Soluzioni matematica di base giugno 2013

1)

$\frac{1-\sin x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow 1-\sin x = 0$ ponendo come campo di esistenza $\sin^2 x \neq 0$, ossia $\sin x \neq 0$.

Risolviamo 1-sinx=0

sinx=1 $\Rightarrow$ x=90°+k360°.

Risolviamo il C.E. sinx≠0 $\Rightarrow$ x≠0°+k180°.

Le soluzioni di sinx=1, ossia x=90°+k360°, sono accettabili per il campo di esistenza.

In radianti la soluzione si scrive $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. La risposta corretta è la b.

2) $7^{3a} - 4^{3b}$ con a,b∈N.

Andiamo per esclusione.

- è sempre un numero primo? Con a=1 e b=1 si ha 343-64=279 che non è primo. No.
- è primo solo se b è dispari? Con a=1 e b=1 si ha 343-64=279 che non è primo. No.
- è primo solo se a è pari? Con a=2 e b=1 si ha 117649-64=117585 che è divisibile per 3. No.
- è primo solo se a e b sono entrambi dispari? Con a=1 e b=1 si ha 343-64=279 che non è primo. No.

La soluzione corretta è "non è mai primo", quindi la c.

3) $\sin^2 3x \leq -a$ ha soluzioni per ogni valore di a se…

$\sin^2 3x$ è positivo, dunque non può essere minore di un numero negativo. Si deve dunque porre -a≥0, ossia a≤0.

sin3x è compreso tra -1 e 1, dunque il suo quadrato è compreso tra 0 e 1. $0 \leq \sin^2 3x \leq 1$.

Ponendo -a≤1 (a≥-1) si ha $0 \leq \sin^2 3x \leq -a$ per ogni valore di x.

La soluzione è l'intersezione tra a≤0 e a≥-1, ossia -1≤a≤0. La risposta corretta è la e.

4) Sia 0<x<1 e -1<y<0.

$x + \frac{1}{y} < 0 \Rightarrow \frac{xy+1}{y} < 0$

Si moltiplicano ambo i membri per y, che è negativo, dunque si gira il verso della disequazione.

xy+1>0 $\Rightarrow$ xy>-1.

Quest'ultima è sempre vera dato che x è positivo e y negativo. Ne segue che $x + \frac{1}{y} < 0$ è sempre vera per ogni valore di x e y. La risposta corretta è la d.

5) $|x+2| = |x-2|$.

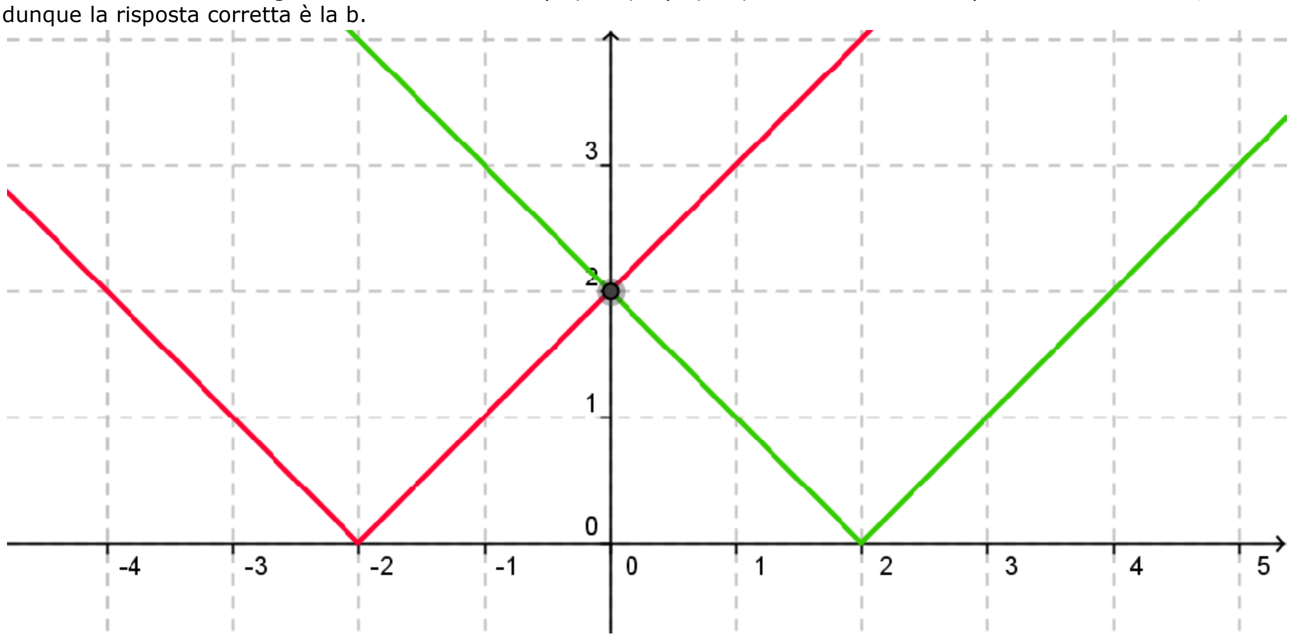
Si possono elevare al quadrato ambo i membri, dato che entrambi presentano il valore assoluto.

Si può risolvere normalmente la disequazione, ma la risoluzione è più lunga.

