Soluzioni matematica di base febbraio 2013

1) $-\sqrt{x^2-9} < -3 \Rightarrow \sqrt{x^2-9} > 3$.

Si ricorda che $\sqrt{p} > q$ è equivalente al sistema $\begin{cases} q \geq 0 \\ p \geq 0 \\ p > q^2 \end{cases}$, ossia $\begin{cases} 3 \geq 0 \\ x^2-9 \geq 0 \\ x^2-9 > 9 \end{cases}$.

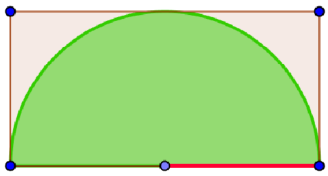
La prima disequazione è banalmente verificata.

$x^2-9 \geq 0$ ha come equazione associata $x^2-9=0$ di soluzioni -3 e 3. La soluzione è data dai valori esterni $x \leq -3$ oppure $x \geq 3$.

La terza disequazione è $x^2-18>0$ di soluzioni $-3\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$. La soluzione è data dai valori esterni $x < -3\sqrt{2}$ oppure $x > 3\sqrt{2}$.

L'intersezione delle soluzioni coincide con la soluzione della terza disequazione.
Tra le possibili risposte solo la a risulta essere contenuta nella soluzione del sistema.
La risposta corretta è la a.

2)



Il rettangolo ha lati di lunghezza R e 2R, la sua area è dunque $2R^2$.

L'area del semicerchio di raggio R è la metà dell'area del cerchio di raggio R, ossia $\frac{\pi R^2}{2}$.

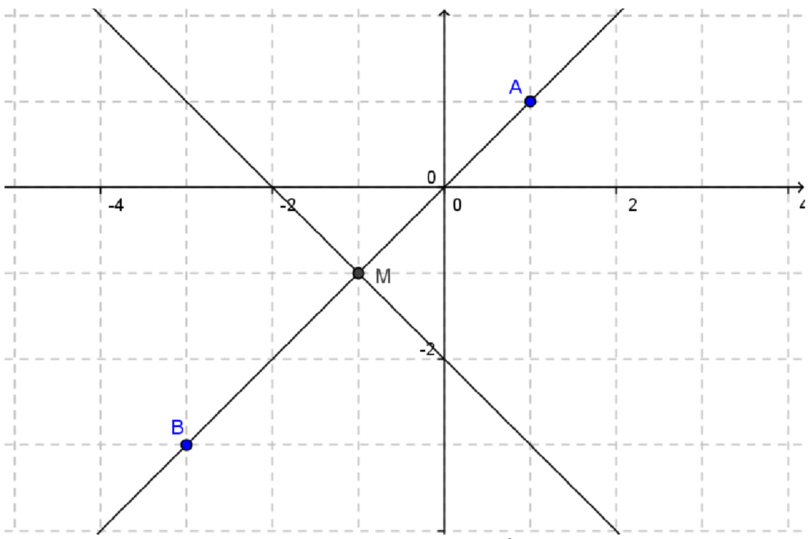
La regione compresa tra semicirconferenza e rettangolo ha area $2R^2 - \frac{\pi R^2}{2} = R^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$. La risposta corretta è la a.

3)

$\begin{cases} \frac{a}{a-b} = 1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} \\ a+b=3 \end{cases}$. Il campo di esistenza è $a \neq b$.

