefficiente angolare -1 è $y=-x+k$.
Intersechiamo tale fascio con la parabola e poniamo $\Delta=0$.

$$\begin{cases} y=x^2-3x+4 \\ y=-x+k \end{cases} \Rightarrow x^2-3x+4=-x+k \Rightarrow x^2-3x+x+4-k=0 \Rightarrow x^2-2x+4-k=0 \Rightarrow$$

$$(2)^2-4(1)(4-k)=0$$
$$4-16+4k=0$$
$$4k=12$$
$$k=3$$

La retta cercata ha dunque equazione $y=-x+3$, ossia $x+y=3$ e, guarda caso, la risposta corretta è la d.

4) Il massimo intero positivo per cui $n^{200}<5^{300}$ è…

$$n^{200} < 5^{300} \Rightarrow \left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{300} < 5^{300} \Rightarrow n^{\frac{2}{3}} < 5 \Rightarrow \left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} < 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow n < \sqrt{5^3} \Rightarrow n < 5\sqrt{5} \approx 11.2$$

Il numero intero cercato è dunque 11. La risposta corretta è la d.

5) $x = \left(\frac{81}{\sqrt{64}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{\sqrt{64}}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[8]{2^6}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{3}{\sqrt[4]{8}}$.

Per esclusione

- $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ è diverso da $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$ perché $2\sqrt{2} = \sqrt{8} \neq \sqrt[4]{8}$
- 24/64 è diverso da $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$ perché una delle due frazioni ha il denominatore intero e l'altra no
- 3/2 è diverso da $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$ perché una delle due frazioni ha il denominatore intero e l'altra no
- $\frac{3}{\sqrt{2}}$ è diverso da $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$ perché $\sqrt{2} \neq \sqrt[4]{8}$

Resta l'ultima…. La risposta corretta è la e.
Dimostriamolo.

$\frac{24}{8^{\frac{5}{4}}} = \frac{24}{\sqrt[4]{8^5}} = \frac{24}{8\sqrt[4]{8}} = \frac{3}{\sqrt[4]{8}}$.

6) $y = kx^2 + (k-1)x$

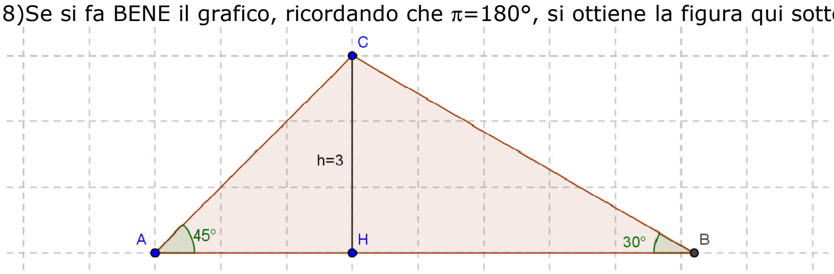
Andiamo per casi.

- k=0 no perché l'equazione diventa y=-x che non è una parabola.
- k=2. L'equazione diventa $y=2x^2+x$ che ha vertice $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ che non è nel quarto quadrante.
- k=-1. L'equazione diventa $y=-x^2-2x$ che ha vertice $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right) = \left(\frac{2}{-2}, -\frac{4}{-4}\right) = (-1,1)$ che non è nel quarto quadrante.
- k=1/3. L'equazione diventa $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$ che ha vertice $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right) = \left(\frac{\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}}, \frac{-\frac{4}{9}}{4\cdot\frac{1}{3}}\right) = \left(1, -\frac{1}{3}\right)$ che è nel quarto quadrante.

La risposta corretta è la d.

7) $0\leq x\leq\pi$. sinx=2-a ha soluzioni se $0\leq \sin x\leq 1$.
Ne segue $0\leq 2-a\leq 1 \Rightarrow -2\leq -a\leq 1-2 \Rightarrow -2\leq -a\leq -1$
Si cambiano i segno e si gira il verso.
$1\leq a\leq 2$.
La risposta corretta è la b.

8)Se si fa BENE il grafico, ricordando che π=180°, si ottiene la figura qui sotto.



CH=3⇒AH=3. Si trova, con il teorema di Pitagora, $AC = 3\sqrt{2}$.
Si consideri il triangolo HBC. Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, dunque

$$CH = BC \cdot \sin 30° \Rightarrow BC = \frac{CH}{\sin 30°} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 .$$