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 - 2x + 4$$
$$4x = 0$$
$$x = 0$$

C'è una sola soluzione e la risposta corretta è la b.

Si considerino del resto i grafici delle due funzioni y=|x+2| e y=|x-2|. Essi hanno solo un punto di intersezione, dunque la risposta corretta è la b.



6) $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1}$.

Il secondo membro è la radice quadrata di un numero sicuramente superiore a 1.
Il primo membro è il quadrato di un numero sicuramente compreso tra 0 e 1.
La disequazione è impossibile.
La risposta corretta è la c.

7) Per esclusione con $b>a$
- $b^2>a^2$ è falsa. Basta porre $b=1$ e $a=-2$.
- $b^4>a^4$ è falsa. Basta porre $b=1$ e $a =-2$.
- $b^2>ab$ è falsa. Basta porre $b=-1$ e $a=-2$.
- $b/a>1$ è falsa. Basta porre $b=1$ e $a=-1$.

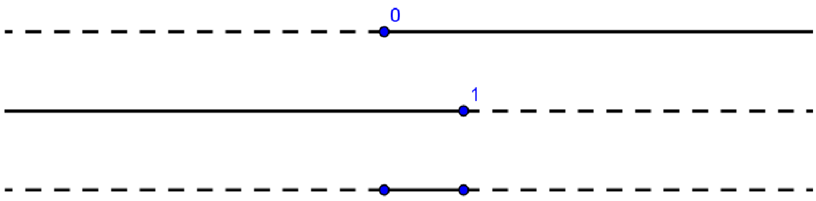
Resta $b^3>a^3$ che è equivalente a $b>a$. La risposta corretta è la b.

8)
$x^3 \le x^4$

$x^3 - x^4 \le 0$

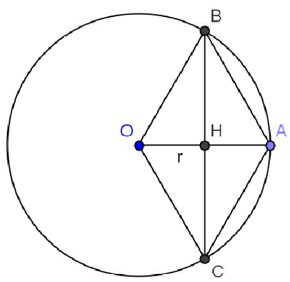
$x^3(1-x) \le 0$

Si pongono i singoli fattori maggiori o uguali a zero.
$x^3 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$
$1-x \ge 0 \Rightarrow -x \ge -1 \Rightarrow x \le 1$



La soluzione è data dalle linee tratteggiate, dunque $x\le 0$ oppure $x\ge 1$. La risposta corretta è la a.

9) Se si fa bene il disegno si ottiene la seguente figura.



OA, OB e OC hanno lunghezza r in quanto raggi, AB e AC hanno lunghezza r perché è uno dei dati del problema.
Il quadrilatero ABOC è dunque un rombo formato da due triangoli equilateri di lato r. Calcoliamo con Pitagora BH.

$BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'area del triangolo equilatero AOB è $\text{Area}(AOB) = \frac{OA \cdot BH}{2} = \frac{r \cdot r\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = r^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

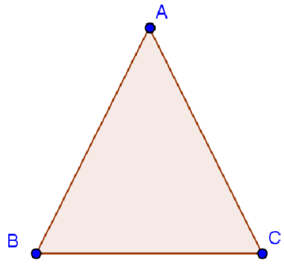
L'area di ABOC è il doppio dell'area di AOB, dunque $\text{Area}(ABOC) = 2r^2\frac{\sqrt{3}}{4} = r^2\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La risposta corretta è la b.

10) Per esclusione
- $3^{2^2} = 3^4 \ne 3^6$ NO
- $2^{2^3} = 2^8, 2^{3^2} = 2^9$ NO
- $3^{2^2} = 3^4$ è divisibile solo per 3 mentre 6^3 è pari, dunque è divisibile anche per 2. NO
- $4^4 = \left(2^2\right)^4 = 2^8$, $2^{2^3} = 2^8$ SI
- $4^3 = \left(2^2\right)^3 = 2^6$, $2^{2^3} = 2^8$ NO

La risposta corretta è la d.

11)

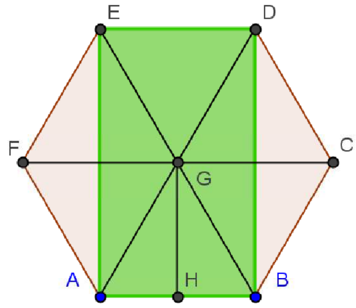


Per la disuguaglianza triangolare AB+AC>BC, ossia 2AB>BC, da cui segue $\frac{BC}{AB} < 2$.

L'unico numero maggiore di 2 tra quelli proposti è 7/3, dunque è la frazione che non può essere il rapporto tra la lunghezza di BC e quella di AB.
La risposta corretta è la d.

12) Il punto medio di AC è l'origine, dunque A e C sono allineati con l'origine.
La risposta corretta è la a.

13)



Si vuole determinare l'area di ABDE. Esso è un rettangolo di base AB=l. L'altezza è BD=2GH. Per determinare GH si applica il teorema di Pitagora al triangolo AGH, ricordando che in un esagono regolare il centro G ha distanza AG dai vertici esattamente uguale al lato l.

$$GH = \sqrt{AG^2 - AH^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{2}l\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}l^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BD = 2GH = 2l\frac{\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3}$$

$$\text{Area}(ABDE) = AB \cdot BD = l \cdot l\sqrt{3} = l^2\sqrt{3}$$

La risposta corretta è dunque la b.