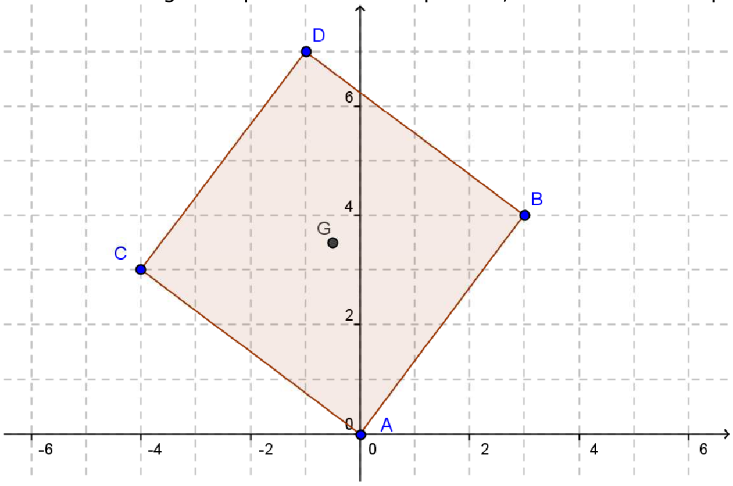
$\begin{cases} a = a-b \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+0=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=3 \end{cases}$. La risposta corretta ò la c.

4) Un punto è equidistante da due punti A e B dati se appartiene all'asse del segmento AB.
Troviamo l'asse del segmento AB graficamente, così da risparmiare un po' di calcoli.
Si determina il punto medio di AB, M=(-1,-1), si traccia la retta passante per A e B e la sua perpendicolare passante per M.



L'unico punto tra quelli dati che appartiene all'asse del segmento AB è (0,-2).
La risposta corretta è la d.

5) Basterebbe tracciare correttamente il grafico per trovare la risposta e, ma diamo comunque un procedimento.



Si determini il punto medio di BC. $G = \left(\frac{3-4}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Sapendo che G è il punto medio di AD si ha $\frac{x_A + x_D}{2} = x_G \Rightarrow \frac{0 + x_D}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_D = -1$, e analogamente

$\frac{y_A + y_D}{2} = y_G \Rightarrow \frac{0 + y_D}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow y_D = 7$.

6)
$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$.
La risposta corretta è la e.

7)
$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.
Determiniamo le sue radici.
Banalmente si nota che $P(1) = 3 + 2 - 7 + 2 = 0$, pertanto $x_1=1$ è radice del polinomio.
Scomponiamo con Ruffini.

	3	2	-7	2
1		3	5	-2
	3	5	-2	0

$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x-1)(3x^2 + 5x - 2)$.

Determiniamo le radici di $3x^2 + 5x - 2$.

$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(3)(-2)}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$

$x_2 = \frac{-12}{6} = -2$

$x_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Le radici intere sono due e la risposta esatta è la b.

8) $0<x<\pi/2$ e 3cosx=sinx
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \sin x = 3\cos x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 3\cos x \\ (3\cos^2 x) + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 3\cos x \\ 10\cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 3\cos x \\ \cos^2 x = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

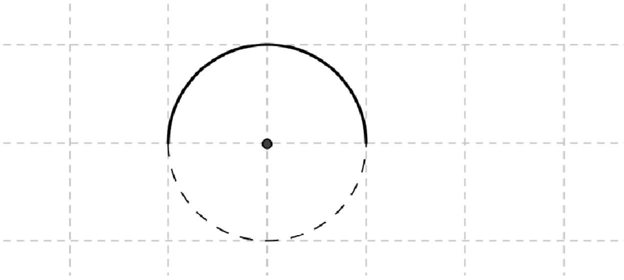
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 3\cos x \\ \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

La soluzione con il coseno negativo non può essere presa in considerazione per $0<x<\pi/2$.
L'unica risposta corretta è pertanto la c.

9) $2\sin x - \sin 2x > 0$
Con le formule di duplicazione e raccogliendo si ottiene:
$2\sin x - 2\sin x \cos x > 0$
$2\sin x(1 - \cos x) > 0$
Risolviamo i due fattori

sinx>0 per $0+2k\pi < x < \pi+2k\pi$ 0<x<π.

1-cosx>0 ⇒ -cosx>-1 ⇒cosx<1 vero per tutti i valori della $x \neq 0+2k\pi$.