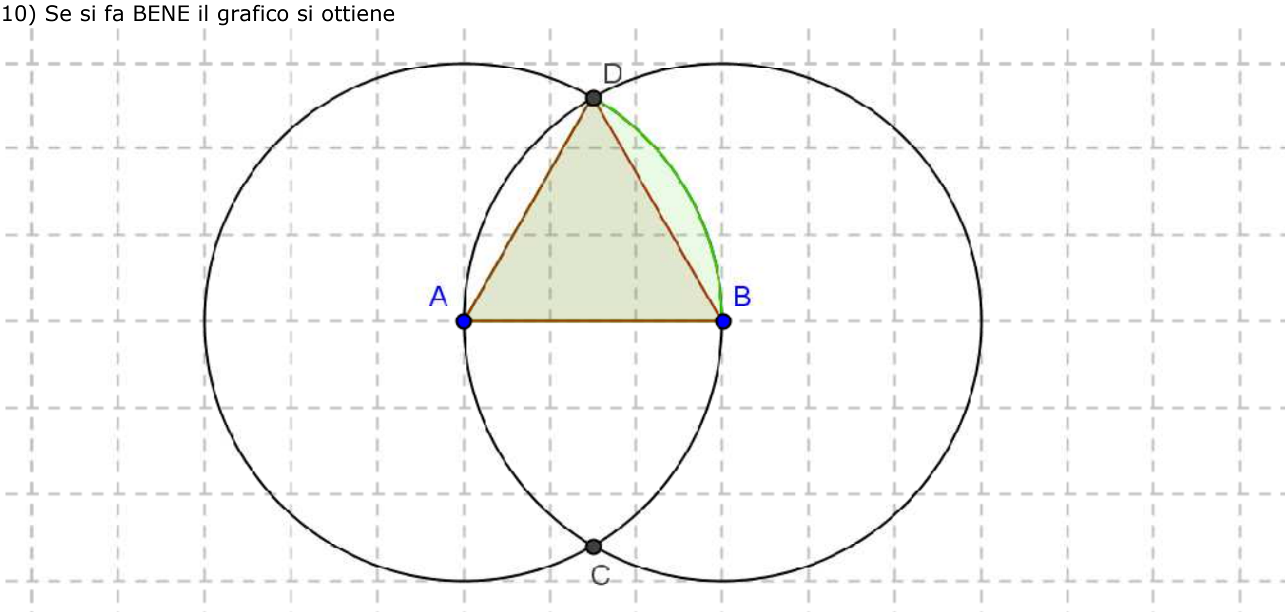
Con Pitagora sia ha $BH = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{2}$.

$$2p = AH + AC + BH + BC = 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 6 = 3\left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

La risposta corretta è la a.

9)
$$\begin{cases} x - my = 1 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + my \\ 2(1+my) - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + my \\ 2 + 2my - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + my \\ 2y(m-2) = 1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + my \\ 2y(m-2) = -1 \end{cases}$$
La seconda equazione diventa 0=-1 per m=2, dunque se m=2 il sistema è impossibile. La risposta corretta è la c.

10) Se si fa BENE il grafico si ottiene



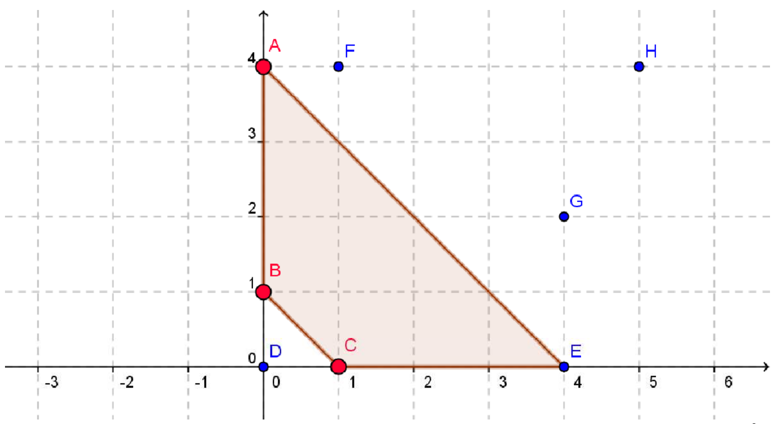
L'angolo DAB è di 60°, in quanto ABD è un triangolo equilatero.

BD è dunque un sesto della circonferenza, e sapendo che il perimetro della circonferenza è $2\pi r$ si ha $BD = \frac{1}{6} 2\pi r = \frac{1}{3}\pi r$.

Il perimetro della regione di piano intersezione dei due cerchi è 4 volte BD, dunque $2p = 4BD = \frac{4}{3}\pi r$.

La risposta corretta è la b.

11)



L'unico punto tra quelli proposti che permette di formare un trapezio isoscele con i punti dati è (4,0).
La risposta corretta è la b.

12)
$\frac{1 - \sin x}{\sin^2 2x} = 0 \Rightarrow 1 - \sin x = 0$ ponendo come campo di esistenza $\sin^2 2x \neq 0$.
Risolviamo 1-sinx=0
sinx=1 $\Rightarrow$ x=90°+k360°.
Risolviamo il C.E. $\sin^2 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 0° + k180° \Rightarrow x \neq 0° + k90°$.
Le soluzioni di sinx=1, ossia x=90°+k360°, non sono accettabili per il campo di esistenza. L'equazione è impossibile.
La risposta corretta è la a.

13)
$$\frac{x^2+1}{x} < -1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x} < 0$$
Il numeratore è sempre positivo, dunque il segno della frazione dipende esclusivamente dal denominatore.
x<0.
La soluzione corretta è la a.