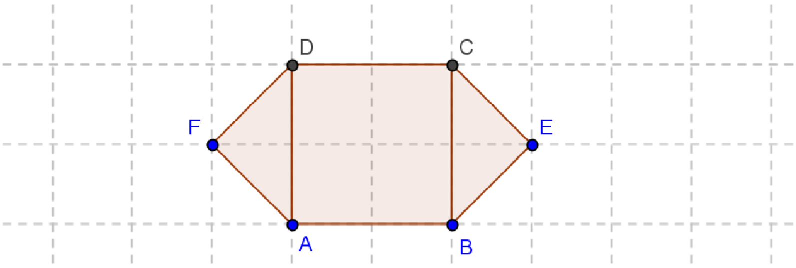


La risposta corretta è la a.

10) $\left(\sqrt[16]{x}-\sqrt[16]{y}\right)\left(\sqrt[16]{x}+\sqrt[16]{y}\right)=\left(\sqrt[16]{x^2}-\sqrt[16]{y^2}\right)=\left(\sqrt[8]{|x|}-\sqrt[8]{|y|}\right)=\left(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y}\right)$.

L'ultimo passaggio è permesso perché il testo dice che x e y sono reali positivi. La risposta corretta è la d.

11)



Per determinare il perimetro dell'esagono si deve determinare BE=CE=x sapendo che sono cateti del triangolo rettangolo BEC.

Applichiamo Pitagora. $x^2+x^2=2^2 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$.

Il perimetro è dunque $2p=2+2+4\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$. La risposta corretta è la d.

12) Data y=kx+1 si vuole determinare la retta ad essa ortogonale passante per il punto d'incontro tra la retta data e l'asse x.

Determiniamo l'intersezione tra la retta data e l'asse x.

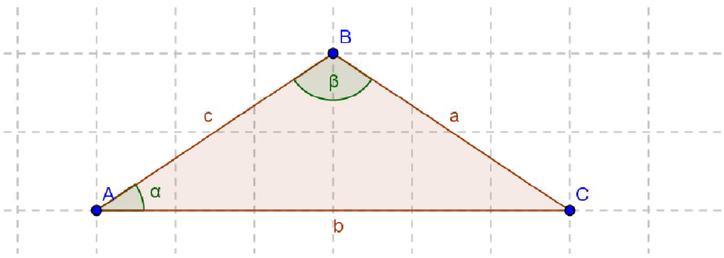
$$\begin{cases} y=kx+1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=kx+1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx=-1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{k} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{-1}{k},0\right)$$

La retta ortogonale alla retta data ha coefficiente angolare inverso e opposto a k, ossia -1/k.
Applichiamo la formula delle rette passanti per un punto di coefficiente angolare noto.

$$y-y_A=m\left(x-x_A\right) \Rightarrow y-0=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{1}{k}\right) \Rightarrow y=-\frac{1}{k}x-\frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{k^2y=-kx-1}{k^2} \Rightarrow kx+k^2y+1=0$$

La risposta corretta è la b.

13)



Conoscendo $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ e utilizzando la relazione fondamentale si ricava $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

Dal fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo sia π segue che $\beta=\pi-2\alpha$.

Per le formule degli archi associati $\sin\beta=\sin\left(\pi-2\alpha\right)=\sin\left(2\alpha\right)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

La formula per calcolare l'area di un triangolo è

$$\text{Area}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}c^2\frac{24}{25}=\frac{12}{25}c^2=192 \Rightarrow c^2=192\cdot\frac{25}{12}=400 \Rightarrow c=20 .$$

La formula per calcolare l'area di un triangolo è $\text{Area}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$.

Sostituendo i dati si ha: $\text{Area}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha \Rightarrow 192=\frac{1}{2}b\cdot 20\cdot\frac{4}{5} \Rightarrow 192=8b \Rightarrow b=\frac{192}{8}=24$.

2p=a+b+c=20+20+24=64. La risposta corretta è la b.